# Hvor meget er det værd at kunne udskyde sine afdrag, som man vil?*

Bjarke Jensen[†] Rolf Poulsen[‡]

## 1 Indledning

For den almindeligt fordrukne og forgældede danske boligejer var 1. oktober 2003 en god dag: Billigere sprut og smøger og afdragsfrie lån.

For seriøse og hårdtarbejdende rente-analytikere var dagen også en festdag; en intellektuel udfordring. Afdragsfrie lån kan nemlig være flere ting, og nogle har ganske komplicerede "ekstra-ekstra" indbyggede låntagerrettigheder, der strækker lovgivningen lige til bristepunktet.

**Historien om (valgfrit) afdragsfrie lån**

Tidligere skulle ydelsesprofilen på danske realkreditlån være aftagende eller konstant[1] over tid. Men i begyndelsen af 2003 blev lovgivningen ændret, således at konstruktionen af afdragsfrie lån muliggjordes. Lånere fik 10 års afdragsfrihed. Et lån, der er afdragsfrit de første 10 år, har noget lavere ydelser i starten end et sædvanligt lån. Det er derfor ikke svært at se, hvorfor sådan et produkt kan virke tiltrækkende på den almindelige (måske endda nybagte) boligejer. Så ethvert realkreditinstitut med respekt for sig selv indførte afdragsfrie lån (nogle med fikse navne som "Pauselån"). På disse lån (fx Nykredits) var de afdragsfrie perioder typisk lagt i starten. Men Realkredit Danmark ville gerne lave et afdragsfrit lån med den ekstra finesse, at låntager ikke fra start skal vælge, hvornår de afdragsfrie perioder skal ligge, men kan gøre dette løbende; til hver termin kan han (hvis man har flere udskud tilbage) sig "Nej, jeg venter". Der var der visse skattelovgivningstekniske problemer med, men i september 2003 gav Østre Landsret grønt lys for disse valgfrit afdragsfrie lån.

En vigtig teknisk detalje i konstruktionen af begge typer afdragsfrie lån er, at de udskudte afdrag "lægges helt ud". Med det menes, at når man udskyder et afdrag, så ændrer det ikke annuitetspro-

*Denne version december 2005. Tak til Anders, Bjarne, Mikkel og Morten

[†]Nordea Markets, København.

[‡]Afdeling for Anvendt Matematik og Statistik, Københavns Universitet, Universitetsparken 5, 2100 København Ø. rolf@math.ku.dk

[1]Alle "underlige ting" (ændring af rente på Flex-lån, op- eller ned-konvertering) der kan ske fordi renter ændrer sig over tid ignoreres.

filen, det gør blot at hovedstolen ikke reduceres. Hvis et bestemt udskudt afdrag skulle betales på et bestemt fremtidigt tidspunkt, så ville det blive noget rigtigt rod; man skulle så for hver enkelt låner holde styr på hele hans udskydelseshistorie (altså “hvilke og hvornår”, ikke bare “hvormange tilbage”).

**Hvad vi gør og hvad vi ikke gør**

Spørgsmålet vi ønsker at besvare skulle fremgå nogenlunde tydeligt af titlen. Svaret går over 3 etaper.

1. Vi illustrerer nogle meget nyttige (men ikke nye) beregningsteknikker. Vi ser, hvordan omskrivninger kan være banale, eller måske endda virke unødigt komplicerende, for traditionelle realkreditlån, men være afgørende for effektiv beregning af priser på valgfrit afdragsfrie lån.

2. Vi bruger teknikkerne til at give et skøn på en rimelig prisforskel på de to typer afdragsfrie lån. Den er ikke stor; 0.10-0.20 for obligationer, hvis kurser ligger midt i 90’erne.

3. Vi demonstrerer nogle interessante/sjove egenskaber ved lånet med frit valg af udskudte afdrag. De viser, at de to indbyggede optioner (tilbagebetalings- og afdragsudskydelsesrettighederne) gensidigt påvirker hinanden, og at det derfor (i teorien, ihvertfald) er vigtigt, at obligationen prisfastsættes som en “samlet pakke”.

Vi siger ikke noget om, om afdragsfrie lån er en god eller dårlig ide, hverken fra den individuelle låners synspunkt (“porteføljevalg med lividitetsaspekter”), fra investors synspunkt (“kan jeg tjene på låntagers irrationalitet/specielle præferencer?”) eller fra et samfundsmæssigt synspunkt (destabilisering af bolig(finansierings)markedet, “insider/outsider”-skævvridning). Altsammen meget interessant, men ikke det ærinde, vi er ude i. (Men vi tror nu nok, at spiritus og cigaretter er noget mere skadelige end afdragsfrie lån.)

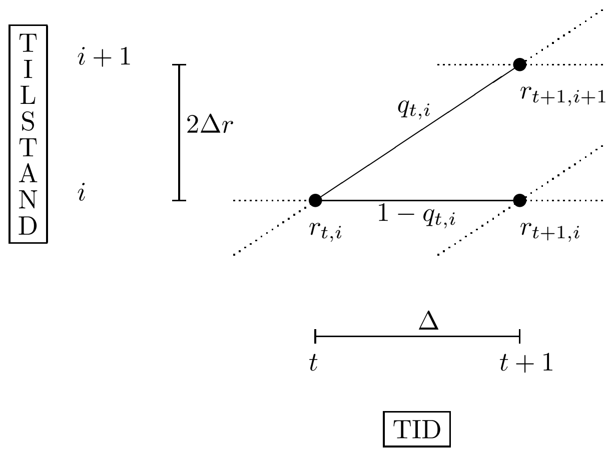
## 2 Prisfastættelse af valgfrit afdragsfrie lån

To ting hjælper os:

- Hovedstolshomogeniet: Hvis værdien af en konverterbar annuitet hovedstol 1, $t$ perioder til udløb og $k$ mulige afdragsudskydelser (“klip”) tilbage er $V$, så er værdien af et ellers tilsvarende lån med hovedstol $H$ ganske enkelt $H \times V$.

- Springbetingelse: Hvis vi udskyder afdrag på et konverterbart lån med $t$ perioder til udløb og $k$ klip tilbage, så har vi , når næste beslutning skal tages, en konverterbar annuitet med $t-1$ perioder til udløb og $k-1$ klip tilbage. Det er her vigtigt at annuitetsprofilen bevares, dvs. at det udskudte afdrag lægges helt ud (og alle fremtidige afdrag derfor ændres en smule).

