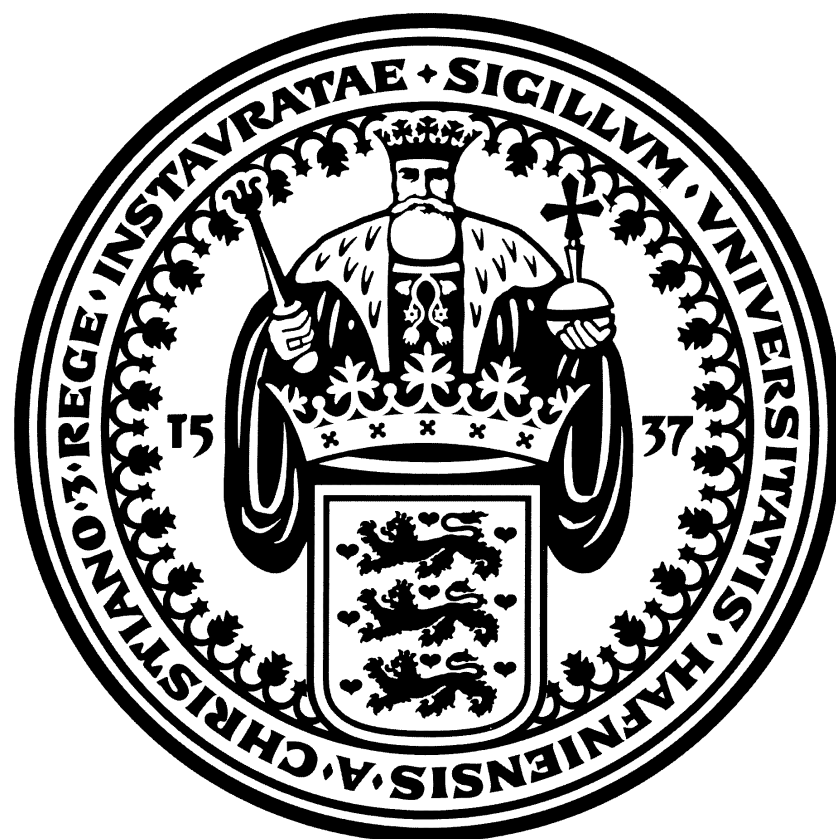


Klassifikation af Cuntz-Krieger algebraer

Forfatter: Gunnar Restorff
Vejleder: Søren Eilers



Sammenfatning

Formålet med dette speciale er at undersøge mulighederne for at udvide eksisterende klassifikationsresultater af (ikke-simple) stabiliserede Cuntz-Krieger algebraer. Specialet indleder med en introduktion af skift af endelig type samt en gennemgang af konstruktionen af Cuntz-Krieger algebraer og deres idealstruktur. De eksisterende resultater får en vis opmærksomhed og der vises siden en klassifikationsætning. Alle Cuntz-Krieger algebraer, hvis tilsvarende skift af endelig type hverken har overgangstilstande ej heller cykliske irreducible komponenter, er klassificeret op til stabil isomorfi – vha. det såkaldte K -væv introduceret af M. Boyle og D. Huang.

Abstract

The main purpose of this thesis is to investigate the possibilities to extend existing classification results of the (non-simple) stabilized Cuntz-Krieger algebras. The thesis starts with a brief introduction to shifts of finite type and a not-so-short introduction to Cuntz-Krieger algebras and their ideal structure. Some attention is given to the existing classification results and a new classification result is shown. All Cuntz-Krieger algebras, whose corresponding shift of finite type does not have any transition state nor any cyclic irreducible component, are classified up to stable isomorphism – by some kind of K -web related to work of M. Boyle and D. Huang. – The thesis is written in danish.

Indhold

Sammenfatning/abstract	iii
Indholdsfortegnelse	v
Indledning	1
1 Forudsætninger	3
1.1 Notation	3
1.2 Heltalsmatricer	4
1.3 Dynamiske systemer	5
1.4 Skiftrum	5
1.5 Ækvivalensrelationer mellem SFT	8
1.6 Krydsprodukter	8
1.7 Bemærkninger	10
2 Cuntz-Krieger algebraer	11
2.1 Konstruktion af Cuntz-Krieger algebraerne – den universelle konstruktion	11
2.2 C^* -algebraer frembragt af partielle isometrier	12
2.3 AF -algebraerne	13
2.4 Betingelse (I)	17
2.5 Entydighed	19
2.6 K -teori for \mathcal{O}_A	22
2.7 Idealgitteret	27
2.8 Idealstrukturen i \mathcal{O}_A	28
2.9 Γ_A er en invariant for $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K}$	32
2.10 Cuntz-Krieger algebraer som invarianter	34
2.11 Bemærkninger	34
3 Eksisterende klassifikationsresultater	37
3.1 Rørdams klassifikation af simple Cuntz-Krieger algebraer	37
3.2 Kirchberg-Phillips' klassifikationssætning	38
3.3 Huang's klassifikation af to-komponent Cuntz-Krieger algebraer	39
3.4 Huang's klassifikation af Cuntz-Krieger algebraer med triviel K_1 -gruppe	41
3.5 Rørdams klassifikation af to-komponent Cuntz-Krieger algebraer	42
4 $GL_{\mathcal{P}}$- og $SL_{\mathcal{P}}$-ækvivalens samt K-vævet	43
4.1 En cyklisk seks-leddet exakt følge stammende fra matricer	43
4.2 Om homomorfier mellem kerner og mellem kokerner	45
4.3 Homomorfier fra $\mathcal{E}(B)$ ind i $\mathcal{E}(B')$	48
4.4 $GL_{\mathcal{P}}$ - og $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens	50
4.5 K -vævet	51
4.6 K -vævet er en fuldstændig invariant af $\{-1, 0, 1\}$ -matricer op til $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens	53
4.7 Om sammenhængen mellem Rørdams og Huang's invarianter	57
4.8 Bemærkninger	59
5 To isomorfisætninger for $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K}$	61
5.1 Indledning	61
5.2 Isomorfisætningerne	62
5.3 Bemærkninger	67
6 Klassifikationsresultatet	69
6.1 Indledning	69
6.2 Hovedresultatet	70
6.3 Bemærkninger	71

Konklusion	73
A Induktiv limes	75
B Nogle resultater fra C^*-algebrateori	77
C Nogle udeladte beviser	81
Litteraturliste	83

Indledning

K -teori blev indført som et værktøj i C^* -algebrateori i begyndelsen af 1970'erne – og har siden vist sin anvendelighed bl.a. ved at løse mange åbne spørgsmål. En af de tidlige succeshistorier om K -teori for C^* -algebraer, er George Elliotts klassifikationsresultat for AF -algebraer fra først i 1970'erne (se [RLL00, §7.3] for en beskrivelse af dette). Siden dengang er klassifikation af C^* -algebraer blevet et kæmpe område indenfor C^* -algebrateori – og egentlig ligger dette speciale i forlængelse heraf.

Overordnet målsætning:

C^* -algebraerne defineret af Cuntz og Krieger fungerer som en bro mellem C^* -algebra teori og teorien for symbolske skiftrum af endelig type ([CK80]). For simple Cuntz-Krieger algebraer blev det afklaret i [Rør95], at de to udsagn

- (i) $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$
- (ii) $K_0(\mathcal{O}_A) \cong K_0(\mathcal{O}_{A'})$

er ækvivalente, og på nær et fortegn ækvivalente med

- (iii) $\overline{X}_A \sim_{FE} \overline{X}_{A'}$.

Denne sammenhæng kan opfattes som en *klassifikation* af Cuntz-Krieger algebraerne (og, stort set, af skiftrummene knyttet til dem) ved hjælp af de såkaldte Bowen-Franks grupper i (ii). Klassifikationsspørgsmålet i det ikke-simple tilfælde er kun afklaret i sporadiske tilfælde.

Specialets formål er at undersøge denne sammenhæng i det ikke-simple tilfælde, idet man må påregne at erstatte objekterne i (ii) med noget mere kompliceret end endeligt frembragte grupper. Der ønskes et særligt fokus på, i hvilket omfang, og i givet fald hvordan, studiet af sådanne algebraer med et endeligt antal idealer kan reduceres til studiet af simple C^* -algebraer. Resultatet i det simple tilfælde kan derfor tages for givet.

For Cuntz-Krieger algebraer haves en meget nydelig beskrivelse af idealstrukturen – og antallet af lukkede idealer er altid endeligt (for de Cuntz-Krieger algebraer, som vi betragter her i specialet). Her i specialet lægges, som antydnet ovenover, hovedvægten på klassifikation *op til stabil isomorfi* – vi siger, at to C^* -algebraer \mathfrak{A} og \mathfrak{B} er stabilt isomorfe, netop hvis $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K} \cong \mathfrak{B} \otimes \mathbb{K}$, hvor \mathbb{K} er de kompakte operatorer på et uendeligdimensionalt, separabelt Hilbert rum. Siden Mikael Rørdams klassifikation, har Danrun Huang klassificeret Cuntz-Krieger algebraer med præcis et ikke-trivielt lukket ideal samt Cuntz-Krieger algebraer med trivielt K_1 -gruppe. Alle disse klassifikationsresultater bygger i væsentlig grad på klassifikationsætninger for de tilsvarende skift af endelig type op til strømningsækvivalens (eng.: flow equivalence). Det sidste af disse resultater er udgivet i 1996, og siden er der ikke rigtig sket så meget på denne front.

Mit arbejde med specialet har foregået som følger. Først satte jeg mig ind i K -teori ved at læse de første 7 kapitler af [RLL00] ret nøje. Siden gik jeg i gang med at prøve at forstå konstruktionen af Cuntz-Krieger algebraerne, udregne deres K -teori samt at beskrive deres idealstruktur. Det var faktisk ret hårdt, for det eneste sted, jeg kunne finde en sammenhængende indførelse af dette, var i de originale artikler, [CK80] og [Cun81] – og disse er faktisk ret svære at læse. Cuntz' skrivestil er meget konsekvent – konsekvent præcis, konsekvent kortfattet og konsekvent ingen-overflødig-snak. Selv om dette har sine meget gode sider – der er f.eks. utrolig få fejl i disse artikler – så har dette medvirket, at jeg har brugt megen tid og energi på at forstå dem. Jeg har prøvet at samle nogle af mine overvejelser her i specialet, og det er mit håb, at dette vil blive til glæde for kommende studerende, som skal forstå disse artikler. Sideløbende har jeg måttet sætte mig ind i teorien for skiftrum mm. Jeg har opsummeret nogle af begreberne og resultaterne i kapitel 1 – men som anført i specialekontrakten, så ligger hovedfokuset på C^* -algebraer.

Siden gik jeg i gang med at læse dele af M. Rørdams og D. Huang's artikler, hvor de løser klassifikationsproblemet i forskellige specialtilfælde. Men så en gang i sommers fandt jeg – nærmest ved et tilfælde – en artikel, hvori Mike Boyle klassificerer skift af endelig type op til strømningsækvivalens vha. matrixligninger. Heri var yderligere henvisning til en – på det tidspunkt – ikke udgivet artikel af M. Boyle og D. Huang, som forbandt dette til noget, som havde oprindelse i K -teori. Jeg fik fat i en udgave af denne artikel og herefter tog mit arbejde en stor drejning. Nu begyndte jeg at arbejde mere målrettet med disse to artikler, samt de allerede eksisterende klassifikationsresultater. Dette har så resulteret i to isomorfisætninger (teorem

5.2.3 og korollar 5.2.4) samt en klassifikationssætning (teorem 6.2.1). I forbindelse med dette har jeg haft en del kommunikation med Mike Boyle, Danrun Huang og Søren Eilers om disse resultater. Desuden har jeg afholdt et operatoralgebraseminar-foredrag her på instituttet i samme anledning.

For at læse specialet forudsættes (mindst) et kendskab til C^* -algebraer svarende til §§1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 5.1, 6.3, 6.4 og 6.5 i Murphys lærebog [Mur90] samt kapitel 1–7 i lærebogen om K -teori af Rørdam, Larsen og Laustsen, [RLL00]. Andre småresultater bruges også undervejs. Desuden er der en ikke ubetydelig resultatimport.

Opgavens struktur

I kapitel 1 anføres definitioner og resultater til brug senere i specialet. Mere specifikt, så fastsættes nogen notation, skift af endelig type og andre relaterede ting defineres og nogle af hovedresultaterne citeres. Endvidere afsluttes kapitlet med en kort introduktion af krydsprodukter med gruppen af komplekse tal af længde 1, \mathbb{T} , hvilket bruges til at udregne K -teorien for Cuntz-Krieger algebraerne.

