Realkreditrådgivning baseret på porteføljeoptimering*

Kourosh Marjani Rasmussen, Rolf Poulsen og Jens Clausen

24. juni 2005

Baggrund

Man skal ikke besøge mange realkreditinstitutters hjemmesider for at overbevise sig om, at 1. års ydelse spiller en stor rolle, når der rådgives om boligfinansiering. For lånetyper, hvor ydelserne ikke er konstante over tid (variabelt forrentede eller afdragsfrie lån) kan det være intetsigende eller værre. Istedet foreslår Jakobsen (2004) horisont- og scenariebaseret rådgivning. Man vælger en passende tidshorisont, opstiller en række scenarier med varierende renteniveau, og foretager så en konsekvensberegning. Tabel 1 viser et eksempel.

For hvert rentescenarie kan man se ydelsen pr. måned for start– og slutmåneden i låneperioden, samt den samlede ydelse, det samlede afdrag, restgæld og indfrielsesbeløbet ved slutningen af låneperioden (i eksemplet indfries et 30–årigt lån efter 5 år, dvs. låneperioden er 5 år). Som ekstra information kan man se friværdien i ejendommen efter låneperioden når ejendomsprisen er steget 10% hhv. faldet med 10%. Informationen bruges ikke kvantitativt, men er et sundt *memento mori*: Ejendomspriser kan gå mere end en vej.

*Kourosh (kmr@imm.dtu.dk) og Jens (jc@imm.dtu.dk) er hhv. ph.d.-studerende og professor på Informatik og Matematisk Modellering på Danmarks Tekniske Universitet. Rolf (rolf@math.ku.dk) er lektor på Afdeling for Anvendt Matematik og Statistik på Københavns Universitet

	Mdl. ydl. e/skat		Samlet over 5 år				Friværdi hvis salgspris	
Renteskift	Start	Slut	Ydelse e/Skat	Afdrag	Indfrielse	Total bet.	+10%	-10%
Obligationslån, 5%, løbetid 30 år								
-1%	9130	9300	558.329	170.822	1.919.698	2.478.027	280.302	-119.698
+0%	9130	9300	558.329	170.822	1.870.553	2.428.883	329.447	-70.553
+1%	9130	9300	558.329	170.822	1.734.639	2.292.968	465.361	65.361
+3%	9130	9300	558.329	170.822	1.458.970	2.017.299	741.030	341.030
Tilpasningslån F1, løbetid 30 år								
-1%	7183	6808	425.102	259.869	1.740.131	2.165.232	459.869	59.869
+0%	7183	7258	438.733	241.913	1.758.087	2.196.820	441.913	41.913
+1%	7183	7770	453.843	225.171	1.774.829	2.228.672	425.171	25.171
+3%	7183	8974	488.350	195.287	1.804.713	2.293.063	395.287	-4.713
Tilpasningslån F1, løbetid 30 år, 10 års afdragsfrihed								
-1%	3386	2253	174.657	0	2.000.000	2.174.657	200.000	-200.000
+0%	3386	3386	208.657	0	2.000.000	2.208.657	200.000	-200.000
+1%	3386	4519	242.657	0	2.000.000	2.242.657	200.000	-200.000
+3%	3386	6786	310.657	0	2.000.000	2.310.657	200.000	-200.000

Tabel 1: Sammenligning af tre lånetyper med fire rentescenarier. Beregninger er hjemmelavede med den meget anbefalelsesværdige side `www.boligregner.dk` som åbentlyst forbillede. Horisonten er 5 år og lånebeløbet er 2.000.000.

Porteføljeoptimering – generelt

Tabel 1 er *ret*[1] objektiv. Den viser blot, hvordan en række nøgletal varierer ved forskellige givne renteudviklinger. Uden at overveje de finere juridiske detaljer, mener vi, det vil være en ganske udmærket ide at gøre det til en lovpligtig del af lånerådgivning at præsentere og forklare en tabel ala ovenstående for ens (potentielle) kunder.

Men tabellen svarer ikke på låntagers brændende spørgsmål: Hvilket lån skal jeg vælge? Det er her realkreditinstitutterne skal vise deres værd.