Disse tricks/ideer er ikke nye, men fortjener at være bedre kendt. I Luenberger (1998, Afsnit 14.5) anvendes homogenitetsideen under navnet *leveling* på en række problemer. Snedig brug af springbetingelser kan man fx finde dem i Dewynne & Wilmott (1999(?)),[2] og er blevet anvendt i mange sammenhænge siden (fx til prisning af såkaldte flexi-caps). Men teknikkerne er stadig såre elegante og nyttige; kapitel 1 i Svenstrup (2003) giver en række anvendelser på moderne renterelaterede produkter. De to nævnte artikler betragter kontinuerttidsmodeller, og formuleringerne er derfor i form af partielle differentialligninger. Vi går mere stilfærdigt tilværks og betragter en diskret[3] kortrentemodel, som beskrevet fx i kaptitel 8 i Lando & Poulsen (2002). Modellen specificeres direkte under et ækvivalent martingalmål, altså det risiko-neutrale sandsynlighedsmål. Nogle gange, specielt når der inddrages portføljevalgsaspekter med begrænsede muligheder for dynamiske justeringer, kan dette skjule vigtige aspekter, men her ser vi udelukkende på et (mestendels relativt, endda) prisfastsættelsesaspekt, så tilgangsvinklen er ganske rimelig.
Lokalt, dvs. omkring en eller anden knude i træet, ser modellen sådan ud:




For et aktiv af europæisk type beregnes den arbitragefri pris på tid $t$ i tilstand $i$[4] ud fra formlen

$$\pi^e_{t,i} = \frac{1}{1+r_{t,i}} \mathbf{E}^Q_{t,i}(\pi^e_{t+1} + \delta_{t+1}) = \frac{1}{1+r_{t,i}} \left( q_{t,i}(\pi^e_{t+1,i+1} + \delta_{t+1,i+1}) + (1-q_{t,i})(\pi^e_{t+1,i} + \delta_{t+1,i}) \right),$$

hvor $\delta_{t+1}$ angiver aktivets dividendebetaling på tid $t+1$. For en inkonverterbar obligation er $\delta_{t+1}$ bare tid-$(t+1)$ ydelsen, men generelt kan $\delta$ være en stokastisk proces.
En amerikansk option er karakteriseret ved sin pay-off funktion $g$ og sit underliggende aktiv, lad os

[2] D'herrer forsøger tilsyneladende at gøre dette manuskript så besværligt som muligt at referere. Titlen er "Untitled", det "unpublished", der er ikke angivelse af tid og sted, og nogle .pdf-fil'er, der er tilgængelige via nettet er lettere defekte!

[3] Bi/tri-nomial modeller kan betragtes som eksplicitte endelige differensmetoder for PDE'er.

[4] Om notationen: Objekter med 2 fodtegn er "tal, der står i en bestemt knude", et objekt med 1 fodtegn opfattes som en stokastisk variabel (så når vi skriver en ligning op, så dækker det over en hel hoben ligninger; en for hvert $i$), og objekter med 0 fodtegn er stokastiske processer (så vi kan skrive endnu flere ligninger endnu mere kompakt).

kalde dettes prisproces $\pi^U$. Ejeren af optionen modtager $g(\pi^U(\tau))$ på det stokastiske tidpunkt $\tau$, hvor han vælger at exercise den. (Teknisk set skal $\tau$ være en *stoptid*. Det betyder, at man ikke kan basere sin exercise-regel på information, der først bliver tilgængelig i fremtiden, hvilket da også er de færreste forundt!) For en amerikansk put-option på en aktie modtager man altså $(K - S(\tau))^+$, når man exerciser. Amerikanske optioners arbitragefri priser bestemmes ud fra rekursionsligningen

$$\pi^a_{t,i} = \max\left(g(\pi^U_{t,i}), \frac{1}{1+r_{t,i}}\mathbf{E}^Q_{t,i}(\pi^a_{t+1})\right) = \max\left(g(\pi^U_{t,i}), \frac{1}{1+r_{t,i}}\left(q_{t,i}\pi^a_{t+1,i+1} + (1-q_{t,i})\pi^a_{t+1,i}\right)\right),$$

med begyndelsesbetingelsen $\pi^a_T = g(\pi^U_T)$. (Teknisk set er $\pi^a_t$ prisen på optionen *givet* den ikke tidligere er blevet exerciset.) Så også amerikanske optioners priser kan prises ved, at man trævler sig baglæns gennem sit binomialgitter; kan man ikke lige kan se det, så kan Lando (2000) anbefales. Denne prisningsalgoritme er også velkendt,[5] faktisk så velkendt at man kan glemme, den er overraskende simpel! Et formelt bevis (dvs. en detaljeret redegørelse for, at enhver anden pris vil kreere en arbitragemulighed) kan man finde i afsnit 4.3 i Pliska (1997) eller kapitel 2 i Lamberton & Lapeyre (1996).

## Det traditionelle realkreditlån

Traditionelle realkreditlån er konverterbare, hvilket betyder at låntager har ret til på et hvilketsomhelst tidspunkt, $\tau$, han ønsker, at slippe ud af sine gældsforpligtelser ved at betale den resterende hovedstol $H_\tau$ tilbage. Dette kan opfattes som om låntager ejer en amerikansk call-option med det inkonverterbare lån, kald dettes pris $\pi^{IK}$, som underliggende, og en tidsvarierende strike-pris på $H_t$.

Under alle omstændigheder fortæller ovenstående at call-prisen er:

$$\pi^{AC}_t = \max\left(\pi^{IK}_t - H_t, \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}^Q_t(\pi^{AC}_{t+1})\right).$$

For investor svarer det konverterbare realkreditlån til en lang position i den inkonverterbare obligation kombineret med en kort position i den amerikanske call. Derfor er $\pi^K = \pi^{IK} - \pi^{AC}$, og

$$\begin{aligned}
\pi^K_t &= \pi^{IK}_t - \max\left(\pi^{IK}_t - H_t, \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}^Q_t(\pi^{AC}_{t+1})\right) \\
&= -\max\left(-H_t, \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}^Q_t(\pi^{AC}_{t+1} - (1+r_t)\pi^{IK}_t)\right) \\
&= -\max\left(-H_t, \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}^Q_t(\pi^{AC}_{t+1} - \pi^{IK}_{t+1} - \delta_{t+1})\right) \\
&= -\max\left(-H_t, -\frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}^Q_t(\pi^K_{t+1} + \delta_{t+1})\right) \\
&= \min\left(H_t, \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}^Q_t(\pi^K_{t+1} + \delta_{t+1})\right),
\end{aligned}$$