Kapitel 2: Her indføres Cuntz-Krieger algebraerne, \mathcal{O}_A , samt AF -delalgebraerne, \mathcal{F}_A og \mathcal{D}_A . Der vises, at Cuntz-Krieger algebraerne er entydigt bestemt (op til kanonisk isomorfi) ved de relationer, frembringerne skal opfylde, hvis den tilsvarende nabomatrix opfylder betingelse (I). K -teorien for \mathcal{O}_A udregnes vha. Pimsner-Voiculescus cykliske seks-leddede exakte følge (bl.a. deres resultat importeres). I afsnit 2.8 beskrives idealstrukturen for Cuntz-Krieger algebraer, hvis tilhørende nabomatricer opfylder betingelse (II). I det efterfølgende afsnit vises, at idealgitteret for en C^* -algebra er en stabil isomorfi invariant. Kapitlet afsluttes med at nævne, at Cuntz-Krieger algebraerne er en invariant af en-sidede skift af endelig type (op til topologisk konjugering) samt at de stabiliserede Cuntz-Krieger algebraer er en invariant af (to-sidede) skift af endelig type op til strømningsækvivalens.

I kapitel 3 gennemgås bevisidéerne for nogle af de eksisterende klassifikationsresultater. Da dette kapitel er skrevet lidt ustringent og uformelt, er det forholdsvis let læseligt.

De efterfølgende tre kapitler er hovedindrediensen i specialet. I kapitel 4 indføres en cyklisk seks-leddet exakt følge stammende fra heltalsmatricer. Med oprindelse i M. Boyle og D. Huang's artikler indføres der såkaldte $SL_{\mathcal{P}}$ - og $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalenser samt det såkaldte K -væv. Der vises en masse omkring homomorfier mellem forskellige af de indførte objekter, og der gives et (næsten) fuldstændigt bevis for, at $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens er ensbetydende med at kræve K -væv isomorfi (for $\{-1, 0, 1\}$ -matricer). Afslutningsvis sammenlignes to fuldstændige invarianter for Cuntz-Krieger algebraer med præcis et ikke-trivielt lukket ideal op til stabil isomorfi af hhv. M. Rørdam og D. Huang i lyset af de beviste resultater.

Kapitel 5: Vha. en klassifikationssætning af M. Boyle, vises en isomorfisætning for de stabiliserede Cuntz-Krieger algebraer. Vha. resultaterne i det foregående kapitel formuleres dette også vha. det såkaldte K -væv.

Kapitel 6: K -vævet, defineret af M. Boyle og D. Huang, har en nær tilknytning til K -teori for de tilhørende Cuntz-Krieger algebraer. For en forholdsvis stor skare af Cuntz-Krieger algebraer vises det, at dette kan opfattes som en slags invariant – vi får altså en fuldstændig invariant af denne klasse af Cuntz-Krieger algebraer – dette er hovedresultatet i specialet, teorem 6.2.1.

Specialet afsluttes med en konklusion, tre tillæg samt en litteraturliste. I konklusionen opsummeres på specialet og der nævnes nogle interessante spørgsmål, som dette arbejde naturligt stiller. I tillæg A defineres induktive grænser af monoider og grupper for opadfiltrerende indexmængder. I tillæg B er nogle resultater fra C^* -algebra-teori, som bruges i løbet af specialet. I tillæg C findes nogle enkelte ret lange og uinteressante beviser. De fleste kapitler afsluttes med nogle bemærkninger. Heri forklares, hvorfra de forskellige dele af kapitlerne er taget.

For matematikere med solidt kendskab til Cuntz-Krieger algebraer, burde det være forholdsvis overkommeligt at starte læsningen fra kapitel 3 eller 4 (det er dog anbefalelsesværdigt lige at „snuse“ til de øvrige kapitler for at få et overblik over den anvendte notation). Hvis man ikke har så godt kendskab til idealstrukturen, vil jeg dog anbefale, at man påbegynder læsningen ikke senere end fra afsnit 2.7 (da idealerne har en vigtig rolle i specialet).

Det er umuligt at udføre en så stor rapport uden at lave fejl. Det er dog mit håb (og *endnu* også min tro), at der ikke er væsentlige grove fejl i mit arbejde. Jeg modtager dog gerne meddelelser om fejl.

Jeg vil her også gerne tillade mig at takke alle, som har været til støtte på en eller anden måde i løbet af studiet – og specialeforløbet især. Tak for hjælp, samtaler og anden kommunikation med ansatte og studerende – både ved Københavns Universitet og „ude i verden“. Jeg vil bringe en særlig tak til Mike Boyle og Danrun Huang for at gennemlæse og kommentere materiale, som jeg har sendt til dem. Tak til min vejleder, Søren Eilers, for vejledning gennem hele forløbet. Og til sidst en tak til min familie for at have holdt mig ud i den sidste hektiske del af specialeskrivningen.

Universitetsparken, d. 4. nov. 2003

Gunnar Restorff

Kapitel 1

Forudsætninger

For at læse specialet forudsættes (mindst) et kendskab til C^* -algebraer svarende til §§1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 5.1, 6.3, 6.4 og 6.5 i Murphys lærebog [Mur90] samt kapitel 1–7 i lærebogen om K -teori af Rørdam, Larsen og Laustsen, [RLL00]. Andre småresultater bruges også undervejs. Desuden er der en ikke ubetydelig resultatimport.

Her i kapitlet opsummeres yderligere definitioner og resultater, som skal bruges i specialet. Dette er især lidt notation samt resultater om skift af endelig type. Kapitlet afsluttes med et afsnit om krydsprodukter med enhedscirklen \mathbb{T} .

1.1 Notation

Jeg har bestræbt mig på, at bruge den gængse (danske) matematiske notation, det har dog ikke været muligt at være tro mod alle de mange matematiske områder, som mødes. Valg af dele af notationen vil måske virke lidt underlige og til tider måske ukonsekvente. Dette vil som oftest skyldes, at jeg også prøver at være forholdsvis tro mod de artikler, jeg henviser til (f.eks. indføres K -vævet, som kan opfattes som en slags *kontravariant* funktor for Cuntz-Krieger algebraer med oprindelse i K -teori – her ville det være mere naturligt, at definere den kovariant, men det gøres ikke, bl.a. fordi dette ville virke forvirrende, da K -vævet har direkte forbindelse til to artikler, som vi bruger). Vedrørende operatoralgebra-teori og K -teori for sådanne har jeg lagt mig meget op ad [Mur90] og [RLL00]. Ny notation forklares som regel første gang den benyttes.

Begrebet isomorfi (endomorfi og automorfi) afhænger af den kategori, vi arbejder i. Som sædvanligt betegner \mathbb{Z} (hhv. \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 , \mathbb{R} og \mathbb{C}) mængden af hele (hhv. positive, ikke-negative, reelle og komplekse) tal. Med \mathbb{T} betegner vi enhedscirklen i \mathbb{C} . Vi lader $\delta_{ij} = \delta_{i,j}$ betegne Kronecker delta; $\delta_{ij} = 1$, hvis $i = j$ og $\delta_{ij} = 0$, hvis $i \neq j$. For en matrix A lader vi $A(i, j)$ betegne den ij 'te indgang. Vektorer er altid søjlevektorer, hvis ikke andet fremgår klart. Med χ_S betegnes indikatorfunktionen for mængden S og id (eller id_M) betegner den identiske afbildning (på M).

For hvert Hilbert rum \mathfrak{H} betegner $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$ rummet af begrænsede lineære operatorer på \mathfrak{H} , medens $\mathbb{K}(\mathfrak{H})$ betegner de kompakte operatorer på \mathfrak{H} . Specielt lader vi \mathbb{K} betegne $\mathbb{K}(\ell_2)$ (altså de kompakte operatorer på et uendeligdimensionalt separabelt Hilbert rum). For et normeret rum \mathfrak{X} betegner \mathfrak{X}^* det duale rum. I C^* -algebraer med enhed vil vi normalt betegne enheden med symbolet $\mathbf{1}$. Hvis \mathfrak{A} er en C^* -algebra, så betegner $M(\mathfrak{A})$ multiplikatoralgebraen for \mathfrak{A} . Ved et ideal forstås et to-sidet ideal, hvis ikke andet fremgår klart. For C^* -algebraer ($*$ -algebraer) \mathfrak{A} og \mathfrak{B} vil $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$ betegne det algebraiske tensorprodukt, mens $\mathfrak{A} \otimes_\alpha \mathfrak{B}$ betegner C^* -algebra-fuldstændiggørelsen mht. C^* -normen α på $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$. Endvidere betegner $\mathfrak{A} \otimes_{\max} \mathfrak{B}$ og $\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}$ hhv. det maksimale tensorprodukt og det spatiale tensorprodukt (som er det samme som det minimale). Hvis \mathfrak{A} eller \mathfrak{B} er nukleær, så betegnes tensorproduktet kun $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. For Hilbert rum \mathfrak{H} og \mathfrak{K} betegner $\mathfrak{H} \odot \mathfrak{K}$ det algebraiske tensorprodukt, mens $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$ betegner Hilbert rum tensorproduktet. For moduler og grupper bruger vi \otimes til at betegne tensorproduktet.

Hvis S er et system af delmængder af en mængde, så lader vi også $\bigcup S$ betegne foreningen $\bigcup_{x \in S} x$ (og tilsvarende for fællesmængdedannelse). Ved ordensrelation, menes en *refleksiv* ordensrelation.

Jeg har valgt – såvidt muligt – at undgå at gentage materiale fra kurser og projekter, som jeg har gennemgået i løbet af min studietid. Disse udeladelser har dog ikke været tilstrækkelige, til at få arbejdet og specialerapporten ned på et acceptabelt niveau. Det var allerede fra starten klart, at jeg måtte have en ikke ubetydelig import af resultater, jeg ikke har mødt på tidligere kurser. Jeg har forsøgt at være så konsekvent som muligt. Mange af de importerede resultater er forholdsvis „store“ resultater, som er vel-ankendte blandt C^* -algebraikere. Desuden har jeg udeladt enkelte beviser, efter overvejelser af hvor interessante de er i specialets sammenhæng.

Blandt de importerede resultater/udeladte beviser er: Teorien om skiftrum, især skift af endelig type og forskellige ækvivalensrelationer blandt disse; Pimsner-Voiculescus cykliske seks-leddede exakte følge, teorem 2.6.12; Takais dualitetssætning for krydsprodukter, teorem 2.6.13; Browns resultat om stabil isomorfi og fulde hjørner, teorem 2.6.5; krydsprodukter af C^* -algebraer (med \mathbb{Z} og \mathbb{T}); beviset for de konkrete beskrivelser af $K_0(\mathcal{O}_A)$ og $K_1(\mathcal{O}_A)$; beviset for at Cuntz-Krieger algebraerne er en invariant for en-sidede skift af endelig type

og at de stabiliserede Cuntz-Krieger algebraer er en invariant for (to-sidede) skift af endelig type, teorem 2.10.1(a) og (b); M. Boyles resultat om sammenhæng mellem strømningsækvivalens og $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens, teorem 5.1.5; M. Boyle og D. Huangs bevis for sætning 4.6.6; eksistensen af Smith normal formen; Voiculescus sætning, teorem B.15; og selvfølgelig Mikael Rørdams resultat: $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_{2-}$, teorem 3.1.3.

1.2 Heltalsmatricer

Definition 1.2.1 Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet og lad der være givet en matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$. Sæt $\Sigma = \{1, 2, \dots, n\}$. Da kaldes A

- **irreducibel**, netop hvis $\forall i, j \in \Sigma \exists k \in \mathbb{N} : A^k(i, j) > 0$,
- en **permutation**, netop hvis $\exists k \in \mathbb{N} : A^k = I$,
- **ikke-degenereret**, netop hvis ingen rækker og ingen søjler er nul.

Bemærkning 1.2.2 Det er ikke helt tilfældigt, at A kaldes en permutation, netop hvis $A^k = I$ for et $k \in \mathbb{N}$. Der gælder nemlig, at A er en permutation, hvis og kun hvis A virker på Σ som en permutation. Fra Matematik 2AL – Algebra er kendt, at hvis A virker på Σ som en permutation, så findes et $k \in \mathbb{N}$, så $A^k = I$. Antag derfor, at $A^k = I$ for et $k \in \mathbb{N}$. Da følger umiddelbart, at A er ikke-degenereret. Vi betragter nu grafen G_A med A som nabomatrix (eng. adjacency matrix). Da antallet af forskellige ture af længde $k \in \mathbb{N}$ i grafen G_A fra knude i til knude j er $A^k(i, j) = \delta_{ij}$ (se fakta 1.4.14) ses, at der er præcis et et-tal og $n - 1$ nuller i hver søjle. Da A er ikke-degenereret, følger, at A virker på Σ som en permutation.