Tabel 1 afføder en rækker overvejelser:

- Låntagere kan godt lide lave ydelser og bryder sig ikke om risiko. Men "godt" for låntager er normalt "skidt" for investor, og det vil afspejle sig i kursen på de obligationer, låntager skal sælge. Man kan derfor ikke forvente, at Tabel 1 indeholder nogen åbentlyst dominerende (dvs. bedste) eller domineret (dvs.

[1] Der er en skjult antagelse om at renterne ændrer sig jævnt, og det kræver en overvejelse at få fremtidige kurser på konverterbare obligationer frem.

værste) lånetype. På den anden side er låntageres og investorers præferencer, formuer og skatteforhold ikke *helt* ens. Det er netop det, der gør det meningsfuldt at søge den "bedste lånestrategi" for den enkelte låntager.

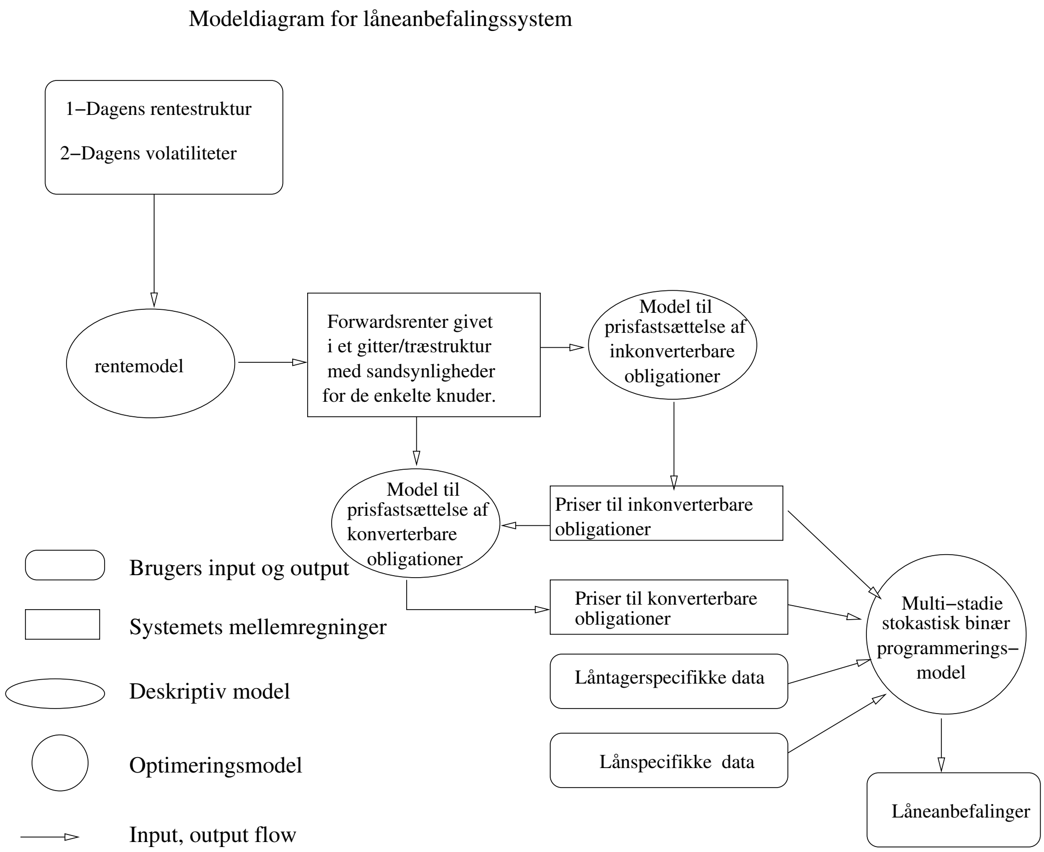
- Strategierne i Tabel 1 er statiske. Men låneporteføljer kan justeres dynamisk:
  - Hvis renten falder, kan det være optimalt at udnytte konverteringsretten i det traditionelle lån.
  - Hvis den korte rente stiger, kan det være bedst at skifte til et fastforrentet lån, også selvom man ikke kan låne til "sidste års renter".
- De forskellige scenarier er næppe lige sandsynlige.