[5] En tilstrækkelig betingelse for for, at kunne betegne noget som "velkendt", er at "det står i Hull", altså Hull (2002). Er man i dårligt humør, kan man jamre over, hvor tæt betingelsen er på også at være nødvendig.

hvor det 3. lighedstegn bruger at $\pi_t^{IK} = \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}_t^Q(\pi_{t+1}^{IK} + \delta_{t+1})$, det 4. udnytter at $\pi_{t+1}^K = \pi_{t+1}^{IK} - \pi_{t+1}^{AC}$, og det 5. blot at $-\max(-x,-y) = \min(x,y)$. Læg mærke til, at $\pi_t$ angiver prisen eks-dividende og det er derfor underforstået at $H_t$ er hovedstolen efter tid-$t$ afdraget. Ganske som man ville tro, så minimerer optimal låntageropførsel altså værdien af obligationsejerens (dvs. udlånerens) betalingsrække.

Det viser sig senere praktisk at arbejde med værdier inklusive dividende (*cum-coupon*). Disse betegner vi med $V$, dvs.

$$V_t = \pi_t + \delta_t.$$

Ligeledes får vi også brug for at kunne arbejde med sidste periodes hovedstol (der også kan opfattes som hovedstolen umiddelbart før tid-$t$ afdraget), der er bestemt ved (bogholderi)ligningen

$$H_t + a_t = H_{t-1},$$

hvor $a_t$ er tid-$t$ afdraget. For traditionelle realkreditlån er det ikke nødvendigt eksplicit at kunne skelne: Tillader vi konvertering lige før vi betaler afdrag skal vi betale $H_{t-1} \times (1+c)$, hvor $c$ er kuponrenten; ved konvertering lige efter, skal vi betale $H_{t-1} \times c + a_t + H_t = H_{t-1} \times (1+c)$; altså det samme. For de valgfrit afdragsfrie lån udøver vi derimod en ikke-triviel påvirkning gennem vores udskyd-eller-ej-beslutning.

For et annuitetslån med udløb på tidspunkt $T$, kuponrente $c$ og "gammel" (dvs. tid-$(t-1)$ eller "før afdrag") hovedstol $H_{t-1}$ er ydelsen på tid $t$ givet ved annuitetsformlen[6]

$$y = H_{t-1}\frac{(1+c)^{T-(t-1)}c}{(1+c)^{(T-(t-1))}-1}.$$

Rentebetalingen er $c \times H_{t-1}$ og afdraget $a_t = y - c \times H_{t-1}$. Vi har derfor

$$\begin{aligned} V_t^K[H_{t-1}] &= \min\left(H_t + y, y + \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}_t^Q(V_{t+1}^K[H_t])\right) \\ &= \min\left((1+c)H_{t-1}, y + \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}_t^Q(V_{t+1}^K[(1+c)H_{t-1} - y])\right), \end{aligned}$$

idet vi har notationsmæssigt (via $[\cdot]$) har indikeret afhængigheden af hovedstolen, og flittigt har brugt bogholderiligningerne, der knytter afdrag, rentebetaling, ydelse og hovedstol sammen.

Og nu den sidste observation: Dersom vi ændrer hovedstolen for en given annuitet, så skalerer det bare betalingsrækken, og da vores prisningsregel er lineær, ligeledes værdien af betalingsrækken; homogenitet (af grad 1) med andre ord:

$$V^K[x] = x \times V^K[1].$$

[6]Det er den helt almindelige (kun visse Microsoft-programmer har andre konventioner) annuitetsformel, svarende til at "første ydelse falder om 1 periode"; derfor skal der stå "$t-1$" rundt omkring.

Derfor har vi

$$
\begin{aligned}
V_t^K[1] &= \min\left(1+c, y + \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}_t^Q(V_{t+1}^K[1+c-y])\right) \\
&= \min\left(1+c, y_t + \frac{1+c-y_t}{1+r_t}\mathbf{E}_t^Q(V_{t+1}^K[1])\right),
\end{aligned}
$$

hvor vi har indført notationen $y_t = \frac{(1+c)^{T-(t-1)}c}{(1+c)^{(T-(t-1))}-1}$; hvor $y$ før afhang af hovedstolen (men vi ikke kunne bære at gøre dette notationsmæssigt eksplicit), så afhænger $y_t$ kun af tiden til udløb (samt naturligvis kuponrenten).

Vi kan altså arbejde med et gitter, hvor vi priser en annuitet, der altid har (før-afdrag) hovedstol 1 og varierende tid til udløb. Det kan virke som en banal og omstændelig omskrivning af den umiddelbare prisningsalgoritme (se Lando (2000)). Men det vil straks vise sig overmåde praktisk, når vi går over til at kigge på:

**Realkreditlånet med valgfri afdragsudskydelse** (VA-lånet)

Lad os indføre notationen $V_t^k$ for tid-$t$ værdien (tid-$t$ pris + cash-flows) for en hovedstol-1 annuitet, hvor vi (før vi beslutter os til, hvad vi gør med tid-$t$ afdraget) har $k$ mulige afdragsydskydelser, kaldet "klip" i det følgende, tilbage. Ovenfor har vi altså fundet en metode til beregning af $V^0$.

På en terminsdato, $t$, kan der nu ske en 3. ting: Låntageren kan vælge at udskyde sit afdrag. I så fald modtager obligationsejeren kun kuponen $c$, men er tilgengæld den lykkelige ejer af et annuitetslån, der

- har 1 periode mindre til udløb
- stadig har hovedstol 1
- nu kun har $(k-1)$ klip tilbage

Dersom låntageren ikke udskyder sit afdrag, så vil obligationsejeren tilsvarende eje en 1-periode-kortere annuitet med en hovedstol $1+c-y_t$, hvor der stadig er $k$ klip tilbage.