Definition 1.2.3 Ved $\text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ forstås mængden af $n \times n$ matricer med indgange fra \mathbb{Z} . Da \mathbb{Z} er en ring med enhed, er $\text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ også en ring med enhed. Mængden $GL_n(\mathbb{Z})$ betegner mængden af invertible elementer i $\text{Mat}_n(\mathbb{Z})$, dvs. mængden $\{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z}) \mid \exists A' \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z}) : AA' = A'A = I\}$. Da $\text{Mat}_n(\mathbb{Z}) \subseteq \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, ses umiddelbart, at

$$GL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\}.$$

Det er klart, at $\det A = \pm 1$ er en nødvendig betingelse for $A \in GL_n(\mathbb{Z})$, thi $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ for alle invertible matricer $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$. På den anden side hvis $\det A = \pm 1$ for en matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$, så er $A' = (\det A)^{-1} \text{adj } A$ den inverse til A i $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ og et element i $\text{Mat}_n(\mathbb{Z})$, da alle kofaktorerne for A er heltal ($\text{adj } A$ betegner den *klassisk* adjungerede til A , se [Mes93, def.7.12 og thm.7.13]).

Som i $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ sættes

$$SL_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1\}.$$

Definition 1.2.4 Vi siger, at to matricer $A, A' \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ er ækvivalente (over \mathbb{Z}), netop hvis der findes $U, V \in GL_n(\mathbb{Z})$, således at

$$UAV = A'.$$

Fra [New72, thm.II.9] (se dog også [LM95, s.248]) haves

Teorem 1.2.5 (Smith normal formen) *Enhver matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ er ækvivalent med en og kun en $n \times n$ diagonalmatrix S på formen*

$$S = \text{diag}(s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0),$$

hvor $r \in \{0, \dots, n\}$ er rangen af A , $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{N}$ og $s_i \mid s_{i+1}$ for alle $i = 1, \dots, r - 1$. Matricen S kaldes A 's **Smith normal form** (over $\text{Mat}_n(\mathbb{Z})$).

Definition 1.2.6 For en matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ sættes

$$\begin{aligned} \ker A &= \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax = 0\}, \\ \text{cok } A &= \mathbb{Z}^n / A\mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Bemærkning 1.2.7 Givet en matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ og lad $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0)$ betegne dens Smith normal form. Da ses umiddelbart, at

$$\begin{aligned} \text{cok } A &\cong \text{cok } S \cong \mathbb{Z}/s_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/s_2\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/s_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-r}, \\ \ker A &\cong \ker S \cong \mathbb{Z}^{n-r}. \end{aligned}$$

Endvidere gælder, at s_1, \dots, s_r og $n - r$ er entydigt bestemt ved, at $s_i \mid s_{i+1}$ for $i = 1, \dots, r - 1$ – på nær de evt. første s_i 'er, som er lig 1 (se hovedsætning om endelig frembragte abelske grupper [Jen99, s.1.50]). Heraf følger også, at $\text{cok } A \cong \text{cok } A^T$ og $\ker A \cong \ker A^T$. Da $\ker A$ er (isomorf med) den torsionsfrie del af $\text{cok } A$, vil $\text{cok } A \cong \text{cok } A' \Rightarrow \ker A \cong \ker A'$ for alle $A' \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{Z})$.

1.3 Dynamiske systemer

Definition 1.3.1 Et **topologisk dynamisk system** er et par (M, f) , hvor M er et kompakt topologisk Hausdorff rum og $f: M \rightarrow M$ er en kontinuert afbildning. En morfi fra et topologisk dynamisk system (M, f) ind i et andet (N, g) , er en kontinuert afbildning $\phi: M \rightarrow N$, som opfylder, at $\phi \circ f = g \circ \phi$. Vi siger, at to topologiske dynamiske systemer er **topologisk konjugerede**, netop hvis der findes en homeomorfi $\phi: M \rightarrow N$, som opfylder, at $\phi \circ f = g \circ \phi$ (dette svarer til isomorfierne i kategorien af topologiske dynamiske systemer).

Definition 1.3.2 Lad M være et kompakt topologisk Hausdorff rum. Lad der for hvert $t \in \mathbb{R}$ være givet en afbildning $\Phi_t: M \rightarrow M$. Da kaldes familien $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ for en **kontinuert strømning** af M , netop hvis $\Phi_t, t \in \mathbb{R}$ er homeomorfier, afbildningen $M \times \mathbb{R} \ni (x, t) \mapsto \Phi_t(x)$ er kontinuert og $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$ for alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Lad M og N være kompakte topologiske Hausdorff rum. Vi siger da, at en kontinuert strømning, $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, af M er ækvivalent med en kontinuert strømning, $(\Psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, af N , netop hvis der findes en homeomorfi $\phi: M \rightarrow N$ og monotont voksende funktioner $f_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in M$, således at der for alle $x \in M$ og $t \in \mathbb{R}$ gælder, at

$$\phi(\Phi_t(x)) = \Psi_{f_x(t)}(\phi(x)).$$

Definition 1.3.3 Lad (M, f) være et topologisk dynamisk system. Lad \sim være ækvivalensrelationen på $M \times \mathbb{R}$ genereret af at identificere $(x, s+1)$ med $(f(x), s)$ for $x \in M$ og $s \in \mathbb{R}$. Mao. er $(x, s) \sim (x', s')$, hvis og kun hvis der findes et $k \in \mathbb{N}_0$, således at $x' = f^k(x) \wedge s' = s - k$ eller $x = f^k(x') \wedge s = s' - k$. Da defineres **standard suspensionsrummet** som kvotientrummet

$$Y = (M \times \mathbb{R}) / \sim$$

udstyret med kvotienttopologien. Da er Y en kompakt mængde. Standard suspensionsrummet kan opfattes som mængden $M \times [0, 1]$ hvor vi identificerer $(x, 1)$ med $(f(x), 0)$ for $x \in M$. For hvert $t \in \mathbb{R}$ (vel-)defineres en afbildning $\Phi_t: Y \rightarrow Y$ ved, at

$$\Phi_t([(x, s)]) = [(x, s+t)], \quad x \in M, s \in \mathbb{R}.$$

Den kontinuerte strømning $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ kaldes **suspensionsstrømningen** over (M, f) .

1.4 Skiftrum

Antagelse 1.4.1 Lad der være givet et $n \in \mathbb{N}$ og sæt $\Sigma := \{1, \dots, n\}$.

Definition 1.4.2 Vi udstyrer mængden $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ af dobbeltuendelige følger af elementer fra Σ med produkttopologien induceret af den diskrete metrik på Σ og definerer **skiftafbildningen** $\bar{\sigma}: \Sigma^{\mathbb{Z}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{Z}}$ ved, at $\bar{\sigma}((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ for alle $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$. Det er da klart, at $\bar{\sigma}$ er en homeomorfi. Det topologiske dynamiske system $(\Sigma^{\mathbb{Z}}, \bar{\sigma})$ kaldes **det fulde to-sidede n -skift**.

Ved et **to-sidet skiftrum** forstås et topologisk dynamisk system $(\bar{X}, \bar{\sigma}|_{\bar{X}})$, hvor \bar{X} er en afsluttet delmængde af $\Sigma^{\mathbb{Z}}$, som er invariant under både $\bar{\sigma}$ og $\bar{\sigma}^{-1}$, dvs. $\bar{\sigma}(\bar{X}) = \bar{X}$ (sml. [LM95, def.1.2.1 og thm.6.1.21]). En endelig følge $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ af elementer i Σ kaldes et ord (i Σ) og vi lader $|\mu| = k$ betegne længden af μ (pr. konvention kaldes den tomme følge også et ord). For et to-sidet skiftrum \bar{X} lader vi $\mathcal{B}(\bar{X})$ betegne mængden af alle ord der forekommer i elementerne i \bar{X} . For et $\mu \in \mathcal{B}(\bar{X})$ lader vi $\bar{C}_{\bar{X}}(\mu)$ betegne cylindermængden

$$\bar{C}_{\bar{X}}(\mu) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \bar{X} \mid (x_1, \dots, x_{|\mu|}) = \mu\}.$$

For enhver delmængde \mathcal{F} af $\mathcal{B}(\Sigma^{\mathbb{Z}})$ sætter vi

$$\bar{X}_{\mathcal{F}} = \{x \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \mid \forall \mu \in \mathcal{F} : \mu \text{ forekommer ikke i } x\}.$$

Bemærkning 1.4.3 Af Tychonoffs sætning [Ber97, sætn.7.18] fås umiddelbart, at $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ er et kompakt topologisk rum. Ethvert to-sidet skiftrum $\bar{X} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ er således kompakt, og desuden ses nemt, at

$$\{\bar{\sigma}^k(\bar{C}_{\bar{X}}(\mu)) \mid k \in \mathbb{N}, \mu \in \mathcal{B}(\bar{X})\}$$

er en basis for topologien for \bar{X} – bestående af låbne (=lukkede og åbne) mængder.

Topologien på $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ er metrisérbar – det vises nemlig nemt, at den er induceret af metrikken $d: \Sigma^{\mathbb{Z}} \times \Sigma^{\mathbb{Z}} \rightarrow [0, \infty[$, givet ved

$$d((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{1 - \delta_{x_i, y_i}}{2^{|i|}}, \quad (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}.$$

Desuden ses det let, at $\bar{X}_{\mathcal{F}}$ er et to-sidet skiftrum for hvert $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(\Sigma^{\mathbb{Z}})$.

Fra [LM95, def.1.2.1 og thm.6.1.21] har vi følgende sætning

Sætning 1.4.4 *En delmængde \overline{X} af $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ er et to-sidet skiftrum, hvis og kun hvis der findes en delmængde \mathcal{F} af $\mathcal{B}(\Sigma^{\mathbb{Z}})$, så $\overline{X} = \overline{X}_{\mathcal{F}}$.*

Definition 1.4.5 Lad $\overline{X} \subseteq \Sigma^{\mathbb{Z}}$ være et to-sidet skiftrum. Da kaldes \overline{X} et **(to-sidet) skift af endelig type** (eller kort **SFT** for *shift of finite type*), netop hvis der findes en *endelig* delmængde \mathcal{F} af $\mathcal{B}(\Sigma^{\mathbb{Z}})$, så $\overline{X} = \overline{X}_{\mathcal{F}}$.

Definition 1.4.6 Vi udstyrer mængden $\Sigma^{\mathbb{N}}$ af (højre)-uendelige følger af elementer fra Σ med produkttopologien induceret af den diskrete metrik på Σ og definerer **skiftafbildningen** $\sigma: \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \Sigma^{\mathbb{N}}$ ved at $\sigma((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$ for alle $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Det er da klart, at σ er kontinuert og surjektiv. Det topologiske dynamiske system $(\Sigma^{\mathbb{N}}, \sigma)$ kaldes **det fulde en-sidede n -skift**.

Ved et **en-sidet skiftrum** forstås et topologisk dynamisk system $(X, \sigma|_X)$, hvor X er en afsluttet delmængde af $\Sigma^{\mathbb{N}}$, som er invariant under skiftafbildningen σ , dvs. $\sigma(X) \subseteq X$ (sml. [Car01, s.3]). For et en-sidet skiftrum X lader vi $\mathcal{B}(X)$ betegne mængden af alle ord der forekommer i elementerne i X . For et $\mu \in \mathcal{B}(X)$ lader vi $C_X(\mu)$ betegne cylindermængden

$$C_X(\mu) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X \mid (x_1, \dots, x_{|\mu|}) = \mu\}.$$

For enhver delmængde \mathcal{F} af $\mathcal{B}(\Sigma^{\mathbb{N}})$ sætter vi

$$X_{\mathcal{F}} = \{x \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \forall \mu \in \mathcal{F} : \mu \text{ forekommer ikke i } x\}.$$

Bemærkning 1.4.7 Af Tychonoffs sætning [Ber97, sætn.7.18] fås umiddelbart, at $\Sigma^{\mathbb{N}}$ er et kompakt topologisk rum. Ethvert en-sidet skiftrum $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{N}}$ er således kompakt, og desuden ses nemt, at

$$\{C_X(\mu) \mid \mu \in \mathcal{B}(X)\}$$

er en basis for topologien for X – bestående af åbne mængder.

Topologien på $\Sigma^{\mathbb{N}}$ er metrisérbar – det vises nemlig nemt, at den er induceret af metrikken $d: \Sigma^{\mathbb{N}} \times \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, \infty[$, givet ved

$$d((x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1 - \delta_{x_i, y_i}}{2^i}, \quad (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}.$$

Desuden ses det let, at $X_{\mathcal{F}}$ er et en-sidet skiftrum for hvert $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}(\Sigma^{\mathbb{N}})$.

Analogt til det to-sidede skiftrum, har vi fra [Car01, prop.1.0.4] følgende sætning:

Sætning 1.4.8 *En delmængde X af $\Sigma^{\mathbb{N}}$ er et en-sidet skiftrum, hvis og kun hvis der findes en delmængde \mathcal{F} af $\mathcal{B}(\Sigma^{\mathbb{N}})$, så $X = X_{\mathcal{F}}$.*

Definition 1.4.9 Lad $X \subseteq \Sigma^{\mathbb{N}}$ være et en-sidet skiftrum. Da kaldes X et **en-sidet skift af endelig type**, netop hvis der findes en *endelig* delmængde \mathcal{F} af $\mathcal{B}(\Sigma^{\mathbb{N}})$, så $X = X_{\mathcal{F}}$.