En nuanceret og personlig rådgivning bør indeholde følgende elementer:

- En rentescenariemodel som er konsistent med det øvrige finansmarked.
- En dynamisk strategi til justeringen af låneporteføljen undervejs.
- Konkrete forslag til lånestrategier, der passer den enkelte låntagers forhold bedst muligt iht. kriterier, han meningsfuldt kan (og derfor skal) forholde sig til.

Finansiering af boligkøb er altså et dynamisk optimalt portføjlevalgsproblem. I litteraturen har man tidligere fokuseret meget på låntagers rationelle(?) udnyttelse af den amerikanske konverteringsoption eller på investorsiden (empiriske prepaymentmodeller), men de seneste år er der dukket en del artikler op, der anlægger en optimal porteføjlevalgssynsvinkel. To af disse er Cambell & Cocco (2003) og Hempert, de Jong & Driessen (2005), der angriber problemet med den siden Merton klassiske dynamisk optimerings-vinkel, som over de seneste ti år har gennemgået en udvikling der gør, at man nu kan finde løsninger til overraskende komplicerede problemer.

En anden tilgang — den som resultaterne i det følgende baserer sig på — betragtes i Nielsen & Poulsen (2004) og Rasmussen & Clausen (2004) hvor analysen baserer sig på stokastisk programmering (SP), der er en (række) numeriske løsningsteknik(ker) udviklet i optimerings- og operationsanalyselitteraturen. Den grundlæggende SP–model er beskrevet i appendix A. Metoden kan meget kort beskrives som *sophisticated brute-force*. Den har den fordel, at man relativt nemt kan ændre i/eksperimentere med låntager– eller markedsforudsætninger, samt håndtere (stiafhængige) optionselementer og imperfektioner såsom transaktionsomkostninger og skat.



Figur 1: Et generelt modeldiagram, der viser de forskellige delmodeller og deres respektive input og output.

Brugen af SP inden for porteføljeoptimering er ikke ny. En gennemgang af udvalgte stokastiske programmeringsmodeller inden for finansiel optimering og videre henvisninger til specialiserede artikler/bøger kan læses i Yu, Ji & Wang (2003).

Porteføljeoptimering – eksempler

Foregående afsnit indeholder generelle overvejelser, der er svære at være uenig i, men som det også er svært at se, hvordan man får noget konkret ud af. Det ser vi nu nærmere på.

Vi har udviklet en prototype til et softwaresystem, som følger arkitekturen i Figur 1. Den enkelte låntager skal alene angive data om løbetid, egne budgetbegrænsninger og eventuelle planer om førtidig indfrielse af lånet. Systemet vil herefter finde den billigste låneportefølje, som respekterer låntagers ønsker mht. ydelsesprofil samt likviditets–

og/eller formuerisiko.

Låntagerkriterier

Vi betragter tre forskellige kriteriefunktioner, svarende til forskellige grader af risiko-aversion hos låntager.

Mindste forventede betaling ~ risiko-neutralitet

Låntager er her interesseret i at finde den mindste forventede totale låneomkostning uden hensyntagen til volatiliteten på tværs af scenarierne.[2] Systemet giver den forventede totale betaling, samt standardafvigelsen, den maksimale og den minimale totale betaling, efterfulgt af den lånestrategi der skal følges i form af optagelse af lån og omlægning undervejs.

Denne låntagers strategi fungerer som et naturligt referencepunkt for andre strategier. (Og så er den velegnet til at lave "sanity checks" og fejlfinding i ens model og optimeringsalgoritme med.)

