Mat2AN, afleveringsopgave 8

Christian Wulff-Nilsen, hold 4

15. november 2001

Opgave 4(i)

Lad $M = [0,1] \times [0,1]$ være et metrisk delrum af $\mathbf{R}^2$ med normen

$$||(x,y)||_\infty = \max\{|x|, |y|\}.$$

Det oplyses, at

$$T(x,y) = \left(e^{-\frac{1}{4}xy}, \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$$

definerer en Lipschitz-afbildning $T : M \to M$ med Lipschitz-konstant $C < 1$.

Det skal vises, at ligningssystemet

$$\begin{cases} e^{-\frac{1}{4}xy} = x \\ \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = y \end{cases}$$

har præcis en løsning $(a,b) \in M$.

Lad d være den af normen $||\cdot||_\infty$ inducerede metrik.Da $\mathbf{R}^2$ er fuldstændigt, og da M er en afsluttet delmængde af $\mathbf{R}^2$, giver sætning 5.3, at (M,d) er fuldstændigt.

Da T er en kontraktion af M, giver sætning 7.8, at T har præcis et fixpunkt i M, dvs. præcis et punkt $(a,b) \in M$, så

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{4}ab} \\ \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

hvilket viser det ønskede.

Opgave 4(ii)

Det oplyses, at for alle $s,t \in [0,1]$ gælder

$$|\cos(s) - \cos(t)| \le (\sin 1)|s-t|$$
$$|e^{-s} - e^{-t}| \le |s-t|.$$

Det skal vises, at $C = \max\{\frac{1}{2}, \sin 1\}$.

Lad $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$ være givet. Der fås

$$\begin{aligned}
d(T(x_1,y_1),T(x_2,y_2)) = ||T(x_1,y_1) - T(x_2,y_2)||_\infty &= \\
\max\left\{\left|e^{-\frac{1}{4}x_1y_1} - e^{-\frac{1}{4}x_2y_2}\right|, \left|\cos\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right)\right|\right\} &\le \\
\max\left\{\left|\frac{1}{4}x_1y_1 - \frac{1}{4}x_2y_2\right|, (\sin 1)\left|\frac{x_1+y_1}{2} - \frac{x_2+y_2}{2}\right|\right\} &= \\
\max\left\{\frac{1}{4}|x_1y_1 - x_2y_2|, \frac{\sin 1}{2}|x_1+y_1-x_2-y_2|\right\} &\le \\
\max\left\{\frac{1}{4}|x_1y_1 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_2y_1|, \frac{\sin 1}{2}(|x_1-x_2| + |y_1-y_2|)\right\} &\le \\
\max\left\{\frac{1}{4}|(x_1-x_2)y_1 + x_2(y_1-y_2)|, \frac{\sin 1}{2} 2\max\{(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}\right\} &\le \\
\max\left\{\frac{1}{4}(|x_1-x_2|y_1 + x_2|y_1-y_2|), \sin 1 \cdot \max\{(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}\right\} &\le \\
\max\left\{\frac{1}{4}(|x_1-x_2| + |y_1-y_2|), \sin 1||(x_1,y_1) - (x_2,y_2)||_\infty\right\} &\le \\
\max\left\{\frac{1}{4} 2\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\}, \sin 1 \cdot d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\right\} &= \\
\max\left\{\frac{1}{2}||(x_1,y_1) - (x_2,y_2)||_\infty, \sin 1 \cdot d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\right\} &= \\
\max\left\{\frac{1}{2}d((x_1,y_1),(x_2,y_2)), \sin 1 \cdot d((x_1,y_1),(x_2,y_2))\right\} &= \\
\max\left\{\frac{1}{2}, \sin 1\right\} d((x_1,y_1),(x_2,y_2)),&
\end{aligned}$$

som ønsket. Den femte ulighed følger af, at $0 \le x_2, y_1 \le 1$.