Bemærkning 1.4.10 Bemærk, at med *skift af endelig type* og med *SFT* menes *to-sidet* skift af endelig type (hvis ikke andet klart fremgår af sammenhængen).

Definition 1.4.11 Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være givet. Vi betragter da den orienterede graf G_A med n knuder og A som nabomatrix (eng.: adjacency matrix). Vi sætter

$$\overline{X}_A := \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \mid \forall i \in \mathbb{Z} : A(x_i, x_{i+1}) = 1\},$$

$$X_A := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : A(x_i, x_{i+1}) = 1\}.$$

Sæt $\mathcal{F} := \{(i_1, i_2) \in \Sigma \times \Sigma \mid A(i_1, i_2) = 0\}$. Da er det klart, at $\overline{X}_A = \overline{X}_{\mathcal{F}}$ og $X_A = X_{\mathcal{F}}$. Følgelig er \overline{X}_A og X_A skift af endelig type. Jeg synes selv, at det her kan være meget illustrativt at tænke på dette som mængden af dobbelt-uendelige ture i G_A hhv. (enkelt)-uendelige (fremadrettede) ture i G_A (hvor man bemærker sig *knuderne* – og ikke kanterne). Hvis A er antaget ikke-degenereret, følger umiddelbart, at $\overline{X}_A \neq \emptyset$ og $X_A \neq \emptyset$ og dette svarer iøvrigt til at grafen G_A er *essentiell* (se [LM95, def.2.2.9]).

Ved et multiindex (i Σ) forstås et element i $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$. For ethvert multiindex $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ defineres længden af μ til $|\mu| = k$. For hvert $k \in \mathbb{N}_0$ lader vi \mathcal{M}_A^k betegne delmængden af Σ^k bestående af de sæt $(i_1, \dots, i_k) \in \Sigma^k$, hvorom der gælder, at $A(i_j, i_{j+1}) > 0$ for $j = 1, \dots, k-1$ (pr. konvention er $\mathcal{M}_A^0 = \{\emptyset\}$). Lad $\mathcal{M}_A := \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_A^k$. Da repræsenterer \mathcal{M}_A mængden af lovlige (endelige) ture i grafen G_A , medens \mathcal{M}_A^k

repræsenterer mængden af lovlige ture af længde k i grafen G_A . Hvis A er ikke-degenereret, så svarer \mathcal{M}_A til mængden af alle ord $\mathcal{B}(\overline{X}_A)$, der forekommer i \overline{X}_A , og ækvivalent svarer \mathcal{M}_A også til mængden af alle ord $\mathcal{B}(X_A)$ der forekommer i X_A .

Hvis $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ og $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$ er multiindex, så lader vi $\mu\nu$ betegne det sammensatte multiindex $(\mu_1, \dots, \mu_k, \nu_1, \dots, \nu_r)$. Vi husker på, at vi udstyrer \overline{X}_A og X_A med delrumstopologien arvet fra hhv. $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ og $\Sigma^{\mathbb{N}}$. For hvert $\mu \in \mathcal{M}_A$ defineres cylindrene

$$\overline{C}_A(\mu) := \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \overline{X}_A \mid (x_1, \dots, x_{|\mu|}) = \mu\},$$

$$C_A(\mu) := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_A \mid (x_1, \dots, x_{|\mu|}) = \mu\}.$$

Vi lader endvidere $\overline{\sigma}_A$ betegne skiftafbildningen $\overline{\sigma}$ restringeret til \overline{X}_A , og vi lader σ_A betegne skiftafbildningen σ restringeret til X_A . Da er $\overline{\sigma}_A$ en homeomorfi og σ_A er kontinuert – σ_A er tilmed surjektiv, hvis A er ikke-degenereret.

Bemærkning 1.4.12 De skiftrum, vi har indført i forrige definition, er de såkaldte *knude-skift* hørende til en matrix A – idet vi bemærkede os hvilke *knuder* vi besøgte i turene i G_A . Vi kunne også have valgt at bemærke os *kanterne*.

Givet en ikke-degenereret matrix $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$ og betragt grafen G_A . Lad $Ed(G_A)$ betegne mængden af kanter i G_A . Delmængden af $Ed(G_A)^{\mathbb{Z}}$ bestående af de følger $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, hvorom der for alle $i \in \mathbb{Z}$ gælder, at slut-knuden for kanten e_i er start-knuden for kanten e_{i+1} , er et SFT – et såkaldt *kant-skift*.

Der gælder dog, at ethvert kant-skift er topologisk konjugeret til et knude-skift – evt. på en anden graf (se [LM95, prop.2.3.9(2) og s.44]). Grunden, til at vi hovedsageligt koncentrerer os om knude-skiftene, er, at vi bruger $\{0, 1\}$ -matricer til at definere Cuntz-Krieger algebraer – men det er, som nævnt, ikke en indskrænkelse.

For en (ikke-degenereret) $\{0, 1\}$ -matrix har vi således både et knude-skift og et kant-skift. Men disse er kanonisk topologisk konjugerede, thi mellem to knuder i grafen G_A er der højst een kant, og der er således en en-en korrespondence mellem beskrivelse af en uendelig tur vha. knuder og beskrivelse af en uendelig tur vha. kanter.

Man har nogle meget fine og nyttige beskrivelser af nogle vigtige relationer mellem kant-skift vha. matricer. Dette medvirker at kant-skiftene er mere fremtrædende i litteraturen, men som sagt har det ikke nogen dynamisk indvirkning, at vi hovedsagligt bruger knude-skift.

Definition 1.4.13 Et (to-sidet) skiftrum \overline{X} kaldes **irreducibelt**, netop hvis der for alle $\mu, \mu' \in \mathcal{B}(\overline{X})$ findes et $\nu \in \mathcal{B}(\overline{X})$, således at $\mu\nu\mu' \in \mathcal{B}(\overline{X})$. Et en-sidet skiftrum X kaldes **irreducibelt**, netop hvis der for alle $\mu, \mu' \in \mathcal{B}(X)$ findes et $\nu \in \mathcal{B}(X)$, således at $\mu\nu\mu' \in \mathcal{B}(X)$.

Fakta 1.4.14 *Der gælder*

- Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en ikke-degenereret matrix. Systemet $\{\overline{\sigma}^k(\overline{C}_A(\mu)) \mid k \in \mathbb{N} \wedge \mu \in \mathcal{M}_A\}$ er en basis for topologien på \overline{X}_A bestående af åbne mængder. Specielt er $\{\overline{\sigma}^k(\overline{C}_A(\mu)) \mid k \in \mathbb{N} \wedge \mu = (x_{1-k}, \dots, x_k)\}$ en omegnsbasis for punktet $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \overline{X}_A$.
- Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en ikke-degenereret matrix. Systemet $\{C_A(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_A\}$ er en basis for topologien på X_A bestående af åbne mængder. Specielt er $\{C_A(\mu) \mid k \in \mathbb{N} \wedge \mu = (x_1, \dots, x_k)\}$ en omegnsbasis for punktet $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_A$.
- Alle skiftrum, som er topologisk konjugeret til et SFT, er selv SFT ([LM95, thm.2.1.10]).
- For ethvert SFT \overline{X} , findes et $n \in \mathbb{N}$ og en ikke-degenereret matrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$, så \overline{X} og \overline{X}_A er topologisk konjugerede ([LM95, example 1.5.10, prop.2.17 og prop.2.3.9(3)]).
- Lad $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$ være en ikke-degenereret matrix. Antallet af (forskellige) lovlige ture af længde $k \in \mathbb{N}_0$ i grafen G_A fra knude i til knude j er $A^k(i, j)$ (se [LM95, prop.2.2.12]).
- Lad $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$ være en ikke-degenereret matrix. Der gælder altså, at A er irreducibel, hvis og kun hvis grafen G_A er stærkt-sammenhængende (eng.: strongly connected) – dvs. at der mellem ethvert par af knuder findes en tur. Sådanne grafer kaldes derfor også irreducible i dele af litteraturen.
- Irreducibilitet er en invariant af to-sidede skiftrum op til topologisk konjugering (se [LM95, example 6.3.2]). Endvidere er et SFT $(\overline{X}_A, \overline{\sigma}_A)$ irreducibelt, netop hvis A er en irreducibel matrix (jf. [LM95, prop.2.2.14]). Ved at lave oplagte ændringer af beviset for [LM95, prop.2.2.14]) ses, at der også gælder, at det en-sidede skift af endelig type (X_A, σ_A) er irreducibelt, netop hvis A er en irreducibel matrix.

1.5 Ækvivalensrelationer mellem SFT

Definition 1.5.1 Lad $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{N}_0)$. Da siger vi, at A er **stærkt skift ækvivalent** med A' , netop hvis der findes et $l \in \mathbb{N}$ samt rektangulære matricer $R_1, \dots, R_l, S_1, \dots, S_l$ over \mathbb{N}_0 , således at

$$A = R_1 S_1, S_1 R_1 = R_2 S_2, \dots, S_{l-1} R_{l-1} = R_l S_l, S_l R_l = A'.$$

Williams har i [Wil73] vist, at spørgsmålet, om hvorvidt to SFT er topologisk konjugerede, ækvivalent kan formuleres som et rent matrix-algebraisk problem (se også [LM95, thm.7.2.7]).

Teorem 1.5.2 (Williams) *Lad $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{N}_0)$ være ikke-degenererede matricer. Da er kant-skiftene hørende til A og A' topologisk konjugerede, netop hvis matricerne A og A' er stærkt skift ækvivalente.*

Der gælder således specielt for ikke-degenererede matricer $A \in \text{Mat}_n(\{0,1\})$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\{0,1\})$, at \overline{X}_A er topologisk konjugeret til $\overline{X}_{A'}$, hvis og kun hvis matricerne A og A' er stærkt skift ækvivalente.

Bemærkning 1.5.3 Der findes en ækvivalens af kvadratiske matricer, kaldet skift ækvivalens. Der gælder, at stærkt skift ækvivalens medfører skift ækvivalens. Der var i lang tid en formodning om at det modsatte også gjaldt – men dette blev afvist af Kim og Roush i 1992. For definition og mere omkring skift ækvivalens henvises til [LM95, §7.3].

Definition 1.5.4 To SFT \overline{X}_A og $\overline{X}_{A'}$ kaldes **strømningsækvivalente** (forkortes **FE**, for *flow equivalent*), netop hvis deres suspensionsstrømninger er ækvivalente. Vi siger også, at to matricer A og A' er strømningsækvivalente el. FE, såfremt \overline{X}_A og $\overline{X}_{A'}$ er strømningsækvivalente – og i givet fald skriver vi, $A \sim_{FE} A'$.

Givet en ikke-degenereret matrix $A = [a_{ij}] \in \text{Mat}_n(\{0,1\})$. Definér en ny matrix $PS(A) \in \text{Mat}_{n+1}(\{0,1\})$ ved

$$PS(A) = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Vha. denne matrix operation har Parry og Sullivan i [PS75] vist følgende

Teorem 1.5.5 (Parry-Sullivan) *Givet to ikke-degenererede matricer $A \in \text{Mat}_n(\{0,1\})$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\{0,1\})$. Da er $A \sim_{FE} A'$, hvis og kun hvis der findes et endeligt antal ikke-degenererede $\{0,1\}$ -matricer $A = A_1, A_2, \dots, A_k = A'$, således at der for alle $i = 1, \dots, k-1$ gælder*

$$A_i = PS(A_{i+1}) \vee PS(A_i) = A_{i+1} \vee \overline{X}_{A_i} \text{ og } \overline{X}_{A_{i+1}} \text{ er topologisk konjugerede.}$$

I [Fra84] har J. Franks klassificeret alle SFT, hvis nabomatricer er irreducible ikke-permutationsmatricer. Han viste følgende

Teorem 1.5.6 (Franks) *Lad $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{N}_0)$ være irreducible ikke-permutationsmatricer. Da er*

$$A \sim_{FE} A' \Leftrightarrow \text{cok}(I - A) \cong \text{cok}(I - A') \wedge \det(I - A) = \det(I - A').$$

1.6 Krydsprodukter

Definition 1.6.1 Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra og betragt \mathbb{T} med det normaliserede Haar mål. Hvis $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathfrak{A}$ er en kontinuert funktion, da er $\Lambda \circ f$ integrabel over \mathbb{T} for ethvert $\Lambda \in \mathfrak{A}^*$ og der findes et $a \in \mathfrak{A}$, således at $\Lambda(a) = \int_{\mathbb{T}} \Lambda(f(t)) dt$ for alle $\Lambda \in \mathfrak{A}^*$ – vi sætter

$$a = \int_{\mathbb{T}} f(t) dt.$$

Af definitionen følger umiddelbart, at integralet er lineært og af følgende sætning følger, at $a \int_{\mathbb{T}} f(t) dt = \int_{\mathbb{T}} a f(t) dt$ for $a \in \mathfrak{A}$ og $f \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$.

Sætning 1.6.2 Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra og lad $T : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ være en kontinuert lineær afbildning. Da er $T \left(\int_{\mathbb{T}} f(t) dt \right) = \int_{\mathbb{T}} (T \circ f)(t) dt$ for ethvert $f \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$.