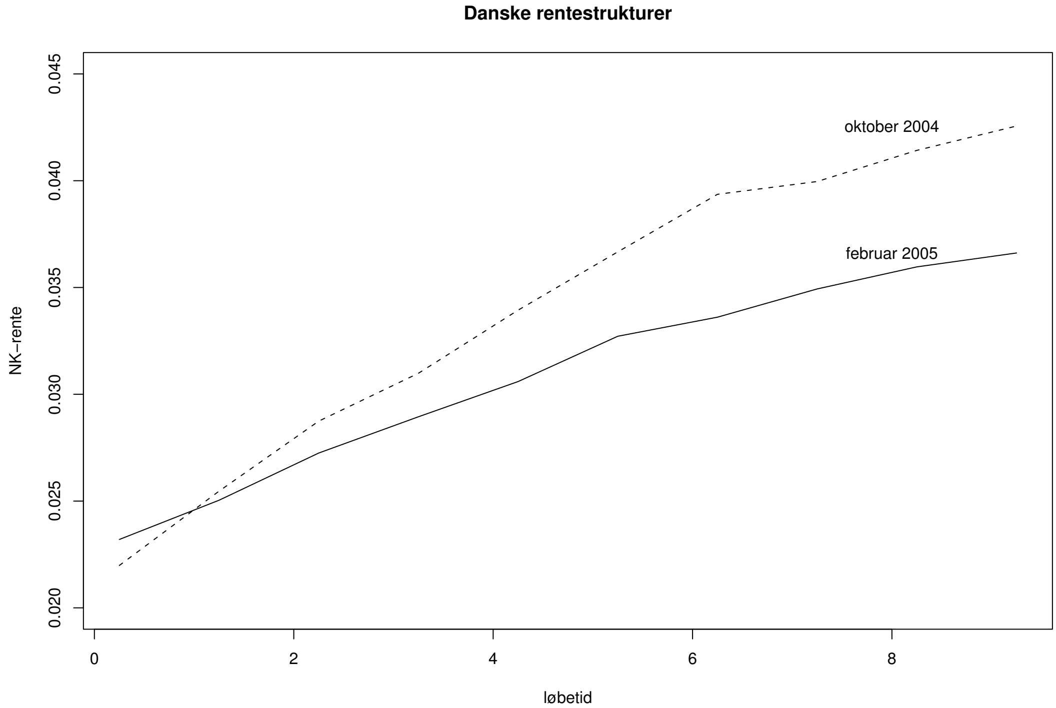
Mindste maksimale betaling ~ ekstrem risiko-aversion

I den anden ende af spektret risiko-aversionsmæssigt, kan vi betragte en låntager, der vil minimere sin "worst case" betaling over alle scenarier. Sådanne min/max kriterier anvendes meget indenfor operationsanalyse, mens der er længere imellem dem i økonomiske/finansielle litteratur. Optimeringsteknisk har denne formulering den fordel, at problemet stadig kan løses med lineære metoder.

Mindste forventede betaling med budgetbegrænsninger ~ risiko-aversion

Den oplagte måde at indføre risiko-aversion, der kan kontrolleres parametrisk, er at udstyre låntageren med en nyttefunktion, for eksempel af formen $u(c) = c^{\gamma}/\gamma$. Det fører (efter ikke-nødvendigvis-oplagte overvejelser fordi det er forbrug, der giver nytte, ikke boligudgifter, der giver det modsatte) til en ikke-lineær kriteriefunktion.

[2] Der kan/bør foretages en diskontering, så man ikke lægger "2005-kroner" og "2035-kroner" sammen, men hvad der er passende kan diskuteres, og i en rådgivningssammenhæng kan ingen diskontering opfattes som konservativt.



Figur 2: Danske nulkuponrentekurver fra oktober 2004 og februar 2005.

Den slags kan godt løses (der er et eksempel i Nielsen & Poulsen (2004)), men det er besværligt og tidskrævende. En måde man kan opnå samme kvalitative opførsel, men bibeholde linearitet af kriteriefunktionen er at se på en risiko-neutral låntager med (strenge) budget/likviditetsbegrænsninger. Det er altså den (nok meget realistiske) låntager, der gerne vil slippe så billigt som muligt, men hvor økonomien ikke kan klare store rentestigninger (siger banken!)

Der er flere forskellige måder at indarbejde sådanne bibetingelser. Man kan lave *Henriette Kjær-konstruktioner*, hvor budgetoverskridelser dækkes ved lån med markante overrenter, men resultaterne i det følgende opnås ved bare at sætte et maksimum for det totale betalingsniveau på 2.300.000. Det svarer i meget runde tal til en smertegænse på 1.500 ekstra om måneden; det skal sammenholdes med en initial mdl. betaling på ca. 7.000 og en mulig stigning med 2.500 for den rene variabelt forrentede strategi.

Lånestrategi	4/obl30	5/obl30	F1	F1/afdragsfri
Risiko-neutral	0	0	2.000	0
Risiko-neutral m/ bdg.beg.	888	0	1.199	0
Min Max	1.198	0	920	0

Tabel 2: Sammensætning af forskellige låntageres (alle med et finansieringsbehov på 2.000.000) initiale optimale porteføljer oktober 2004. Alle tal i 1.000 kr. (hovedstol).