Den arbitragefri værdi af betalingsrækken fremkommer igen ved at låntager opfører sig, så værdien af obligationsejernes betalingsrække minimeres, og derfor giver hovedstolshomogenitet igen at:

$$
V_t^k = \min\left(1+c, y_t + \frac{1+c-y_t}{1+r_t}\mathbf{E}_t^Q(V_{t+1}^k), c + \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}_t^Q(V_{t+1}^{k-1})\right).
$$

Og det er just det snedige fra et beregningsmæssigt synspunkt: Når vi er kommet til klip $k$, så kan de (to) mulige fremtidige $V_{t+1}^{k-1}$-værdier aflæses fra allerede beregnede "$k-1$"-gitter. $V_{t+1}^k$ kendes som altid fra det gitter i er igang med (1 tidsskidt længere fremme). Så for at prise annuiteten med $k$ valgfrie afdragsudskydelser, skal man altså bare[7] arbejde sig igennem $k+1$ binomialgitre, og huske

[7] Beregningsmæssigt er det generelt meget nemmere/hurtigere at løse $N$ 1-dimensionale problemer end 1 $N$-dimensionalt problem. Fx hvis "problem" betyder "lineær ligning" og "dimension" antal ligninger og ukendte, så er beregningkompleksiteten $O(N)$ imod $O(N^3)$.

at gemme det forrige.

Dette er et eksempel på en såkaldt springbetingelse (*jump condition*). Vores tilfælde er specielt simpelt fordi afhængigheden kun virker en vej (($k-1$)-beregningen bruger slet ikke $k$-gitteret), men er man fiks på fingerene (og ferm på indeksene) kan man fange mange interessante ting på denne måde.

**<u>Variationer</u>**

Ovenstående beskriver "hjertet" i prisningsalgoritmen. Man skal lige sørge for at starte og slutte den rigtigt.

Tid $T$: $V_{T,i}^k = 1 + c$ for alle $i$ og $k$.

Tid 0: Der er ingen rentebetalinger her og afdraget er også 0, så der er ingen ide i at udskyde. Derfor

$$\pi_0^k = V_0^k = \min\left(1, \frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}_t^Q(V_1^k)\right).$$

Dersom man har lyst (da det kan spare specialtilfælde i koden) kan man godt inkludere et $\frac{1}{1+r_t}\mathbf{E}_t^Q(V_1^{k-1})$ i sin "min"-operator; det spiller ingen rolle da $V^k \leq V^{k-1}$.

Desuden kan simplere produkter ("kun konverterbare", afdragsfrit med fast udskydelse de første 10 år, inkonverterbare og de lidt mere tænkte "inkonverterbart (valgfrit) afdragsfrit") nemt prisfastsættes ved mindre variationer (restriktioner) af "konverterbart valgfrit afdragsfrit lån"-algoritmen.

# 3 Et taleksempel

**<u>Model</u>**

Vi bruger en diskretiseret udgave af Vasicek-modellen med parametrene

$$\theta = 0.06, \quad \kappa = 0.25, \quad \sigma = 0.01.$$

Disse opfattes som parametre under et ækvivalent martingalmål; i den risko-neutrale verden mao. (Det er $\theta$, der påvirkes af fornuftige målskift.) Vasicek-modellen *er* simpel, men alligevel nogenlunde realistisk. Den er behagelig at regne i, og så begynder den ikke lige pludselig at gøre underlige ting (fx i sin langsigtsopførsel); det ku' nogle modeller godt lære af!

Tiden snittes i stykker af længde $\Delta$, og som i Jensen & Poulsen (2002) laves der en binomialmodel, hvor $r$ hopper op og ned i spring af størrelsen

$$\Delta r = \sqrt{\Delta}\sigma,$$

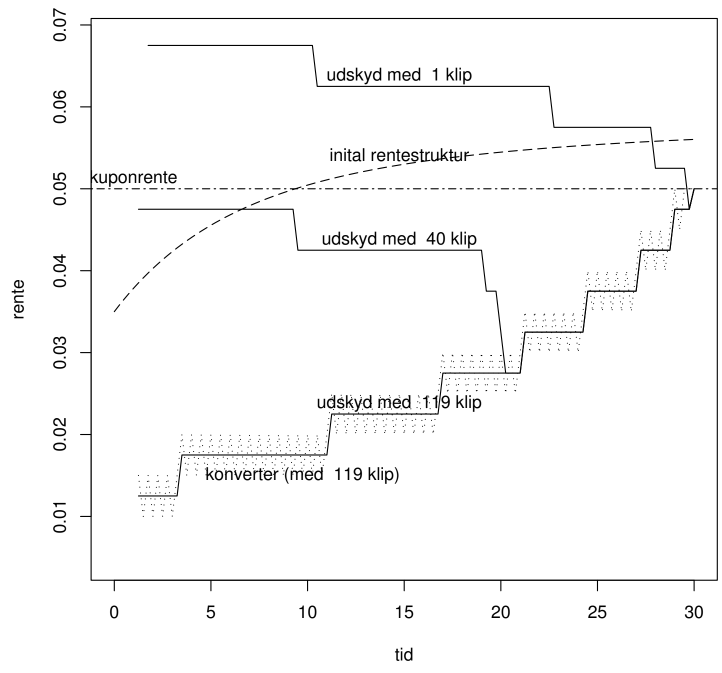
således at et "op"-spring sker med sandsynlighed

$$q(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\frac{\kappa(\theta - r)}{\sigma},$$

hvor der dog trunkeres ved hhv. 0.01 og 0.99. Læg mærke til, at springstørrelserne ikke er tilstands-afhængige, hvorved den diskrete model umiddelbart bliver rekombinerende. De niveau-afhængige sandsynligheder bruges til at fange modellens mean-reversion, idet lave renter, $r < \theta$, gør op-spring mere sandsynlige.

Et naturligt valg af tidsskridt er $\Delta = 1/4$, svarende til termin hver 3. måned. Man skal bemærke, at parametrene er givet in "pro anno" termer; det betyder at man ved kodning af algoritmerne fra foregående afsnit skal lave substitutionerne "$r \rightsquigarrow \Delta \times r$" og "$c \rightsquigarrow \Delta \times c$" på passende steder. Man kan også sagtens bruge mindre tidsskridt end $\Delta = 1/4$; herved bliver den diskrete model en bedre approksimation af Vasicek-modellen, men koden bliver mere rodet. Det ændrer ikke væsentligt på resultaterne i det følgende.

**En hel masse information stoppet ind i 1 graf**




Figur 1: Kritiske rande for afdragsudskydelse og konvertering.

Figur 1 viser følgende:

- "Streg"-kurve(- - -) : Initial rentestruktur. Nogenlunde realistisk; den initiale rente er godt nok noget høj, men tilgenæld rammer modellen sådan ca. de almindelige realkreditlåns priser.

- "Prik/Streg"-kurve (.-.-.-): Kuponrenten.