Bevis: Lad $\Lambda \in \mathfrak{A}^*$ og $f \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ være vilkårlige. Da er $\Lambda \circ T \in \mathfrak{A}^*$, så

$$\Lambda \left(T \left(\int_{\mathbb{T}} f(t) dt \right) \right) = (\Lambda \circ T) \left(\int_{\mathbb{T}} f(t) dt \right) = \int_{\mathbb{T}} \Lambda(T(f(t))) dt = \Lambda \left(\int_{\mathbb{T}} (T \circ f)(t) dt \right).$$

■

Lemma 1.6.3 Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra og lad $f \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ være givet. Da er

$$\left\| \int_{\mathbb{T}} f(t) dt \right\| \leq \int_{\mathbb{T}} \|f(t)\| dt \leq \|f\|_u.$$

Bevis: Sæt $a_0 = \int_{\mathbb{T}} f(t) dt$. Ifølge en følgesætning til Hahn-Banachs sætning ([MV97, prop.6.10]) findes $\Lambda \in \mathfrak{A}^*$, således at $\|\Lambda\| = 1$ og $\Lambda(a_0) = \|a_0\|$. Følgelig er

$$\|a_0\| = \int_{\mathbb{T}} \Lambda(f(t)) dt \leq \int_{\mathbb{T}} |\Lambda(f(t))| dt \leq \int_{\mathbb{T}} \|f(t)\| dt \leq \int_{\mathbb{T}} \|f\|_u dt = \|f\|_u.$$

■

Definition 1.6.4 Et C^* -dynamisk system er et sæt $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ bestående af en C^* -algebra \mathfrak{A} , en lokalkompakt gruppe G samt en kontinuert homomorfi α af G ind i gruppen af automorfier af \mathfrak{A} udstyret med topologien for punktvis konvergens. Dette vil sige, at for hvert $a \in \mathfrak{A}$ er afbildningen $G \ni g \mapsto \alpha_g(a) \in \mathfrak{A}$ kontinuert.

Definition 1.6.5 En **unitær repræsentation** af en lokalkompakt gruppe G er et par (u, \mathfrak{H}) , hvor \mathfrak{H} er et Hilbert rum, u er en kontinuert homomorfi af G ind i gruppen af unitære operatorer på \mathfrak{H} udstyret med den stærke operator topologi. Dette vil sige, at for hvert $h \in \mathfrak{H}$ er afbildningen $G \ni g \mapsto u_g(h) \in \mathfrak{H}$ kontinuert.

Definition 1.6.6 En **kovariant repræsentation** af et C^* -dynamisk system $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ er et sæt (π, u, \mathfrak{H}) , hvor (\mathfrak{H}, π) er en repræsentation af \mathfrak{A} , (u, \mathfrak{H}) er en unitær repræsentation af G og

$$\pi(\alpha_g(a)) = u_g \pi(a) u_g^*$$

for alle $a \in \mathfrak{A}$ og $g \in G$. Dvs. i en kovariant repræsentation er alle automorfierne $\alpha_g, g \in G$ indre.

Definition 1.6.7 Lad $(\mathfrak{A}, \mathbb{T}, \alpha)$ være et C^* -dynamisk system. På $C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ definerer vi involution og foldning, ved at

$$f^*(z) = \alpha_z(f(z^*)^*)$$

$$(f \star g)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(t) \alpha_t(g(t^* z)) dt$$

for alle $f, g \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$. Det vises let, at $C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ herved er en $*$ -algebra.

Enhver kovariant repræsentation (π, u, \mathfrak{H}) af $(\mathfrak{A}, \mathbb{T}, \alpha)$ inducerer en $*$ -homomorfi $\phi: C(\mathbb{T}, \mathfrak{A}) \rightarrow \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ (se [Ped79, 7.6.4]). Således giver enhver kovariant repræsentation (π, u, \mathfrak{H}) af $(\mathfrak{A}, \mathbb{T}, \alpha)$ anledning til en C^* -seminorm på $C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$. Supremum af alle disse normer er en C^* -norm på $C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ og vi betegner C^* -algebrafuldstændiggørelsen af $C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ mht. denne C^* -norm $\mathfrak{A} \times_{\alpha} \mathbb{T}$. Vi kalder $\mathfrak{A} \times_{\alpha} \mathbb{T}$ for **krydsproduktet af \mathfrak{A} med \mathbb{T} under virkningen α** .

Endvidere findes en $*$ -homomorfi $\iota_{\mathfrak{A}}: \mathfrak{A} \rightarrow M(\mathfrak{A} \times_{\alpha} \mathbb{T})$ og en gruppehomomorfi $\iota_{\mathbb{T}}: \mathbb{T} \rightarrow M(\mathfrak{A} \times_{\alpha} \mathbb{T})$, således at $\iota_{\mathbb{T}}(z)$ er unitær, $\iota_{\mathfrak{A}}(\alpha_z(a)) = \iota_{\mathbb{T}}(z) \iota_{\mathfrak{A}}(a) \iota_{\mathbb{T}}(z)^*$ for $a \in \mathfrak{A}$ og $z \in \mathbb{T}$ og $\mathfrak{A} \times_{\alpha} \mathbb{T} \subseteq C^*(\iota_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}) \cup \iota_{\mathbb{T}}(\mathbb{T}))$.

De kovariante repræsentationer af $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ står i en-en korrespondance til de ikke-degenererede repræsentationer af $\mathfrak{A} \times_{\alpha} \mathbb{T}$. Endvidere er $\|f\| \leq \|f\|_1 := \int_{\mathbb{T}} \|f(t)\| dt$ for alle $f \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ (brug lemma 1.6.3 samt [Ped79, prop.7.6.4]).

Sætning 1.6.8 Mængden $\text{span}\{\mathbb{T} \ni z \mapsto z^k a \in \mathfrak{A} \mid k \in \mathbb{Z} \wedge a \in \mathfrak{A}\}$ er tæt i $C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ – og dermed også i $\mathfrak{A} \times_\alpha \mathbb{T}$ (mht. C^* -normen $\|\cdot\|$ på $\mathfrak{A} \times_\alpha \mathbb{T}$).

Bevis: Lad $f \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ og $\varepsilon > 0$ være givne. Da findes $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{T}$ samt åbne omegne $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{T}$ af hhv. z_1, \dots, z_k , således at $\text{diam}(f(A_i)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $i = 1, \dots, k$ og $\bigcup_{i=1}^k A_i = \mathbb{T}$ (ved et kompakthedsargument). Ifølge [Ped89, prop.1.7.12] findes en deling af enheden – der findes altså $g_1, \dots, g_k \in C(\mathbb{T}, [0, 1])$, så $g_i(\mathbb{T} \setminus A_i) \subseteq \{0\}$ for $i = 1, \dots, k$ og $\sum_{i=1}^k g_i(z) = 1$ for alle $z \in \mathbb{T}$. Sæt $g(z) = \sum_{i=1}^k g_i(z)f(z_i)$, $z \in \mathbb{T}$, da er for hvert $z \in \mathbb{T}$

$$\|f(z) - g(z)\| = \left\| \sum_{i=1}^k g_i(z)(f(z) - f(z_i)) \right\| \leq \sum_{i=1}^k |g_i(z)| \|f(z) - f(z_i)\| \leq \sum_{i=1}^k |g_i(z)| \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon,$$

thi $\|f(z) - f(z_i)\| > \frac{1}{2} \varepsilon \Rightarrow z \notin A_i \Rightarrow g_i(z) = 0$. Ifølge Stone-Weierstraß' sætning, [Ped89, thm.4.3.4], findes polynomier $h_1, \dots, h_k \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ i z og $z^* = z^{-1}$, så $\|g_i - h_i\|_u < \frac{\varepsilon}{2k(1+\|f(z_i)\|)}$, $i = 1, \dots, k$. Sæt $h(z) = \sum_{i=1}^k h_i(z)f(z_i)$, da er

$$\|g(z) - h(z)\| \leq \sum_{i=1}^k |g_i(z) - h_i(z)| \|f(z_i)\| \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{2k(1+\|f(z_i)\|)} \varepsilon \|f(z_i)\| \leq \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Altså har vi vist, at $\|f(z) - h(z)\| \leq \varepsilon$ for alle $z \in \mathbb{T}$. Altså er $\|f - h\| \leq \|f - h\|_1 = \int_{\mathbb{T}} \|f(t) - h(t)\| dt \leq \varepsilon$. ■

1.7 Bemærkninger

§§1.3–1.5 er hovedsagligt skrevet på basis af (dele af) [Jen02, §§1.1–1.4], [Car01, §1], [Kit98, §1.1] samt [LM95, §§1.1–1.5, 2.1–2.3, 6.1–6.3, 7.2–7.3 og 13.6].

Afsnittet §1.6 om krydsprodukter: Definition 1.6.1 er taget fra [Rud91, thm.3.20(c), def.3.26 og thm.3.27]. Sætning 1.6.2 og lemma 1.6.3 er to små nyttige hjælpesætninger, som jeg har bevist. Definition 1.6.4, 1.6.5 og 1.6.6 er taget fra [Ped79, §§7.4.1, 7.1.3 hhv. 7.4.8]. Definition 1.6.7 er hovedsageligt taget fra [Ped79, §7.6] og [Bla98, §10.1] mens sætning 1.6.8 er en sætning, jeg har vist til senere brug.

Kapitel 2

Cuntz-Krieger algebraer

Her i kapitlet indføres Cuntz-Krieger algebraerne og der vises mange vigtige resultater om disse. Hovedsagligt, er dette en uddybelse af de originale artikler, [CK80] og [Cun81]. I afsnit 2.1–2.5 indføres Cuntz-Krieger algebraerne, \mathcal{O}_A , samt AF -delalgebraerne \mathcal{F}_A og \mathcal{D}_A , og der vises, at \mathcal{O}_A er entydigt bestemt op til kanonisk isomorfi ved de relationer frembringerne skal opfylde, hvis matricen A opfylder betingelse (I). Siden beregnes K -teorien for \mathcal{O}_A , og idealstrukturen for \mathcal{O}_A og $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K}$ beskrives.

Da materialet frem til og med udregningen af K -teorien, afsnit 2.1–2.6, er indledende studier, behøver dette strengt taget ikke at medtages (med beviser) i specialerapporten. Udeladelse af dette ville bringe specialerapporten ned på et mere acceptabelt omfang. Men en sådan udeladelse ville også gøre materialet svært tilgængeligt for andre studerende, som måtte have interesse i Cuntz-Krieger algebraer. Da denne del allerede var skrevet, har jeg valgt at lade den stå – forhåbentlig til glæde for andre studerende. Jeg har forsøgt at strukturere specialet, således at vejleder og censor kan gå lidt lettere hen over de indledende studier.

2.1 Konstruktion af Cuntz-Krieger algebraerne – den universelle konstruktion

Antagelse 2.1.1 Lad $n \in \mathbb{N}$ og lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en ikke-degenereret matrix. Sæt $\Sigma := \{1, \dots, n\}$.

Definition 2.1.2 Lad s_1, \dots, s_n være elementer i C^* -algebraen \mathfrak{A} . Vi siger da, at $(\mathfrak{A}, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A), netop hvis $\mathfrak{A} = C^*(\{s_i \mid i \in \Sigma\})$ og der for hvert $i \in \Sigma$ gælder, at

$$\begin{aligned} s_i &\neq 0, \\ s_i &= s_i s_i^* s_i, \\ s_i s_i^* s_j s_j^* &= 0 \text{ for alle } j \neq i, \\ s_i^* s_i &= \sum_{j \in \Sigma} A(i, j) s_j s_j^*. \end{aligned}$$

Det er værd at bemærke, at den anden betingelse er ækvivalent med at kræve, at s_1, \dots, s_n er partielle isometrier. Hvis vi således lader $p_i = s_i s_i^*$ og $q_i = s_i^* s_i$, da vil $(\mathfrak{A}, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfylde (A), hvis og kun hvis s_1, \dots, s_n er partielle isometrier forskellige fra nul, som frembringer \mathfrak{A} og der for alle $i \in \Sigma$ gælder, at

$$\begin{aligned} \forall j \in \Sigma : p_i p_j &= \delta_{ij} p_i, \\ q_i &= \sum_{j \in \Sigma} A(i, j) p_j. \end{aligned}$$

For elementer $s_i, i \in \Sigma$ i en C^* -algebra siger vi også, at $(s_i)_{i \in \Sigma}$ opfylder (A), netop hvis $(C^*(\{s_i \mid i \in \Sigma\}), (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A).

Lemma 2.1.3 Der findes partielle isometrier $S_1, \dots, S_n \in \mathbb{B}(\ell_2)$, således at $(C^*(\{S_i \mid i \in \Sigma\}), (S_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A).