Optimale porteføljer oktober 2004

I det følgende angiver vi hovedresultaterne fra optimeringsmodellen, når vi som scenariegenereringskilde bruger en Vasicek–model kalibreret til markedsinformation oktober 2004, helt specielt rentekurven i Figur 2 .

Startlåneporteføljerne for de tre låntagertyper er angivet i Tabel 2. Den første strategi holder F1-lånet hele vejen, mens de to andre involverer omlægning undervejs. Vi nøjes dog her med at angive startbeslutningen.

Det ser ud, som man kunne forvente. Jo mere risiko-avers låntager er, jo mere skal han bruge fastforrentede lån, og budgetbegrænsninger tvinger låntager til at opføre sig mere forsigtigt. Men der er dog et par interessante ting at bemærke. For det første diversifiserer risiko-averse låntagere deres portefølje. For realkreditinstituttet indikerer det, at der et marked for et blandingsprodukt, fx en variant af de mange garantilån.[3] For det andet har selv meget risiko-averse låntagere en betydelig del variablet forrentet gæld. Det er fordi rentekurven var ret stejl i oktober 2004 (korte renter *betydeligt* under lange).

I Tabel 3 sammenlignes nøgletal fra de tre optimale strategier med tre enkeltlånstrategier uden omlægning undervejs. Vi ser at en strategi baseret på optagelse af fastforrentede obligationslån uden omlægning undervejs er langt fra optimal.

Optimale porteføljer februar 2005 — og en overraskelse

I februar 2005 skulle en af denne artikles forfattere købe bolig. Så ud fra en "put your money where your mouth is"-filosofi gentog vi beregningerne med en ny rentekurve.

[3] Vi forsøger (naturligvis) at regne på dette, men den finansielle sektor er hurtigere, end vi kan følge med til.

Lånestrategi	Forv. totalbetaling	Std. afv.	max	min
Risiko-neutral	2.251	46.	2.356	2.147
Risiko-neutral m/ bdg.beg.	2.277	21	2.300	2.217
Min Max	2.286	9	2.296	2.266
Obl. %4	2.302	73	2.470	2.127
Obl. %5	2.343	57	2.421	2.191
Tilp. F1	2.250	46	2.356	2.148

Tabel 3: Sammenligning af resultaterne for de tre optimale strategier med tre enkeltlånsstrategier. Alle tal i 1.000 kr. (hovedstol).

Som det ses i Figur 2, var de lange renter faldet en del, mens de korte var stort set uændrede.

I Tabel 4 ses de nye optimale initiale porteføljer. Sammenlignes med oktober 2004-resultaterne fra Tabel 2, ser vi først at den risiko-neutrale låntager holder fast i sit variabelt forrentede lån, og idet rentekurven er fladet ud, så har den meget risiko-averse låntager ikke helt så meget incitament til at bruge variabelt forrentede lån. Altsammen forventeligt. Men for den risiko-neutrale låntager med budgetbegrænsninger sker der noget underligt: Faldet i lange renter betyder, at han tager mere variabelt forrentet gæld. Grunden er, at han ikke bruger fast forrentede lån fordi han *har lyst* (han er risiko-neutral "i hjertet"), men fordi han *skal* (budgetbegrænsningen). Når de lange renter falder, så har han mulighed for at tage flere chancer, da det alt andet lige bliver nemmere for ham at "flygte" over til fastforrentede lån, skulle udviklingen gå den gale vej. Tænker man tilbage til økonomiske lærebøgers klassiskes giffengode-eksempel om kød, kartofler og fattige bønder i 1800-tallets Irland, så er de fastforrentede lån hans kartofler; altså noget han kun bruger fordi han skal overleve. En anden måde[4] at forstå, hvad der driver denne effekt er at betragte minimumsformue-modellen fra for eksempel Munk & Sørensen (2001), hvor agenter udstyres med en nyttefunktion af formen $(c - \bar{c})^{\gamma}/\gamma$. I denne model investeres først en andel af ens formue i det riskikofrie aktiv, der sikrer opfyldelse af subsistensniveauet $\bar{c}$, mens den resterende del investeres som i det almindelige tilfælde. Det er let at se, at hvis formuen er lav (budgetbegræsningen er "meget bindende"), så vil en stigning i den risikofrie rente føre til at en mindre andel investeres risikofrit.