- "Prik"-kurve (dvs. zig/zag-kurverne): Kritisk rand for konvertering. Hvis den korte rente falder under denne, så tilbagebetales den resterende hovedstol. Punkterne ville i en kontinuert verden ligge på en glat, monoton, konveks kurve, men da vi arbejder med en diskret(iseret) model, så er der "lige/ulige" takker i kurven. (Helt præcist er det "119 mulige udskydelser" randen, der er tegnet. Som det senere vil fremgå, så er det en ikke helt uvæsentlig oplysning.)
- Fuldt optrukne kurver: Kritiske rande for afdragsudskydelse. Randene er tegnet for hhv. 1, 40 og 119 mulige udskydelser. Hvis renten kommer over denne rand, så skal man udskyde sit afdrag. For grafikkens skyld er disse rande blevet glattet ud; ellers ville de være takkede som konverteringsranden.

Den umiddelbare argumentation for at udskyde er, at markedsrenten er større end kuponrenten, fordi så får man mere ud af at placere sit udskudte afdrag på markedet, end man skal betale i rente på sin ekstra hovedstol på lånet (der jo forrentes med kuponrenten). Men der er to modsat rettede optionseffekter i spil, så billedet er mere kompliceret end som så:

- Ved at udskyde mister man muligheder for at gøre det i fremtiden (hvor renten måske er *endnu* højere).
- Ved at udskyde øger man værdien af sin konverteringsrettighed (det er hele hovedstolen man kan betale tilbage); man holder flere optioner i live.

Af figuren ser man, at begge effekter kan dominere. Den kritiske udskydelsesrand kan ligge såvel over som under kuponrenten. Hvis man kan udskyde så meget man lyster, så er udskydelsesranden og konverteringsranden sammenfaldende. Man vil med andre ord altid enten konvertere eller udskyde sit afdrag, man vil aldrig bare betale "almindeligt". Det er fordi i dette tilfælde svarer et almindeligt afdrag fuldstændig til at man konverterer en del af sit lån, men hvis det ikke er optimalt at konvertere hele lånet, så er det tydeligvis heller ikke optimalt at konvertere en del af det, og man udskyder derfor. Hvis man derimod har (væsentligt) færre klip, end der er terminer, så dominerer opportunitetstabet ved udskydelse for "midtimellem" renteniveauer, og alle tre muligheder ("konverter", "hold", "udskyd") kommer i spil. Dersom man kun har "1 skud i bøssen", så skal markedsrenten endda ganske meget over kuponrenten for udskydelse er optimalt.

**Priser**

Man kan se fra Figur 1 at i det betragtede markedsscenarie, så er det *ikke* optimalt at udskyde klip med det samme, dersom man laver et annuitetslån, hvor man kan udskyde 40 afdrag, som man vil. Men fra figuren er det svært at vurdere præcis *hvor* inoptimalt det er, hvis man eksempelvis vælger at placere sine 40 "klip" i de første 40 terminer. "Eksemplet" er naturligvis ikke spor tilfældigt valgt, for det afspejler hvad Nykredits udskydelseslån automatisk gør, og hvad man kan formode, at mange låntagere med valgfrit afdragsfrie lån vil gøre af likviditetsårsager. Så vi har regnet tid-0 priserne på tre forskellige typer annuitetslån ud (40 klip, $r_0 = 0.035$, kuponrente = 0.05):

- Det traditionelle realkreditlån: $\pi_0^K = 96.793$ (Så nogenlunde = observeret markedskurs.)
- Afdragsfrit lån: $\pi_0^{K,A} = 95.802$; $\pi_0^K - \pi_0^{K,A} = 1.160$
- Valgfrit afdragsfrit lån: $\pi_0^{K,VA} = 95.633$ ; $\pi_0^{K,A} - \pi_0^{K,VA} = 0.168$

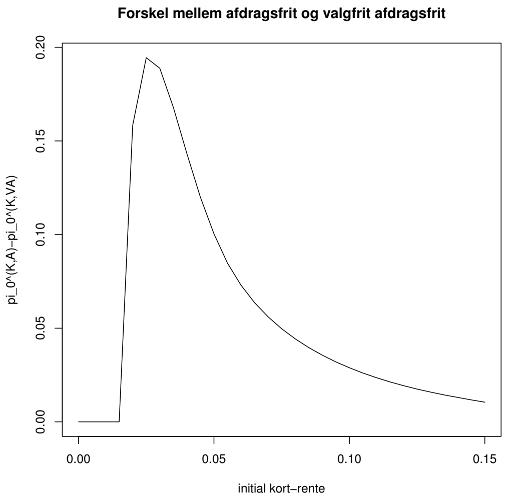
Pr. konstruktion er $\pi_0^{K,VA} \leq \pi_0^{IK}$ og $\pi_0^{K,VA} \leq \pi_0^{K,A}$ ("ellers har man kodet galt"), og medmindre man ser på perverse markedsscenarier, så er også $\pi_0^{K,A} \leq \pi_0^{IK}$.

Man kan bemærke, at de teoretiske kursforskelle på traditionelle og de afdragsfrie lån ligger på godt 1 kurspoint, hvilket er noget lavere en det observeres på markedet, hvor forskellen (for 5%-lånene) er pt ca. 2 kurspoint.

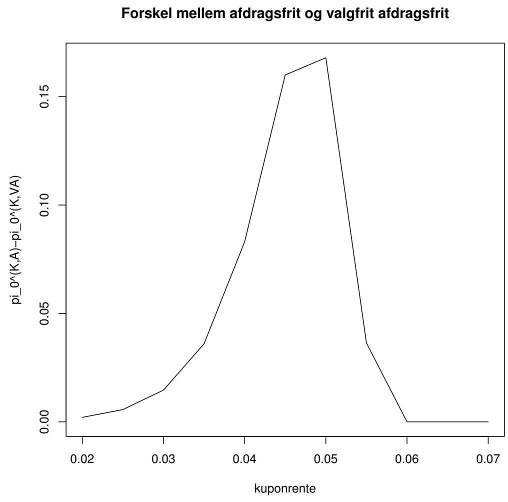
Dette eksempel er noget nær den maksimale forskel på A- og VA-lån, vi kan lave i realistiske modeller. En lav initial rente vil øge forskellen, men på den anden siden skal den heller ikke være *for* lav, for så dominerer konverteringseffekten, og alle obligationer har kurser tæt ved 100. Det ses tydeligt i Figur 2. Her holdes alt fast ved tidligere værdier, pånær den initiale rente, der varieres mellem 2% og 15%. Det betyder at den initiale rentestruktur varierer fra "stejl normal" over "flad" til "stejl invers". Grafen viser forskellen mellem kurserne på afdragsfrie og valgfrit afdragsfrie lån.