Bevis: Sæt $\mathfrak{H} := \ell_2$ og $\mathfrak{H}_i := \overline{\text{span}\{e_{i+kn} \in \ell_2 \mid k \in \mathbb{N}_0\}}$, $i \in \Sigma$. Da er $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_n$. Sæt $\mathfrak{K}_i = \bigoplus_{A(i,j)=1} \mathfrak{H}_j$, $i \in \Sigma$. Da A er ikke-degenereret, er $\mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_n$ uendelig dimensionale (separable) afsluttede underrum af \mathfrak{H} . Klart findes således surjektive isometrier $U_i: \mathfrak{K}_i \rightarrow \mathfrak{H}_i$, $i \in \Sigma$. For hvert $i \in \Sigma$ definerer vi $S_i \in \mathbb{B}(\ell_2)$, ved at $S_i(k+k') := U_i(k)$ for alle $(k, k') \in \mathfrak{K}_i \times \mathfrak{K}_i^\perp$. For hvert $i \in \Sigma$ er da $P_i := S_i S_i^*$ projektionen på \mathfrak{H}_i og $Q_i := S_i^* S_i$ projektionen på \mathfrak{K}_i . Således er S_1, \dots, S_n partielle isometrier og

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbb{B}(\ell_2)} &= P_1 + P_2 + \dots + P_n, \\ \forall i \in \Sigma : Q_i &= \sum_{j \in \Sigma} A(i, j) P_j. \end{aligned}$$

Følgelig opfylder $(C^*(\{S_i \mid i \in \Sigma\}), (S_i)_{i \in \Sigma})$ (A) (thi en sum af projektioner er en projektion, netop hvis de er indbyrdes ortogonale, se [RLL00, exercise 2.4]). ■

Sætning 2.1.4 Der findes en C^* -algebra \mathcal{O}_A med partielle isometrier $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{O}_A$, således at $(\mathcal{O}_A, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A) og at der for alle $(\mathfrak{B}, (s'_i)_{i \in \Sigma})$ opfyldende (A) findes en entydig $*$ -homomorfi $\varphi: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathfrak{B}$ opfyldende $\varphi(s_i) = s'_i$, $i \in \Sigma$.

Bevis: Sæt $\Lambda := \{\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2) \mid (C^*(\lambda(\Sigma)), (\lambda(i))_{i \in \Sigma}) \text{ opfylder (A)}\}$ (der gælder, at $\Lambda \neq \emptyset$ ifølge lemma 2.1.3). Vi lader $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{B}(\ell_2)$ være C^* -algebra-produktet (jf. [RLL00, §5.1]). Sæt $s_i := (\lambda(i))_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{B}(\ell_2)$ (denne er veldefineret, da $\|\lambda(i)\|^2 = \|\lambda(i)^* \lambda(i)\| \leq 1$, $i \in \Sigma$). Sæt $\mathcal{O}_A := C^*(\{s_i \mid i \in \Sigma\})$. En simpel udregning kombineret med lemma 2.1.3 viser, at $(\mathcal{O}_A, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A).

Lad der være givet $(\mathfrak{B}, (s'_i)_{i \in \Sigma})$, som opfylder (A). Da er $\mathfrak{B} = C^*(\{s'_i \mid i \in \Sigma\})$ separabel (jf. lemma B.3), så der findes en tro repræsentation $\phi: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2)$ (jf. [Ped79, cor.3.7.5]). Lad $\lambda_0: \Sigma \ni i \mapsto \phi(s'_i) \in \mathbb{B}(\ell_2)$, da viser en direkte udregning, at $\lambda_0 \in \Lambda$. Lad $\pi_{\lambda_0}: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathbb{B}(\ell_2)$ betegne restriktionen af den λ_0 'te projektion (fra $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{B}(\ell_2)$), da er $\pi_{\lambda_0}(\mathcal{O}_A) \subseteq \phi(\mathfrak{B})$ og således er $\varphi := \phi^{-1} \circ \pi_{\lambda_0}: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathfrak{B}$ en $*$ -homomorfi, som opfylder, at $\varphi(s_i) = \phi^{-1} \circ \lambda_0(i) = \phi^{-1}(\phi(s'_i)) = s'_i$, $i \in \Sigma$.

Lad $\varphi': \mathcal{O}_A \rightarrow \mathfrak{B}$ være en $*$ -homomorfi opfyldende $\varphi'(s_i) = s'_i$, $i \in \Sigma$. Da er φ og φ' ens på den af $\{s_i \mid i \in \Sigma\}$ frembragte $*$ -delalgebra af \mathcal{O}_A . Da denne er tæt i \mathcal{O}_A (jf. lemma B.2), følger ved kontinuitet, at $\varphi = \varphi'$ – heraf entydigheden. ■

Bemærkning 2.1.5 Da universelle objekter er entydigt bestemt på nær kanonisk isomorfi, kalder vi \mathcal{O}_A for **Cuntz-Krieger algebraen** hørende til matricen A . Afbildningen φ i foregående sætning kalder vi den kanoniske $*$ -homomorfi.

2.2 C^* -algebraer frembragt af partielle isometrier

Antagelse 2.2.1 Lad i det følgende $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en given ikke-degenereret matrix og lad der være givet $(\mathcal{O}, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfyldende (A), hvor $\Sigma = \{1, \dots, n\}$. Som sædvanlig lader vi fremover $p_i = s_i s_i^*$ betegne billedprojektion og $q_i = s_i^* s_i$ betegne støtteprojektion for s_i for hvert $i \in \Sigma$.

Lemma 2.2.2 For alle $i, j \in \Sigma$ gælder der

(a) C^* -algebraen \mathcal{O} har enhed $\mathbb{1}_{\mathcal{O}} = p_1 + \dots + p_n$.

(b) $p_i s_j = \delta_{ij} s_i$ og $s_j^* p_i = \delta_{ij} s_i^*$.

(c) $q_i s_j = A(i, j) s_j$ og $s_j^* q_i = A(i, j) s_j^*$.

(d) $s_i^* s_j = \delta_{ij} q_i$

(e) $q_i p_j = p_j q_i = A(i, j) p_j$

Bevis: (a): Sæt $p = p_1 + \dots + p_n$. Da p_1, \dots, p_n er indbyrdes ortogonale, er p en projektion. Da $s_i = p_i s_i$, er klart $p s_i = p p_i s_i = s_i$ for $i \in \Sigma$. Da $q_i p = \sum_{j \in \Sigma} \sum_{k \in \Sigma} A(i, j) p_j p_k = \sum_{j \in \Sigma} A(i, j) p_j = q_i$, er $(\mathbb{1} - p) q_i (\mathbb{1} - p) = 0$ og dermed $\|s_i (\mathbb{1} - p)\|^2 = \|(\mathbb{1} - p) q_i (\mathbb{1} - p)\| = 0$ (hvor vi evt. har tilføjet en enhed), dvs. $s_i p = s_i$. Lemma B.2 samt et tæthedsargument giver nu, at \mathcal{O} har enhed p .

(b): $p_i s_j = p_i p_j s_j = \delta_{ij} p_i s_i = \delta_{ij} s_i$.

(c): $q_i s_j = \sum_{k \in \Sigma} A(i, k) p_k s_j = \sum_{k \in \Sigma} A(i, k) \delta_{kj} s_j = A(i, j) s_j$

(d): $s_i^* s_j = (s_i^* p_i) (p_j s_j) = \delta_{ij} s_i^* p_i s_i = \delta_{ij} q_i$.

(e): Følger direkte af (c). ■

Definition 2.2.3 For hvert multiindex $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ sætter vi $s_\mu = s_{\mu_1} s_{\mu_2} \dots s_{\mu_k}$ med den konvention, at $s_\emptyset = \mathbb{1}_{\mathcal{O}}$. Endvidere sætter vi $p_\mu = s_\mu s_\mu^*$ og $q_\mu = s_\mu^* s_\mu$.

Lemma 2.2.4 For hvert multiindex μ er s_μ en partiel isometri og der gælder, at

$$\mu \in \mathcal{M}_A \Leftrightarrow s_\mu \neq 0 \Leftrightarrow p_\mu \neq 0 \Leftrightarrow q_\mu \neq 0.$$

Hvis $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathcal{M}_A$ med $k > 0$, så er $q_\mu = q_{\mu_k}$.

Bevis: Lad der være givet $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathcal{M}_A$ med $k > 0$. Da er $s_{\mu_{j+1}}^* q_{\mu_j} s_{\mu_{j+1}} = q_{\mu_{j+1}}$ for $j = 1, \dots, k-1$ ifølge lemma 2.2.2(c). Således er

$$q_\mu = s_{\mu_k}^* \dots s_{\mu_2}^* q_{\mu_1} s_{\mu_2} \dots s_{\mu_k} = s_{\mu_k}^* \dots s_{\mu_3}^* q_{\mu_2} s_{\mu_3} \dots s_{\mu_k} = \dots = s_{\mu_k}^* q_{\mu_{k-1}} s_{\mu_k} = q_{\mu_k}.$$

Heraf følger umiddelbart, at s_μ er en partiel isometri og at $q_\mu = q_{\mu_k} \neq 0$.

Implikationen $\mu \in \mathcal{M}_A \Leftarrow s_\mu \neq 0$ følger af, at der ifølge lemma 2.2.2(c) gælder, at

$$s_i s_j = s_i q_i s_j = A(i, j) s_i s_j.$$

De andre implikationer følger nu af C^* -ligheden $\|q_\mu\| = \|s_\mu\|^2 = \|s_\mu^*\|^2 = \|p_\mu\|$. ■

Lemma 2.2.5 *Lad der være givet to ikke-tomme multiindex $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ og $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$. Hvis $s_\mu^* s_\nu \neq 0$, så er*

(a) $\mu = \nu$ og $s_\mu^* s_\nu = q_\mu = q_{\mu_k}$, hvis $|\mu| = |\nu|$,

(b) $\mu = \nu\mu'$ og $s_\mu^* s_\nu = s_{\mu'}^* q_\nu = s_{\mu'}^* q_{\nu_r} = s_{\mu'}^*$ for et $\mu' \in \mathcal{M}_A$, hvis $|\mu| > |\nu|$,

(c) $\nu = \mu\nu'$ og $s_\mu^* s_\nu = q_\mu s_{\nu'} = q_{\mu_k} s_{\nu'} = s_{\nu'}$ for et $\nu' \in \mathcal{M}_A$, hvis $|\mu| < |\nu|$.

Bevis: (a): At $\mu = \nu$ følger umiddelbart ved induktion af, at $s_i^* s_j = \delta_{ij} q_i$, $q_i s_j = A(i, j) s_j$ og $\mu, \nu \in \mathcal{M}_A$ (lemma 2.2.2(d) og (c) samt lemma 2.2.4). At $q_\mu = q_{\mu_k}$ er vist i lemma 2.2.4.

(b): Skriv μ på formen $\mu = \alpha\mu'$ med $\alpha, \mu' \in \mathcal{M}_A$ og $|\alpha| = |\nu|$. Da $s_\mu^* s_\nu = s_\alpha^* s_{\mu'}^* s_\nu = s_\alpha^* s_\nu \neq 0$, er $s_\alpha^* s_\nu \neq 0$. Af (a) følger, at $\alpha = \nu$ og $s_\alpha^* s_\nu = q_\nu = q_{\nu_r}$. Da første element i μ' er μ_{r+1} , $\mu_r = \nu_r$ og $A(\mu_r, \mu_{r+1}) = 1$, følger af lemma 2.2.2(c), at $s_\mu^* s_\nu = s_{\mu'}^* q_{\nu_r} = s_{\mu'}^*$.

(c): Følger direkte af (b), da også $s_\nu^* s_\mu = (s_\mu^* s_\nu)^* \neq 0$. ■

Til dette lemma haves umiddelbart følgende korollar

Korollar 2.2.6 *For alle multiindex μ og ν af samme længde, $|\mu| = |\nu|$, gælder, at*

$$s_\mu^* s_\nu = \delta_{\mu, \nu} q_\mu \quad \text{og} \quad p_\mu p_\nu = \delta_{\mu, \nu} p_\mu.$$

Lemma 2.2.7 *Ethvert ord i $s_i, s_i^*, i \in \Sigma$ (dvs. elementer i $\{a_1 \cdots a_k \mid a_1, \dots, a_k \in \{s_1, s_1^*, \dots, s_n, s_n^*\}\}$), kan skrives som en linearkombination af elementer fra $\{s_\mu p_i s_\nu^* \mid i \in \Sigma \wedge \mu, \nu \in \mathcal{M}_A\}$.*

Bevis: Antag at der er givet et ord $w \neq 0$. Klart kan w skrives på formen $w = s_{\mu^1} s_{\nu^1}^* \cdots s_{\mu^k} s_{\nu^k}^*$, hvor $|\mu^i| + |\nu^i| > 0$ for $i = 1, \dots, k$. For alle multiindex μ og ν med $|\mu| \neq |\nu|$ og $s_\mu^* s_\nu \neq 0$ er $s_\mu^* s_\nu$ lig $s_{\nu'}$ eller $s_{\mu'}$ for et passende $\nu' \in \mathcal{M}_A$ ifølge lemma 2.2.5. Således kan vi w.l.o.g. antage, at $|\nu^i| = |\mu^{i+1}| \neq 0$ for $i = 1, \dots, k-1$. Således er $w = s_{\mu^1} q_{i_1} \cdots q_{i_{k-1}} s_{\nu^k}^*$ for passende $i_1, \dots, i_{k-1} \in \Sigma$. Da hvert q_i er en linearkombination af elementerne p_1, \dots, p_n følger det ønskede umiddelbart. ■

2.3 AF -algebraerne

Antagelse 2.3.1 Lad i det følgende $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en given ikke-degenereret matrix og lad der være givet $(\mathcal{O}, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfyldende (A) , hvor $\Sigma = \{1, \dots, n\}$.

