Reklame: Matematik-økonomi studiet

Økonomi på et solidt matematisk/statistisk grundlag.

Delene "økonomi" & "matematik" er bygget sammen også i de enkelte kurser; det er ikke "mat" med bifag i "øk" eller omvendt.

Ikke for at svine andre til, men mat-øk på KU er altså bedre end polit-studiet eller MØK på Handelshøjskolen.

Det *er* en erhvervs- og forskningsrettet uddannelse; det er *er ikke* en gymnasie/handelsskolelærer-uddannelse.

Mere info: "Generel studieinformation fra NatFak",
`http://www.math.ku.dk/mathecon`
eller spørg mig (`rolf@math.ku.dk`)

Hvad bør en option koste?

HCØ-dage - oktober 2003

Københavns Universitet
Rolf Poulsen
`http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/HCOdage.html`

Hvad bør en option koste ?
Et spørgsmål fra finansieringsteorien

Option: Ret, men ikke pligt, til at gøre *noget*.

- Den grundlæggende fremgangsmåde: Black og Scholes (1973), Merton (1974) (Nobelpris 1997)

- Vi ser på en mild udgave, som dog anvendes i enormt omfang

- Optionen er et eksempel på et derivat. Derivatmarkederne er store: Formentlig oppe omkring beløb omkring 10^{13} dollars årligt

- Optioner er allevegne

Hovedområder:

- Finansiel teori (aktier, obligationer, optioner=dagens emne)

- Operationsanalyse (løsning er store/svære optimeringsproblemer)

- Økonometri (statistisk analyse af økonomiske data; Nobelpris 2003)

- Makroøkonomiske modeller

- Spilteori ("A Beautiful Mind")

Optioner og risikostyring

ABC vinder en licitation og skal derfor levere et produkt til det amerikanske marked.
Udgiften idag (til produktion) er 650.000 DKK.
Indtægten om 10 måneder er 100.000 USD
Antag kursen idag er 7.50
God forretning, men hvad hvis kursen falder i mellemtiden?
En (valuta)option kan sikre virksomheden retten til at sælge USD om 10 måneder til en aftalt kurs (og samtidig have glæde af en kursstigning)

En *europæisk* call (da:: købs) option med

- ABC aktien som underliggende aktiv
- aftale-pris K
- udløbsdato T

giver indehaveren ret - men ikke pligt - til at købe en ABC aktie til tid T til prisen K. Værdi ved udløb: max(aktiekurs$(T) - K, 0)$ (Hvorfor?)

En put (da.: salgs) option giver ret til at sælge til en bestemt pris. (T-værdi: max$(K -$ aktiekurs$(T), 0)$)

Hvad er en fair pris for en option?
Indledende betragtninger:

- Prisen må være ≥ 0.
- Større aftalepris K giver lavere pris på en call option
- Må afhænge af ABC aktiens pris idag og af fremtidig udvikling
- Obligationspriser, eller 'renten', som jo bestemmer nutidsværdier af fremtidige 'sikre' betalinger, har måske også betydning

Vi bygger en model!

Optioner og spekulation

Mandag 13. oktober 2003 kl. ca. 14: KFX-indekset ligger i ca. 253.2 Jeg *tror* det falder (kraftigt) indenfor 1 måned.

På `http://www.cse.dk/kf/kf_derivater`
ser jeg, at en (1 måned & 7 dage) put-option med aftalekurs $K =$ 250 koster 5.5 DKK. Dem køber jeg 100 af. Det koster 550.

Hvis nu KFX-indekset om 1 måned ligger i kurs 230 (et fald på 8% ift. idag), så får jeg 100 $\times$ (250-230) = 2000, og har tjent 1475, eller en fortjeneste på 265% !

Hvis på den anden side indekset lander i 250 eller mere, så har jeg tabt de 550; mao. et tab på 100%.

- Lav en portefølje (a,b) bestående af a aktier og b enheder af pengemarkedsinstrumentet således at

$$a(uS) + bR = C_u$$

$$a(dS) + bR = C_d$$

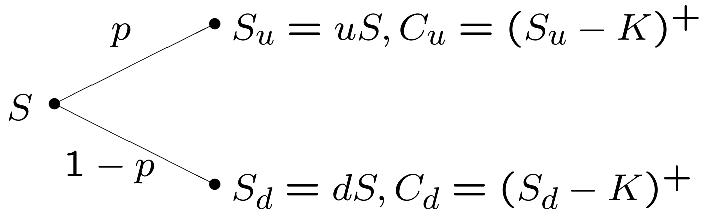
- Med andre ord: Porteføljens værdi er den samme som optionens værdi til tid 1 uanset om aktieprisen er gået op eller ned

- Løser vi dette fås

$$\begin{aligned} a &= \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} \\ b &= \frac{1}{R}\frac{(uC_d - dC_u)}{(u-d)} \end{aligned}$$

Binomialmodellen

- Modellen med en periode:



- $R = 1+$pengemarkedsrente

- Antag $0 < d < R < u$. Hvorfor er dette en rimelig betingelse?

Hvad er i denne simple model en fair pris på optionen?

