Matematik 2AN

Opgave 1 fra eksamenen juni 1999

Christian Aastrup

28. november 2001

1 Metriske rum

Jeg betragter det metriske rum $(\mathbb{N}, d)$, hvor $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0, \infty[$ er givet ved

$$d(x,y) = |2^{-x} - 2^{-y}|$$

1.1 d er en metrik på $\mathbb{N}$

Hvis d er en metrik på $\mathbb{N}$, så skal den opfylde følgende tre ting for vilkårlige

$$x, y, z \in \mathbb{N}$$

1.1.1 M1 $\quad d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Jeg har, at $|\cdot|$ i $d(x,y)$ bevirker, at $d(x,y) \geq 0$. Hvis $x = y$, så er det klart, at $d(x,y) = 0$, og hvis

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \\ &\Downarrow \\ |2^{-x} - 2^{-y}| &= 0 \\ &\Downarrow \\ 2^{-x} &= 2^{-y} \\ &\Downarrow \\ x &= y \end{aligned}$$

1.1.2 M2 $\quad d(x,y) = d(y,x)$

Dette kan indses, idet

$$|2^{-x} - 2^{-y}| = |2^{-y} - 2^{-x}|$$

1.1.3 M3 $\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad$ (Trekantsuligheden)

Jeg betragter venstre side af uligheden (for vilkårlige $x, y, z \in \mathbb{N}$), mens jeg husker, at $|\cdot|$ opfylder trekantsuligheden

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |2^{-x} - 2^{-y}| \\ &= |2^{-x} - 2^{-z} + 2^{-z} - 2^{-y}| \\ &\leq |2^{-x} - 2^{-z}| + |2^{-z} - 2^{-y}| = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

1.2 En følge i $\mathbb{N}$

Jeg betragter følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ givet ved $x_n = n^2$. Jeg vil vise, at følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchyfølge i $(\mathbb{N}, d)$, altså

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Afstanden mellem vilkårlige x_n og x_m i følgen kan vuderes

$$d(x_n, x_m) = |2^{-x_n} - 2^{-x_m}| = |2^{-n^2} - 2^{-m^2}| \leq 2^{-n^2} + 2^{-m^2}$$

Idet $\lim_{k\to\infty} 2^{-k^2} = 0$, har jeg

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \ : \ k \geq N \Rightarrow 2^{-k^2} < \tfrac{\varepsilon}{2} \\ \Downarrow \\ \forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \ : \ n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq 2^{-n^2} + 2^{-m^2} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{gathered}$$

Følgen er Cauchy.
Jeg betragter betingelsen for, at $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi $a \in \mathbb{N}$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) = |2^{-n^2} - 2^{-a}| < \varepsilon \tag{1}$$

Idet $\lim_{n\to\infty} 2^{-n^2} = 0$ har jeg

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |2^{-n^2} - 0| < \varepsilon$$

Derfor kan det ses, at det $a \in \mathbb{N}$, der opfylder, at $2^{-a} = 0$, er det a som opfylder (1). Men et sådant $a \in \mathbb{N}$ findes ikke, og følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kan derfor ikke være konvergent.

1.3 Kugler i $(\mathbb{N}, d)$

Jeg lader $x \in \mathbb{N}, r > 0$ og den åbne kugle med centrum x og radius r være givet ved

$$K(x, r) = \{y \in \mathbb{N} \mid d(x, y) < r\}$$

Jeg vil vise, at der for alle $x \in \mathbb{N}$ gælder

$$K(x, 2^{-(x+1)}) = \{x\}$$

altså

$$\forall y \in \mathbb{N} \setminus \{x\} : d(x, y) \geq 2^{-(x+1)}$$

Der gælder for $x, y \in \mathbb{N}$ hvor $x \neq y$, at

$$\begin{aligned}\frac{d(x,y)}{2^{-(x+1)}} &= \frac{|2^{-x} - 2^{-y}|}{2^{-(x+1)}} \\ &= \left|\frac{2^{-x} - 2^{-y}}{2^{-(x+1)}}\right| \\ &= \left|2^{-x+(x+1)} - 2^{-y+(x+1)}\right| \\ &= \left|2 - 2^{x-y+1}\right|\end{aligned}$$

For $x, y \in \mathbb{N}$ og $x \neq y$ kan 2^{x-y+1} antage værdier i mængden

$$\{\ldots, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^2, 2^3, \ldots\}$$

hvilket medfører

$$\begin{aligned}\left|2 - 2^{x-y+1}\right| &\geq |2 - 1| = 1 \\ &\Downarrow \\ d(x, y) &\geq 2^{-(x+1)}\end{aligned}$$

1.4 Vilkårlige delmængder $A \subseteq \mathbb{N}$ er åbne mht. d

Idet jeg har for alle x i $\mathbb{N}$, at

$$K(x, 2^{-(x+1)}) = \{x\}$$

så er alle $\{x\}$ i $\mathbb{N}$ åbne mængder, idet alle åbne kugler er åbne.
En vilkårlig delmængde A af $\mathbb{N}$ har formen

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$$

Idet alle $\{x\}$ er åbne, giver **Sætning 2.6** mig at A er åben.

Alternativt kan man sige, at $(\mathbb{N}, d)$ er ækvivalent med $(\mathbb{N}, \tilde{d})$, hvor $\tilde{d}$ er den diskrete metrik, idet $\mathbb{N}$ er en diskret mængde[1].
Alle delmængder under den diskrete metrik er åbne, og ækvivalente metrikker fastlægger samme system af åbnede mængder, så derfor må alle delmængder af $\mathbb{N}$ under d må også være åbne.

[1] Det er blevet afsløret ved en øvelsestime