Definition 2.3.2 For alle $i \in \Sigma$ og alle multiindex μ og ν af samme længde, $|\mu| = |\nu| \in \mathbb{N}_0$, sættes

$$e_{\mu, \nu}^i := s_\mu p_i s_\nu^*,$$

og vi definerer en række del- C^* -algebraer af \mathcal{O} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k^i(\mathcal{O}) &:= C^*(\{e_{\mu, \nu}^i \mid |\mu| = |\nu| = k\}), & \text{for hvert } k \in \mathbb{N}_0 \text{ og hvert } i \in \Sigma, \\ \mathcal{F}_k(\mathcal{O}) &:= C^*(\{e_{\mu, \nu}^i \mid i \in \Sigma \wedge |\mu| = |\nu| = k\}), & \text{for hvert } k \in \mathbb{N}_0, \\ \mathcal{F}(\mathcal{O}) &:= C^*(\{e_{\mu, \nu}^i \mid i \in \Sigma \wedge |\mu| = |\nu|\}), \\ \mathcal{D}_k(\mathcal{O}) &:= C^*(\{p_\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_A^k\}), & \text{for hvert } k \in \mathbb{N}_0, \\ \mathcal{D}(\mathcal{O}) &:= C^*(\{p_\mu \mid \mu \in \mathcal{M}_A\}). \end{aligned}$$

Endvidere lader vi $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ betegne $*$ -algebraen frembragt af $\{s_1, \dots, s_n\}$ (jf. i øvrigt også lemma B.2).

Sætning 2.3.3 *Der gælder:*

(a) For alle $i \in \Sigma$ og alle multiindex μ og ν af samme længde, $|\mu| = |\nu| \in \mathbb{N}_0$, gælder der, at

$$e_{\mu,\nu}^i \neq 0 \Leftrightarrow \mu i, \nu i \in \mathcal{M}_A.$$

(b) For alle $i, j \in \Sigma$ og alle multiindex μ, μ', ν og ν' af samme længde, $|\mu| = |\mu'| = |\nu| = |\nu'| \in \mathbb{N}_0$, er

$$e_{\mu,\nu}^i e_{\mu',\nu'}^j = \delta_{i,j} \delta_{\nu,\nu'} e_{\mu,\nu}^i$$

forudsat at $\mu i, \nu i, \mu' j, \nu' j \in \mathcal{M}_A$ (eller ækvivalent at $e_{\mu,\nu}^i, e_{\mu',\nu'}^j \neq 0$).

(c) Elementerne blandt $\{e_{\mu,\nu}^i \mid i \in \Sigma, |\mu| = |\nu| = k\}$, som er forskellige fra nul, udgør således et system af matrix enheder, som frembringer den endeligdimensionale C^* -algebra $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ (disse udgør endda en vektorrumsbasis for $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ – se [RLL00, §7.1] for mere om matrixenheder).

(d) Givet $k \in \mathbb{N}_0$. For hvert $i \in \Sigma$ er da $\mathcal{F}_k^i(\mathcal{O})$ en simpel del- C^* -algebra af $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$. Endvidere er $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ den (indre) direkte sum af $\mathcal{F}_k^1(\mathcal{O}), \dots, \mathcal{F}_k^n(\mathcal{O})$ (som C^* -algebraer):

$$\mathcal{F}_k(\mathcal{O}) = \mathcal{F}_k^1(\mathcal{O}) \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_k^n(\mathcal{O}).$$

(e) Der gælder for $k \in \mathbb{N}_0$, at $\mathcal{F}_k(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{F}_{k+1}(\mathcal{O})$. Mere specifikt, så er for alle $i \in \Sigma$ og multiindex μ og ν af samme længde

$$e_{\mu,\nu}^i = \sum_{j \in \Sigma} e_{\mu i, \nu i}^j.$$

(f) Der gælder, at

$$\mathcal{F}(\mathcal{O}) := \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k(\mathcal{O})},$$

så $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ er den induktive grænse af endelig dimensionale C^* -algebraer – altså er $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ en AF-algebra.

Bevis: (a): For $i \in \Sigma$ og $|\mu| = |\nu|$ er

$$e_{\mu,\nu}^i = s_{\mu i} s_{\nu i}^* \neq 0 \Rightarrow s_{\mu i} \neq 0 \wedge s_{\nu i} \neq 0 \Rightarrow \mu i, \nu i \in \mathcal{M}_A$$

og

$$e_{\mu,\nu}^i = 0 \Rightarrow s_{\mu i}^* (s_{\mu i} s_{\nu i}^*) s_{\nu i} = 0 \Rightarrow q_{\mu i} q_{\nu i} = 0$$

og hvis $\mu i, \nu i \in \mathcal{M}_A$, så er $q_{\mu i} = q_i = q_{\nu i} \neq 0$ (jf. lemma 2.2.5).

(b): Lad der være givet $i, j \in \Sigma$ og multiindex μ, μ', ν og ν' af samme længde, $|\mu| = |\mu'| = |\nu| = |\nu'|$. Hvis $\nu i \in \mathcal{M}_A$, da følger af lemma 2.2.5, at

$$e_{\mu,\nu}^i e_{\mu',\nu'}^j = s_{\mu i} s_{\nu i}^* s_{\mu' j} s_{\nu' j}^* = \delta_{\nu i, \mu' j} s_{\mu i} q_i s_{\nu' j}^* = \delta_{\nu, \mu'} \delta_{i, j} s_{\mu} s_i s_i^* s_i s_i^* s_{\nu'}^* = \delta_{\nu, \mu'} \delta_{i, j} e_{\mu, \nu'}^i.$$

(c): Dette er klart pga. del (b) ovenover (se evt. [RLL00, §7.1]).

(d): Dette følger af det foregående samt [RLL00, §7.1].

(e): For $i \in \Sigma$ og $\mu, \nu \in \mathcal{M}_A^k$ er

$$e_{\mu,\nu}^i = s_{\mu} s_i s_i^* s_{\nu}^* = \sum_{j \in \Sigma} s_{\mu} s_i p_j s_i^* s_{\nu}^* = \sum_{j \in \Sigma} e_{\mu i, \nu i}^j.$$

(f): Dette er klart pga. det foregående. ■

Sætning 2.3.4 *Der gælder:*

(a) For hvert $k \in \mathbb{N}_0$ er $\mathcal{D}_k(\mathcal{O})$ en abelsk C^* -algebra og projektionerne $(p_{\mu})_{\mu \in \mathcal{M}_A^k}$ er indbyrdes ortogonale og udgør en vektorrumsbasis for

$$\mathcal{D}_k(\mathcal{O}) = \text{span}\{p_{\mu} \mid \mu \in \mathcal{M}_A^k\} = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}_A^k} \mathbb{C} p_{\mu}.$$

(b) For hvert $k \in \mathbb{N}_0$ er $\mathcal{D}_k(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{D}_{k+1}(\mathcal{O})$. Mere specifikt, så er for hvert $\mu \in \mathcal{M}_A^k$

$$p_{\mu} = \sum_{j \in \Sigma} p_{\mu j}.$$

(c) Der gælder, at

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_k(\mathcal{O})},$$

så $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ er den induktive grænse af endeligdimensionale abelske C^* -algebraer – altså er $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ en abelsk AF-algebra.

Bevis: (a): Husk, at for et multiindex μ af længde k er $p_\mu \neq 0 \Leftrightarrow \mu \in \mathcal{M}_A$. Af korollar 2.2.6 ses, at projektionerne $(p_\mu)_{\mu \in \mathcal{M}_A^k}$ er indbyrdes ortogonale og dermed er $\mathcal{D}_k(\mathcal{O}) = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}_A^k} \mathbb{C}p_\mu$ (den indre direkte sum af C^* -algebraer).

(b): Da $\mathbf{1}_{\mathcal{O}} = \sum_{j \in \Sigma} p_j$, har vi for ethvert multiindex μ , at

$$p_\mu = s_\mu s_\mu^* = \sum_{j \in \Sigma} s_\mu p_j s_\mu^* = \sum_{j \in \Sigma} p_{\mu j}.$$

(c): Er klart pga. det foregående (kommutativiteten følger ved et tæthedsargument). ■

Definition 2.3.5 Vi definerer en positiv lineær afbildning $\phi_{\mathcal{O}}: \mathcal{O} \ni x \mapsto \sum_{j \in \Sigma} s_j x s_j^* \in \mathcal{O}$. Bemærk, at $\phi_{\mathcal{O}}^k(x) = \sum_{|\mu|=k} s_\mu x s_\mu^*$ for alle $k \in \mathbb{N}_0$ og $x \in \mathcal{O}$. Af korollar 2.2.6 følger, at der for alle $k \in \mathbb{N}_0$, $\mu \in \mathcal{M}_A^k$ og $x \in \mathcal{O}$ gælder, at $s_\mu^* \phi_{\mathcal{O}}^k(x) = q_\mu x s_\mu^*$ og $\phi_{\mathcal{O}}^k(x) s_\mu = s_\mu x q_\mu$.

Lemma 2.3.6 Vi har, at $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = C^*(\{\phi_{\mathcal{O}}^k(p_i) \mid i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}_0\})$ og at afbildningen $\phi_{\mathcal{O}}|_{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ er en isometrisk endomorfi af $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Bevis: Beviset føres i flere dele.

Første del: Vi viser, at $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = C^*(\{\phi_{\mathcal{O}}^k(p_i) \mid i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}_0\})$. Da $\phi_{\mathcal{O}}^k(p_i) = \sum_{|\mu|=k} p_{\mu i} \in \mathcal{D}_{k+1}(\mathcal{O})$ for alle $i \in \Sigma$ og $k \in \mathbb{N}_0$, er det klart, at $\mathfrak{B} := C^*(\{\phi_{\mathcal{O}}^k(p_i) \mid i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}_0\}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{O})$. Bemærk, at $p_\mu \phi_{\mathcal{O}}^k(p_i) = s_\mu q_\mu p_i s_\mu^* = p_{\mu i}$ for alle multiindex μ med længde $|\mu| = k$. Ved induktion ses således, at

$$p_\mu = p_{\mu_1} \phi_{\mathcal{O}}(p_{\mu_2}) \phi_{\mathcal{O}}^2(p_{\mu_3}) \cdots \phi_{\mathcal{O}}^{k-1}(p_{\mu_k}) \in \mathfrak{B}$$

for ethvert multiindex $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$. Dermed er også $\mathcal{D}(\mathcal{O}) \subseteq \mathfrak{B}$.

Anden del: Vi viser, at $\phi_{\mathcal{O}}$ er kontinuert. For hvert $x \in \mathcal{O}$ er

$$\|\phi_{\mathcal{O}}(x)\| \leq \sum_{j \in \Sigma} \|s_j x s_j^*\| \leq \sum_{j \in \Sigma} \|s_j\| \|x\| \|s_j^*\| = n \|x\|.$$

Tredje del: Vi viser, at $\phi_{\mathcal{O}}|_{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ er en isometri. Lad $x = \sum_{\mu \in \mathcal{M}_A^k} \lambda_\mu p_\mu$ være et vilkårligt element i $\mathcal{D}_k(\mathcal{O})$ (jf. sætning 2.3.4(a)). Da er $\|x\| = \max_{\mu \in \mathcal{M}_A^k} |\lambda_\mu|$. Endvidere er $\phi_{\mathcal{O}}(x) = \sum_{j \in \Sigma} \sum_{\mu \in \mathcal{M}_A^k} \lambda_\mu p_{j\mu}$, og således er

$$\|\phi_{\mathcal{O}}(x)\| = \max\{|\lambda_\mu| \mid j \in \Sigma \wedge \mu \in \mathcal{M}_A^k \wedge j\mu \in \mathcal{M}_A^{k+1}\} = \|x\|,$$

da A er antaget ikke-degenereret (og der således for hvert $\mu \in \mathcal{M}_A$ findes et $j \in \Sigma$, så $j\mu \in \mathcal{M}_A$). Da $\phi_{\mathcal{O}}$ er en kontinuert, lineær afbildning, som er isometrisk på $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_k(\mathcal{O})$, som er et tæt underrum af $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, følger, at $\phi_{\mathcal{O}}|_{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ er isometrisk.