[4]Vi er Carsten Sørensen fra CBS tak skyldig for denne forklaring.

Låntager	4/obl30	F1
Risiko-neutral	0	2.000
Risiko-neutral m/ bdg.beg.	577	1.442
Min Max	1.354	690

Tabel 4: Sammensætning (hovedstole i 1000 kr.) af de initiale optimale låneporteføljer februar 2005.

Konklusion og perspektiver

Vi har opstillet en modelramme, hvori låntagers finansieringsproblem kan formuleres og løses, og beskrevet resultaterne fra en prototype implementation.

Fra et akademisk (finansieringsteoretisk eller operationsanalytisk) synspunkt er der mange ting i modellen, man kan undersøge, diskutere og forbedre. Men det er netop fordelen ved at have en model: *Man kan.*

Et realkreditinstitut kan bruge modellen som et analytisk værktøj til rådgivning af kunderne om låneanbefalinger og eventuelle låneomlægninger. Man kan yderligere bruge modellen til at analysere mulighederne for sammensætning af helt nye produkter. Man konstruerer sit hypotetiske produkt, regner sig frem til noget ala Tabel 2, og kan meningsfuldt og uden at "tænke udenfor modellen" svare på om det er "et godt produkt, man har lavet". Der er således vide fremtidsperspektiver i at bruge computerkraft og avancerede matematiske modeller i beslutningsstøtteværktøjer også inden for realkreditsektoren.

Litteratur

Cambell, J. Y. & Cocco, J. F. (2003), 'Household Risk Managenemt and Optimal Mortgage Choice', *Quarterly Journal of Economics* **118**, 1149–1194.

Hempert, O. v., de Jong, F. & Driessen, J. (2005), Dynamic portfolio and mortgage choice for homeowners. Working Paper. University of Amsterdam. Available at `http://www1.fee.uva.nl/fm/PEOPLE/Driessen/Research.htm`.

Jakobsen, S. (2004), 'God skik og afdragsfrie lån', FINANS/INVEST (4), 4–9.

Munk, C. & Sørensen, C. (2001), 'Skal investorer med lang investeringshorisont have større aktieandel?', FINANS/INVEST (7), 10–16.

Nielsen, S. S. & Poulsen, R. (2004), 'A Two–Factor, Stochastic Programming Model of Danish Mortgage–Backed Securities', *Journal of Economic Dynamics and Control* **28**, 1267–1289.

Rasmussen, K. M. (2004), Porteføljeoptimering for danske realkreditlån. Speciale fra IMM, DTU. Tilgængeligt fra `http://www.imm.dtu.dk/pubdb/`.

Rasmussen, K. M. & Clausen, J. (2004), Mortgage Loan Portfolio Optimization Using Multi Stage Stochastic Programming. IMM, DTU.