Figur 3 viser hvad der sker for forskellige kuponrenter; ikke overraskende er det stort set[8] et spejlbillede af analysen med $r_0$-variation.

[8] Det er ikke et fuldstændigt spejlbillede fordi $r_0$-variation både flytter og stejler/falder rentekurven.



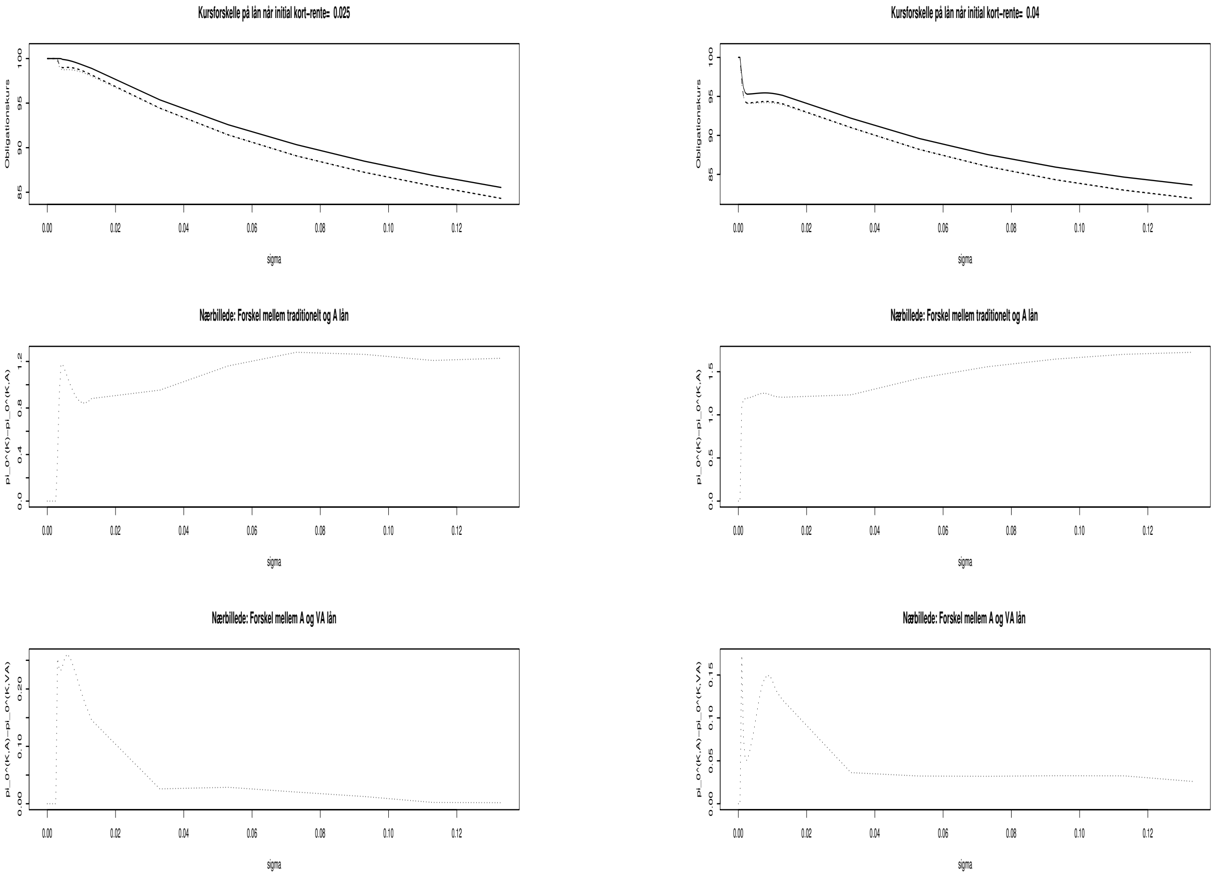

Figur 2: Forskel mellem kurser på afdragsfrie og valgfrit afdragsfrie lån for forskellige initiale kort-rente niveauer.




Figur 3: Forskel mellem kurser på afdragsfrie og valgfrit afdragsfrie lån for forskellige kuponrenter.

**Volatilitetsfølsomhed**

Nedenstående grafer viser hvordan priserne afhænger af (kort)rentevolatiliteten $\sigma$ (for to forskellige initiale korte renter).




Vi ser flere ting. For det første giver højere volatilitet en øget værdi af de indbyggede optioner for alle obligationstyper, og derfor lavere priser.

Hvis volatiliteten er meget lav, så er prisforskellene 0: Den initiale rente er lavere end kuponrenten, der igen er lavere end langsigtsrenteniveauet $\theta$, så "det bli'r aldrig bedre end nu at konvertere", og alle kurser er derfor 100, da der konverteres straks.

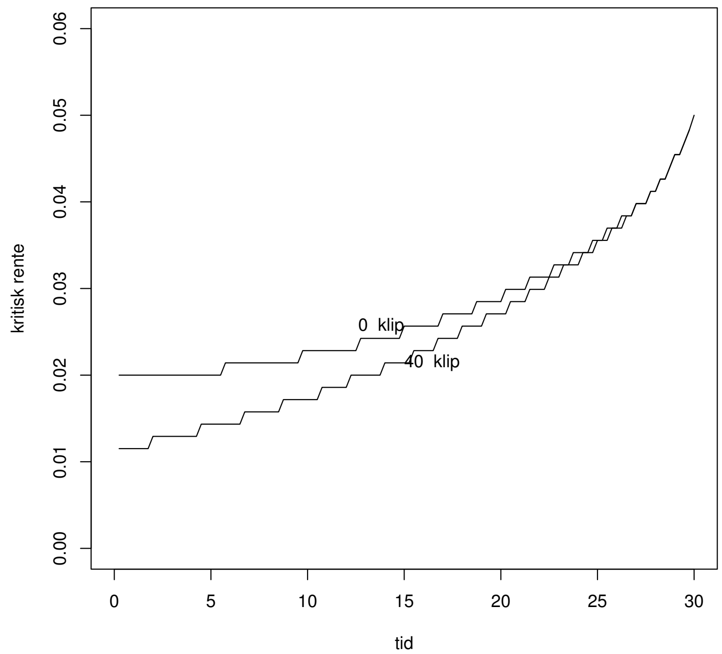
Men derudover er forskellen mellem det traditionelle realkreditlån og det valgfrit afdragsfrie lån meget stabil; et stort $\sigma$-område giver næsten samme prisforskel.