Et numerisk eksempel

$$
S = 100 \;\begin{cases} \xrightarrow{p = 0.5} & S_u = 125, C_u = (125 - 102)^+ = 23 \\ \xrightarrow{1-p = 0.5} & S_d = 80, C_d = (80 - 102)^+ = 0 \end{cases}
$$

- Aftaleprisen er sat til 102

- Antag renten er 10%, dvs. $R = 1.1$

- Bemærk $0 < d = 0.8 < R = 1.1 < u = 1.25$

- Prisen på call optionen må nu være prisen for at lave den replikerende portefølje

$$
\begin{aligned}
& aS + b \cdot 1 \\
= \; & \text{...regne, regne...} \\
= \; & \left[\left(\frac{R-d}{u-d} \right) \frac{C_u}{R} + \left(\frac{u-R}{u-d} \right) \frac{C_d}{R} \right]
\end{aligned}
$$

- Prisen kan fortolkes som en middelværdi

- Sandsynlighedsparameteren er

$$q = \frac{R-d}{u-d}$$

$$1 - q = \frac{u-R}{u-d}$$

- p er væk!

Problem:

- Urealistisk at forestille sig kun to tilstande

- Hvis vi har mere end to tilstande, kan vi ikke (generelt) finde en replikerende portefølje

Løsning:

- Tillad både flere tilstande og flere tidspunkter, hvori porteføljen kan ændres.

Vi løser altså ligningssystemet

$$\begin{aligned} 125a + 1.1b &= 23 \\ 80a + 1.1b &= 0 \end{aligned}$$

og finder (cirka)

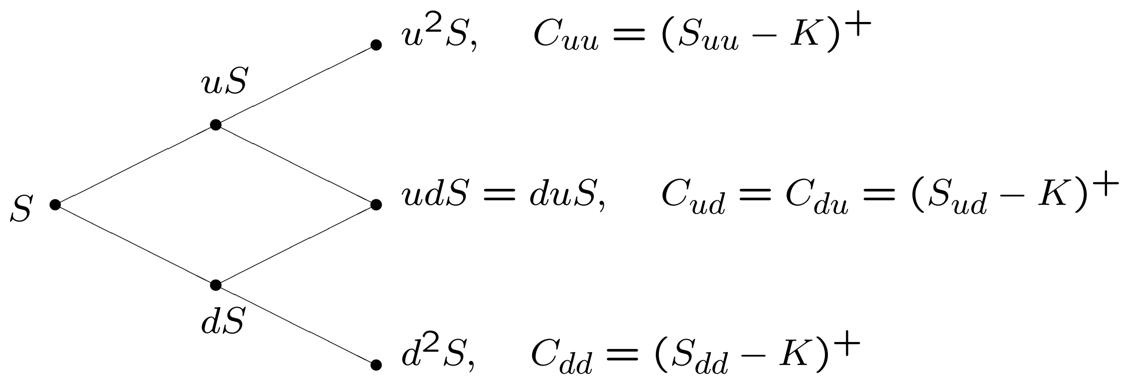
$$\begin{aligned} a &= 0.5111, \\ b &= -37.17 \end{aligned}$$

og heraf en optionspris på
$100 * 0.5111 - 37.17 = 13.94$

Ideen er nu at arbejde sig baglæns tilbage i træet.

- Find C_u, C_d ved samme teknik som før.
- Find C fra C_u, C_d igen ved brug af en-periode teknikken

- Betragt nu en to-perioders model



- Hvad er C?

Stadigvæk noget svært at forholde sig til hvad u og d er/skal være. Løsning (overraskende): En model med ∞ mange perioder er lettere at arbejde med. Lad tidsskridtlængden Δ gå imod 0 i en model hvor

$$u, d = \exp(\pm\sigma\sqrt{\Delta})$$

Man kan vise at call-prisen i grænsen er givet ved den såkaldte Black/Scholes formel:

$$C_0 = S(0)e^{-qT}\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + ((r-q)+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S(0)}{K}) + (r-q-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

ln er den naturlige logaritmefunktion, og Φ er fordelingsfunktionen for standardnormalfordelingen (dvs. $\Phi(y) = P(X \leq y)$, hvor $X \sim N(0,1)$), og q er den rate hvormed aktien udbetaler dividende/udbytte.

Udvides til T perioder får man binomialmodellen

$$C_t = \frac{1}{R^{T-t}} \sum_{i=0}^{T-t} \binom{T-t}{i} q^i (1-q)^{T-t-i} \max(0, S_t u^i d^{T-t-i} - K)$$

Her står vi på tidspunkt t og optionen udløber til tid T.
Denne teknik vil vi nu se illustreret på et EXCEL regneark i en model med 5 perioder

Vi ser at σ bestemmer hvor stor varians, der er på afkastene, dvs. hvor meget de svinger/hvor usikre de er.

Vigtigt resultat: Jo højere σ er, jo højere pris på call- & put-optioner. (Ja begge to!)
Forskringssynsspunkt: Optioner fjerner risiko, så rimeligt nok.
"Limited downside risk."

Alt andet end σ kan man (mere eller mindre) observere direkte.

Parameteren σ kaldes *volatiliteten* og man kan vise at aktieafkast (ca.) er normalfordelte, dvs.

$$\frac{S(t+\Delta)-S(t)}{S(t)} \sim N(\ldots\Delta, \sigma^2\Delta)$$

og at afkastene er uafhængige. Det betyder at

- σ ret let kan estimeres
- formlen finder ekstremt stor anvendelse (`KF-slide`); faktisk så meget at folk kan have svært ved at skelne model & virkelighed

Andre eksempler på optioner

- Retten til at indfri et realkreditlån før udløb
- Muligheder for i investeringsprojekter at tage beslutninger undervejs
- Aktieoptioner til ledende medarbejdere (pro: "gulerod"; "con": volatilitetsafhængighed, manipulationsrisiko, notorisk dårlig regnskabsrapportering; løsning: forstå prisfastsættelsen, "bechmarking"/indeksering)
- Pensioner med rentegarantier