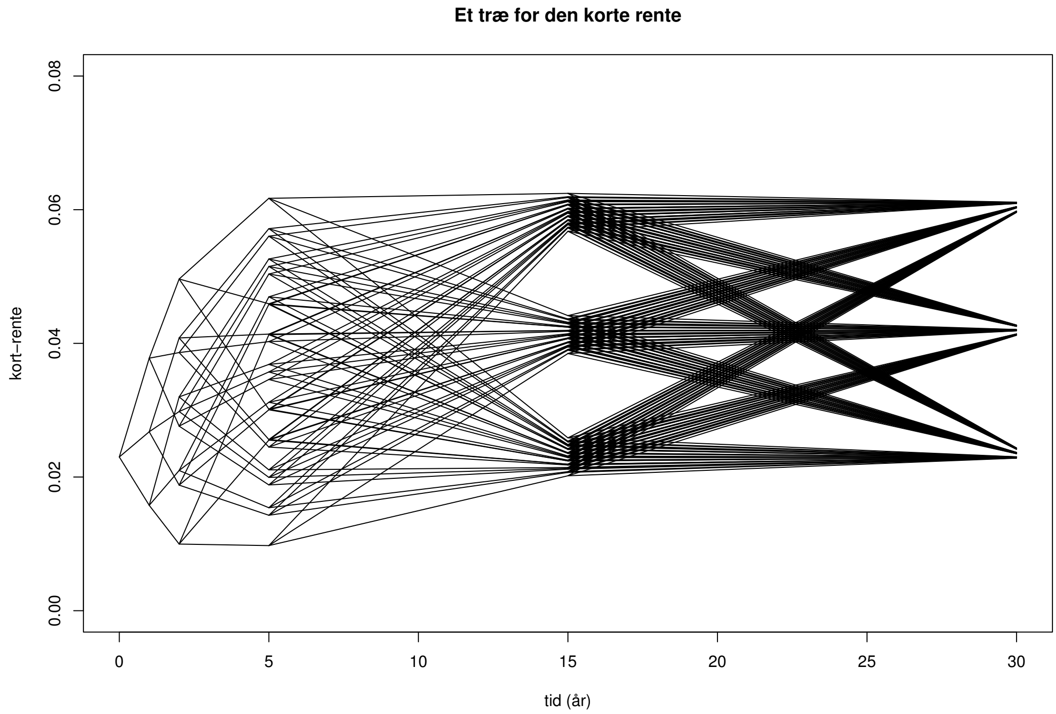
Yu, L.-Y. Y., Ji, X.-D. & Wang, S.-Y. (2003), 'Stochastic programming Models in Financial Optimization: A Survey', *Advanced Modeling and Optimization* **5**.

A Den grundlæggende optimeringsmodel

Man skal først konstuere et scenarietræ, dvs. nogle kunder, information om hvordan de hænger sammen, hvor sandsynlige de er, og hvilke aktiver der kan handles i hver knude, og til hvilke priser. Det er et spørgsmål om et diskretisere sin rentemodel, og få prisfastsat "det nødvendige". Det kunne se ud som i Figur 3.

Optimeringsmodellens parametre er så

p_n: Sandsynligheden for at være i knude n, $\forall n \in \{1, \cdots, 2^N - 1\}$. Knuderne er nummereret entydigt.
τ_n: Diskonteringsfaktor i knude n.
IA: Lånets hovedstol.
r_{in}: Kuponrente for obligation i i knude n.
k_{in}: Kurs for obligation i i knude n.
$Callk_{in}$: Indfrielseskurs for obligation i i knude n. Der gælder: $Callk_{in} = \min\{1, k_{in}\}$ for konverterbare obligationer og $Callk_{in} = k_{in}$ for de inkonverterbare.
γ: Skattefradragsprocent for rentebetalinger.
β: Skattefradragsprocent for bidragsbetalinger.
b: Variabel omlægningsomkostningsprocent.
η: Kurtagesats.



Figur 3: Et scenarietræ baseret på Vasicek-modellen. I hver knude er der et univers af tilgængelige låneprodukter. Tidsdiskretiseringspunkterne ligger ved 0,1,2,5,15 og 30 år. (At disse ikke ligger lige langt fra hinanden, samt Vasicek-modellens stationære langsigtsopførsel giver det sjove grafiske udtryk.)

m: Faste omlægningsomkostninger.

Obligationsspecifikke data (r_{in}, k_{in}, $Callk_{in}$ og p_n) kan findes ved hjælp af rentestruktur– og prisfastsættelsesmodeller; se Nielsen & Poulsen (2004) for detaljer.

Dernæst definerer vi modellens variable:

B_{tn}: Den samlede betaling ved knude n, tid t.

X_{itn}: Restgæld fra obligation i ved knude n, tid t.

S_{itn}: Solgte enheder af obligation i ved knude n, tid t.

P_{itn}: Indfriede enheder af obligation i ved knude n, tid t.