Vi ser at valgfriheden af afdragsfriheden (altså VA kontra A) aldrig giver anledning til dramatiske forskelle; men der er forskellige effekter i spil. Når volatiliteten går fra "lav"til "middel", så stiger forskellen mellem afdragsfrie og valgfritafdragsfrie lån. Det er ikke overraskende, al den stund VA-lånet har "mere optionalitet", som stigende volatilitet alt andet lige vil gøre mere værdifuld. Men når volatiliten stiger yderligere fra "middel"til "høj", så aftager forskellen igen. Det virker umiddelbart underligt. Forklaringen er, at når volatiliten er høj, så er konverteringsoptioner så meget værd (de er allerede noget in-the-money), at det bedst kan betale sig at holde flere af dem i live ved at udskyde afdrag. Den optimale strategi for VA-lånet er altså mage til A-lånet, og priserne er derfor nogenlunde ens. Vi ser her sammenhængen mellem de indbyggede rettigheder. Anvendelse af udskydelsesoptionerne påvirker hvor mange konverteringoptioner, vi har, og der er en et "negativt feed-back" fra konvertering, idet det udskydelsesoptionerne så bliver "slået ihjel". Hvis man alligevel (sandsynligvis) skal konvertere snart, så er det bare med at få brugt udskydelsesoptionerne. Der et derfor vigtigt at de to optioner prises samlet; man bør ikke gøre det seperat.

Man skal bemærke at ændringer i volatiliteten, $\sigma$, også ændrer den initiale rentestruktur, og da vi arbejder med en diskretiseret model, så påvirkes også selve rentegitteret. Man kan derfor finde en anden type volatilitetsfølsomhed (*key volatility sensitivity*) ved at ændre $\sigma$, men samtidig justere/rekalibrere sine øvrige parametre så den intiale rentekurve (ca.) fastholdes. Eller ændre den lange volatilitet (via $\kappa$), mens den korte volatilitet og evt. rentestrukturen holdes fast. Eller ... Her betyder det ikke meget, og man kan diskutere (længe!), hvad der giver mest mening. Man skal bare være klar over, at i en 1-faktor-model kan man ikke skrue på ret meget uden det har effekter andre steder i modellen; også steder, hvor man egl. ville holde tingene fast.

En sjov effekt, der også illustrerer, at de to optioner i VA-lånet hænger sammen, ses ved at undersøge, hvordan muligheden for at udskyde afdrag påvirker den optimale konverteringsstrategi. Som Figur 4 viser,[9] ligger den kritiske konverteringsrand for et 40-klipslån ligger betydeligt under den tilsvarende rand for det traditionelle 0-klipslån; ca. 100 basispunkter på optagelsestidspunktet. (Det er sammenligninger tidligt i forløbet, der er mest relevante; efter 10 år har man næppe et 40-klipslån.) Muligheden for at udskyde afdrag, og dermed holde sine konverteringssoptioner i live, gør at man kan have mere "is i maven" mht. konvertering.

[9] For at lave den figur er skridtstørrelsen i den diskretiserede Vasicek-model sat noget ned (100 skridt pr. år).




Figur 4: Kritisk rand for konvertering for hhv. et det traditionelle lån (øverst) og det valgfrit afdragsfrie (med 40 klip).

**Seperat prisning**

De (valgfrit) afdragsfrie konverterbare lån har to værdifulde egenskaber, der som vi har set hænger sammen. Men det er naturligt at spørge, hvor galt det går, hvis man prisfastsætter dem seperat. En anden, mere positivt klingende, måde at udlægge seperat prisning, er at sige at man benytter en ekstrapolationsteknik.[10]

Ialt kan man forestille sig 6 forskellige kombinationer af konverteringsrettighed og afdrag; tabellen nedenfor giver priser (for $r_0 = 0.035$, kupon på 5% og ellers vore sædvanlige parametre):

| | Traditionelle afdrag | Afdragsfrit i starten | Valgfrit afdragsfrit |
|---|---|---|---|
| Inkonverterbart | $\pi_0^{IK} = 97.252$ | $\pi_0^{IK,A} = 96.254$ | $\pi_0^{IK,VA} = 95.932$ |
| Konverterbart | $\pi_0^{K} = 96.793$ | $\pi_0^{K,A} = 95.802$ | $\pi_0^{K,VA} = 95.633$ |

Det første man bemærker er, at for de (ganske viste noget tænkte) lån *med* afdragsfrihed men *uden* konverteringsret er værdien af at kunne placere sine afdrag som man vil i stedet ffor bare i

[10]Med ekstrapolation forsøger man at udtale sig om vanskeligt beregnelige ting ud fra mere simple. Det er ofte ganske nyttigt.

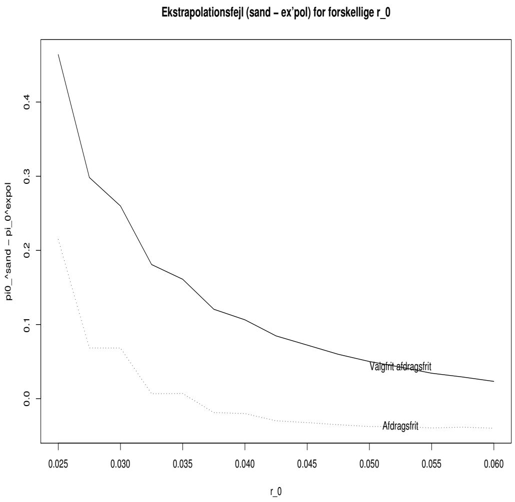
starten større end værdien af udskydelsesoptionaliteten for konverterbare lån ($\pi_0^{IK,A} - \pi_0^{IK,VA} = 0.322 > 0.168 = \pi_0^{K,A} - \pi_0^{K,VA}$). Det er fordi konverteringsrettigheden gør afdragsudskydelser mere attraktive, og den optimale strategi derfor er at udskyde hurtigt,altså netop hvad A-lånet automatisk gør.
Inspireret af Taylor-udviklinger er det naturligt at betragte approksimationen/ekstrapolationen:

$$\pi_0^{K,z} \approx \pi_0^{ex'pol(K,z)} := \pi_0^{IK} - (\pi_0^{IK} - \pi_0^{K}) - (\pi_0^{IK} - \pi_0^{IK,z}) \text{ , hvor } z \in \{A, VA\}.$$

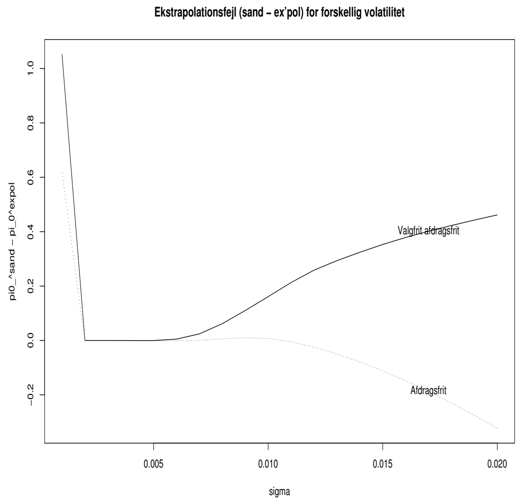
Læg mærke til, at der på højresiden står (mestendels) velkendte produkter. Det inkonverterbare og det afdragsfrie inkonverterbare er (givet dagens rentestrukur) trivielle at prise. Det traditionelle realkreditlån kan prises i et gitter, men man kunne måske have lyst til at bruge en anden model, fx en empirisk prepayment-model, der dårligt lader sig forene med gitter-modeller.

**A-lånet:** Man ser, at i dette tilfælde passer den ekstrapolerede pris forbløffende godt (95.795 ift. 95.801). De prikkede linier i Figur 5 og 6 viser hvordan ekstrapolationen virker for forskellige $r_0$- og $\sigma$-værdier. I ekstreme tilfælde kan der være nogen forskel, men ellers ser det ganske rimeligt ud; ekstrapolationsfejlen er som regel oftest under 0.01 (1 basispunkt). Læg mærke til at den ekstrapolerede værdi kan ligge både over og under den sande værdi. `Det kan man godt forklare, men jeg orker næsten ikke!`

**VA-lånet:** De fuldt optrukne linier i Figur 5 og 6 viser ekstrapolationsfejlene for VA-lånet. Vi ser dels at de næsten altid er positive. Det er fordi, som tidligere forklaret, den separate prisning overvurderer værdien af udskydelsesoptionaliteten. Vi ser også væsentligt højere fejl end for VA-lånet. Om de er så store, at det gør noget, kan man diskutere, men det fremhæver igen vores teoretiske pointe: VA-lånet skal prises som en samlet pakke.




Figur 5: Ekstrapolationsfejl for varierende $r_0$ for A-lånet (...) og VA-lånet (---)




Figur 6: Ekstrapolationsfejl for varierende $\sigma$ for A-lånet (...) og VA-lånet (---)

# 4 Konklusion

Selvom den anvendte model er realistisk, er den alligevel i "legetøjsstørrelse". Desuden ser vi bort fra en række andre effekter (fx omkostninger). Man kan derfor overveje masser af:

**Udvidelser**

Man kan kalibrere sit rentegitter til en observeret rentestruktur; se fx Kapitel 8 i Lando & Poulsen (2002).

Man kan ogsåønske at skifte til kontinuerttidsmodeller og de tilknyttede PDE'er; lettere til formulering af fler-faktor-modeller.

Mere realistisk realkreditmodellering: Modellen rammer (måske) observerede priser på traditionelle realkreditobligationer dårligt; der er ihvertfald ingen eksplicit kalibrerering hertil. Man kan lægge diverse spreads til. Eller man kan overveje, hvordan man kombinerer denne tilgangsvinkel med sin "professionelle" prepaymentmodel. Og når man er igang, så kunne man også overveje en mere "empirisk" modellering af afdragsudskydelserne end vores "rent optionsbaserede". Men der er en glimrende mellemvej: Kapitel 1 Svenstrup (2003) viser, hvordan stiafhængighed og irrationalitet af prepayments ganske tilfredsstillende kan fanges vha. en ekstra tilstandsvariabel. Realprisningen sker så i et 3-dimensionalt gitter, hvor de enkelte 2-dimensionelle "skiver" kun hænger sammen igennem springbetingelser (der dog er mere komplicerede end dem vi her har mødt) på terminsdage. Beregningskompleksiteten (ikke at forveksle med den mere subjektive, men meget reelle kodningskompleksitet) vokser derfor ikke dramatisk.

Vi forventer ikke at dette vil have stor effekt på værdien af afdragsplaceringsoptionen.

**“Excecutive Summary”**

Selvom der er flere prisningsteknisk og options-teoretisk interessante forskelle på lån med fast afdragsfrihed i starten og lån med valgfri adragsfrihed, så er det svært at vride store kursforskelle (mere end 0.2 kurspoint) mellem afdragsfrie og valgfrit afdragsfrie lån ud af en realistisk model. Eller mao. det er meget tæt på at være optimalt at lægge sine afdragsfrie perioder først.

# Litteratur


Dewynne, J. & Wilmott, P. (1999(?)), Untitled. Working paper. Mathematical Finance Group, University of Oxford. Available at `http://www.finance.ox.ac.uk/file_links/mf_papers/1999mf18.pdf`.

Hull, J. (2002), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5. edn, Prentice-Hall.

Jensen, B. & Poulsen, R. (2002), ‘Transition Densities of Diffusion Processes: Numerical Comparison of Approximation Techniques’, *Journal of Derivatives* **9**(4), 18–32.

Lamberton, D. & Lapeyre, B. (1996), *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall.

Lando, D. (2000), En hovedsætning i finansieringsteorien – og lidt om realkreditobligationer. Note. Afdeling for Anvendt Matematik og Statistik, Københavns Universitet. Kan downloades fra `http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/ofe01/famoes.pdf`.

Lando, D. & Poulsen, R. (2002), Lecture notes for the course ’Investerings- og Finansieringsteori’. Department of Applied mathematics and Statistics, University of Copenhagen. Available at `http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/iff02/ifnotes.2002.pdf`.

Luenberger, D. G. (1998), *Investment Science*, Oxford.

Pliska, S. (1997), *Introduction to Mathematical Finance*, 1. edn, Blackwell.

Svenstrup, M. (2003), Interest Rate Derivatives – Valuation and Application, PhD thesis, Department of Finance, Aarhus School of Business. Electronically available as working papers D 02 21-24 at `http://www.asb.dk/departments/fin/research/wp/2002.htm`.