A_{itn}: Afdrag af obligation i ved knude n, tid t.

$$L_{itn} : \begin{cases} 1 & \text{hvis der er faste omkostninger forbundet med salg af obligation } i, \text{ ved knude } n \text{, tid } t. \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Den grundlæggende fler–stadie stokastiske binære model kan nu formuleres som følgende (for overskuelighedens opskriver vi alene det helt risiko-neutrale problem og kun balanceligninger for fastforrentede lån; for udvidelser af modellen henviser vi til Rasmussen & Clausen (2004), Rasmussen (2004)):

$$\min \sum_{tn(t,n)} p_n \cdot \tau_n \cdot B_{tn} \tag{1}$$

$$\sum_i k_{i1} \cdot S_{i01} \geq IA \tag{2}$$

$$X_{i01} = S_{i01} \qquad \forall i \tag{3}$$

$$\sum_{tree(n',n)} \big(X_{i,t-1,n'} - A_{i,t-1,n'} - P_{itn} + S_{itn} - X_{itn}\big) = 0 \quad \forall i, tn(t\backslash 0, n\backslash 1) \tag{4}$$

$$\sum_i (k_{in} \cdot S_{itn}) = \sum_i (Callk_{in} \cdot P_{itn}) \qquad \forall tn(t\backslash 0, n\backslash 1) \tag{5}$$

$$A_{itn} = X_{itn}\Big[\frac{r_{in}}{1-(1+r_{in})^{-N+t}} - r_{in}\Big] \qquad \forall i, tn(t,n) \tag{6}$$

$$B_{tn} = \sum_i \Big(A_{itn} + r_{in} \cdot (1-\gamma)X_{itn} + b \cdot (1-\beta)X_{itn} + \eta \cdot (S_{itn} + P_{itn}) + m \cdot L_{itn}\Big) \qquad \forall tn(t,n) \tag{7}$$

$$BigM \cdot L_{itn} - S_{itn} \geq 0 \qquad \forall i, tn(t,n) \tag{8}$$

$$X_{itn}\ ,\ S_{itn}\ , P_{itn} \geq 0\ ,\ L_{itn} \in \{0,1\} \qquad \forall i, tn(t,n) \tag{9}$$

Målfunktionen i (1) sørger for, at vi minimerer den samlede forventede låneomkostning for hele låneperioden. Betalingen i hver knude er defineret i ligning (7) som summen af afdrag, rentebetalinger efter skattefradrag, bidragsbetalinger efter skattefradrag samt variable og faste omlægningsomkostninger. Afdragene er defineret i ligning (6) ifølge annuitetsprincippet. Modellens dynamik er beskrevet i begrænsningerne (2) til (5). Begrænsning (2) sikrer, at vi udsteder nok obligationer til at dække hovedstolen, IA. I ligning (3) initerer vi restgælden. Ligning (4) er en balanceligning, hvor restgælden i enhver barneknude er lig med restgælden i forælderknuden fratrukket afdrag og eventuelt indfrielsesbeløb plus eventuelt udstedelsesbeløb til etablering af nyt lån. Ligning (5) er en betalingsstrømligning, som sikrer, at de penge der bruges til indfrielse kommer fra nyudstedte obligationer. Endelig tilføjer vi gennem begrænsning (8) de faste omkostninger til enkelte knudebetalinger i tilfælde af omlægninger. Konstanten $BigM$ skal være større end hovedstolen. Vi skal dog være opmærksomme på, at hvis vi anvender en alt for stor værdi af $BigM$, kan der forekomme numeriske problemer under løsning af modellen.

Algebraiske modelleringssprog, såsom GAMS (General Algebraic Modelling Systems) som vi bruger, gør, at man kan formulere sit problem på computeren direkte som det står i ligningerne (1)-(9). GAMS udfører ikke selve optimeringen , men "uddelegerer" det til andre programpakker, for eksempel CPLEX, der er "state of the art" for lineære problemer.

Modellen er uafhængig af det underliggende scenarietræ. Dette er opnået ved at introducere sættet $tn(t, n)$, hvor $n \in \{2^t, \cdots, 2^{t+1} - 1\} \; \forall \; t$. Dette sæt beskriver afhængigheden mellem tidsskridt og de enkelte knuder i modellen. Ligeledes definerer vi sættet $tree(n', n)$ for at beskrive forholdet mellem forældreknuden n' til barneknuden n. Ved brug af sættet $tree(n', n)$ i balanceligningen (4) sørger vi for, at en vilkårlig træstruktur kan anvendes som input, hvilket er praktisk når vi arbejder med reducerede træstrukturer. Og Figur 3 fortæller tydeligt at det er vigtigt; man kan fjerne ganske mange af år 15-30 stierne uden, at der sker noget væsentligt med modellen.