Fjerde del: Vi viser nu, at $\phi_{\mathcal{O}}|_{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ er en endomorfi. Vi har klart, at $\phi_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}_k(\mathcal{O})) \subseteq \mathcal{D}_{k+1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{O})$ for hvert $k \in \mathbb{N}_0$. Således er $\phi_{\mathcal{O}}(\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_k(\mathcal{O})) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{O})$ og ved et tæthedsargument ses, at $\phi_{\mathcal{O}}(\mathcal{D}(\mathcal{O})) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Afbildningen $\phi_{\mathcal{O}}$ er klart $*$ -bevarende. For ethvert multiindex μ og ν med samme længde $|\mu| = |\nu| = k$ er ifølge lemma 2.2.2(d) og korollar 2.2.6

$$\phi_{\mathcal{O}}(p_\mu) \phi_{\mathcal{O}}(p_\nu) = \sum_{j \in \Sigma} s_j p_\mu s_j^* s_j p_\nu s_j^* = \sum_{j \in \Sigma} p_{j\mu} p_{j\nu} = \delta_{\mu, \nu} \sum_{j \in \Sigma} p_{j\mu} = \phi_{\mathcal{O}}(\delta_{\mu, \nu} p_\mu) = \phi_{\mathcal{O}}(p_\mu p_\nu),$$

og således er $\phi_{\mathcal{O}}|_{\mathcal{D}_k(\mathcal{O})}$ en $*$ -homomorfi. Ved et tæthedsargument ses nemt, at $\phi_{\mathcal{O}}|_{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ er en $*$ -homomorfi. ■

Definition 2.3.7 Lad M og N være kompakte topologiske Hausdorff rum. Vi betragter så C^* -algebraerne $C(M)$ og $C(N)$ af kontinuerte funktioner med værdier i \mathbb{C} . Givet en kontinuert afbildning $\phi: M \rightarrow N$, da defineres ved $\phi^\sharp: C(N) \rightarrow C(M)$,

$$\phi^\sharp(f) = f \circ \phi, \quad f \in C(N),$$

en $*$ -homomorfi (efterveses umiddelbart).

Definition 2.3.8 Vi betragter C^* -algebraen $C(X_A)$. For hvert $i \in \Sigma$ lader vi χ_i betegne indikatorfunktionen for cylindermængden $C_A(i) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_A \mid x_1 = i\}$.

Sætning 2.3.9 Hvis vi for hvert $k \in \mathbb{N}_0$ lader \mathfrak{B}_k betegne C^* -algebraen frembragt af $\{\chi_{C_A(\mu)} \mid \mu \in \mathcal{M}_A^k\}$, så gælder

(a) Projektionerne $(\chi_{C_A(\mu)})_{\mu \in \mathcal{M}_A^k}$ er indbyrdes ortogonale og der gælder, at

$$\mathfrak{B}_k = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}_A^k} \mathbb{C}\chi_{C_A(\mu)}.$$

(b) For hvert $k \in \mathbb{N}_0$ er $\mathfrak{B}_k \subseteq \mathfrak{B}_{k+1}$. Mere specifikt, så er for hvert $\mu \in \mathcal{M}_A^k$

$$\chi_{C_A(\mu)} = \sum_{j \in \Sigma} \chi_{C_A(\mu j)}.$$

(c) Der gælder, at

$$C(X_A) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{B}_k},$$

så $C(X_A)$ er den induktive grænse af $(\mathfrak{B}_k)_{k=0}^{\infty}$.

Bevis: (a): Ses nemt.

(b): Dette er klart!

(c): Givet $f \in C(X_A)$ og $\varepsilon > 0$. Sæt $\mathcal{U} := \{C_A(\mu) \mid k \in \mathbb{N} \wedge \mu \in \mathcal{M}_A^k \wedge \text{diam}(f(C_A(\mu))) < \varepsilon\}$. Da f er kontinuert, udgør mængderne i \mathcal{U} en åben overdækning af X_A . Da X_A er kompakt, kan vi udtynde denne til en endelig åben overdækning. Lad $k_0 \in \mathbb{N}$ være det største k , der optræder heri. Da er $\text{diam}(f(C_A(\mu))) < \varepsilon$ for alle $\mu \in \mathcal{M}_A^{k_0}$.

Vælg for hvert $\mu \in \mathcal{M}_A^{k_0}$ et $x_\mu \in C_A(\mu)$ og sæt $f' := \sum_{\mu \in \mathcal{M}_A^{k_0}} f(x_\mu)\chi_{C_A(\mu)}$. For hvert $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_A$ er da $|f(x) - f'(x)| = |f(x) - f(x_\mu)| < \varepsilon$, hvor $\mu = (x_1, \dots, x_{k_0})$. Så $\|f - f'\|_u \leq \varepsilon$ og $f' \in \mathfrak{B}_{k_0}$. ■

Sætning 2.3.10 Der findes netop en $*$ -isomorfi $\omega: \mathcal{D}(\mathcal{O}) \rightarrow C(X_A)$, som opfylder, at $\omega(p_i) = \chi_i$ for alle $i \in \Sigma$ og $\omega\phi_{\mathcal{O}}\omega^{-1}(f) = \sigma_A^\sharp(f)$ for alle $f \in C(X_A)$. Endvidere gælder, at $\omega\phi_{\mathcal{O}}^k = (\sigma_A^\sharp)^k\omega$ for $k \in \mathbb{N}$.

Bevis: Eksistens: For hvert $k \in \mathbb{N}_0$ lader vi som i foregående sætning $\mathfrak{B}_k := C^*(\{\chi_{C_A(\mu)} \mid \mu \in \mathcal{M}_A^k\})$.

Afbildningen $p_\mu \mapsto \chi_{C_A(\mu)}$, $\mu \in \mathcal{M}_A^k$ udvides ved linearitet til en $*$ -isomorfi $\omega_k: \mathcal{D}_k(\mathcal{O}) \rightarrow \mathfrak{B}_k$ for hvert $k \in \mathbb{N}_0$. Der gælder ifølge sætning 2.3.4(b) og 2.3.9(b) for hvert $k \in \mathbb{N}_0$, at $\omega_{k+1}|_{\mathcal{D}_k(\mathcal{O})} = \omega_k$. Således induceres en $*$ -isomorfi $\omega: \mathcal{D}(\mathcal{O}) \rightarrow C(X_A)$.

Bemærk, at $\sigma_A^\sharp(\chi_{C_A(\mu)}) = \sum_{j \in \Sigma} \chi_{C_A(\mu j)}$ for alle $\mu \in \mathcal{M}_A$. Således er $\omega\phi_{\mathcal{O}}\omega^{-1} = \sigma_A^\sharp$ på $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{B}_k$, og ved tæthed således også på hele $C(X_A)$ (både $\phi_{\mathcal{O}}$ og σ_A^\sharp er $*$ -homomorfier og dermed kontinuerte).

Entydighed: Antag, at der er givet en $*$ -isomorfi $\omega: \mathcal{D}(\mathcal{O}) \rightarrow C(X_A)$, som opfylder, at $\omega(p_i) = \chi_i$ for alle $i \in \Sigma$ og $\omega\phi_{\mathcal{O}}\omega^{-1}(f) = \sigma_A^\sharp(f)$ for alle $f \in C(X_A)$. Mao. er $\omega\phi_{\mathcal{O}} = \sigma_A^\sharp\omega$. Ved induktion ses, at $\omega(\phi^k(p_i)) = (\sigma_A^\sharp)^k(\chi_i)$ for alle $i \in \Sigma$ og $k \in \mathbb{N}_0$. Da elementerne $\phi^k(p_i)$ frembringer $\mathcal{D}(\mathcal{O})$, er ω entydigt bestemt herved. ■

Lemma 2.3.11 For ethvert $k \in \mathbb{N}_0$ kommuterer ethvert element i $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ med samtlige elementer i $\phi_{\mathcal{O}}^k(\mathcal{D}(\mathcal{O}))$ og med samtlige elementer i $\phi_{\mathcal{O}}^{k+1}(\mathcal{O})$.

Bevis: Givet $k \in \mathbb{N}_0$, $x_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, $x_2 \in \mathcal{O}$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}_A^k$ og $i \in \Sigma$, da er $p_i, q_\mu, q_\nu \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. Antag, at $\mu i, \nu i \in \mathcal{M}_A$. Følgelig er

$$\phi_{\mathcal{O}}^k(x_1)s_\mu p_i s_\nu^* = s_\mu x_1 q_\mu p_i q_\nu s_\nu^* = s_\mu q_\mu p_i q_\nu x_1 s_\nu^* = s_\mu p_i q_\nu x_1 s_\nu^* = s_\mu p_i s_\nu^* \phi_{\mathcal{O}}^k(x_1).$$

Endvidere er

$$\begin{aligned} s_{\mu i} s_{\nu i}^* \phi_{\mathcal{O}}^{k+1}(x_2) &= s_{\mu i} s_{\nu i}^* s_{\nu i} x_2 s_{\nu i}^* = s_{\mu i} q_i x_2 s_{\nu i}^* = s_{\mu i} x_2 s_{\nu i}^* = s_{\mu i} x_2 q_i s_{\nu i}^* = s_{\mu i} x_2 s_{\mu i}^* s_{\mu i} s_{\nu i}^* \\ &= \phi_{\mathcal{O}}^{k+1}(x_2) s_{\mu i} s_{\nu i}^*. \end{aligned}$$

Da elementer blandt $\{e_{\mu, \nu}^i \mid i \in \Sigma, \mu, \nu \in \mathcal{M}_A^k\}$, som er forskellige fra 0, udgør en vektorrumsbasis for $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$, følger umiddelbart det ønskede. ■

2.4 Betingelse (I)

Antagelse 2.4.1 Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en given ikke-degenereret matrix og sæt $\Sigma := \{1, \dots, n\}$.

Definition 2.4.2 Ved en **løkke** baseret i $i \in \Sigma$, forstås en sti fra i til i selv i grafen G_A . Ved en **simpel løkke** baseret i $i \in \Sigma$, forstås en løkke baseret i $i \in \Sigma$, hvori ingen knuder gentages undervejs.

Definition 2.4.3 Vi lader Σ_0 betegne mængden af alle $i \in \Sigma$, som opfylder, at der findes to forskellige multiindex $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k), \nu = (\nu_1, \dots, \nu_l) \in \mathcal{M}_A$, så $\mu_1 = \nu_1 = \mu_k = \nu_l = i$, $k, l \geq 2$ og $\mu_2, \dots, \mu_{k-1}, \nu_2, \dots, \nu_{l-1} \neq i$. Mao. betegner Σ_0 mængden af knuder $i \in \Sigma$ i grafen G_A , hvorom der gælder, at der findes mindst to forskellige løkker baseret i i af samme længde.

Definition 2.4.4 Vi siger, at en matrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylder **betingelse (I)**, netop hvis A er ikke-degenereret og der for hvert $i \in \Sigma$ findes et multiindex $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathcal{M}_A$, $k \geq 1$, således at $\mu_1 = i$ og $\mu_k \in \Sigma_0$.

Definition 2.4.5 Vi definerer relationen \succeq på Σ , ved at $i \succeq j$, netop hvis overgang fra i til j er mulig (eller mere præcis: netop hvis der findes et $k \in \mathbb{N}$, så $A^k(i, j) > 0$). Vi skriver $i \preceq j$, hvis og kun hvis $j \succeq i$. Det er klart, at \succeq er transitiv. Vi definerer nu relationen \sim på Σ , ved at $i \sim j$, netop hvis $i \succeq j \wedge j \succeq i$. Det er klart, at \sim er en ækvivalensrelation på delmængden $\{i \in \Sigma \mid i \succeq i\}$ af Σ , og vi betegner de tilhørende ækvivalensklasser $[i]$, hvor $i \succeq i$. Definér

$$\Gamma_A := \{i \in \Sigma \mid i \succeq i\} / \sim = \{[i] \mid i \succeq i\}.$$

Relationen \succeq inducerer en ordensrelation på Γ_A , som vi også vil betegne \succeq . Mere præcis, så siger vi, at

$$\gamma_1 \succeq \gamma_2 \Leftrightarrow \forall i \in \gamma_1 \forall j \in \gamma_2 (i \succeq j).$$

Det eftervises umiddelbart, at \succeq er en ordensrelation samt at $\gamma_1 \succeq \gamma_2 \Leftrightarrow \exists i \in \gamma_1 \exists j \in \gamma_2 (i \succeq j)$. Elementerne i Γ_A kaldes de **irreducible komponenter** (se i øvrigt lemmaet nedenunder) og elementerne i $\Sigma \setminus (\bigcup \Gamma_A)$ kaldes **overgangstilstande**.

Bemærkning 2.4.6 Det er en oplagt men vigtig observation, at der af kravet, om at A er ikke-degenereret, følger, at

$$\forall i \in \Sigma \exists \gamma \in \Gamma_A \forall j \in \gamma : i \succeq j$$

$$\forall i \in \Sigma \exists \gamma \in \Gamma_A \forall j \in \gamma : j \succeq i.$$

Definition 2.4.7 For en ikke-tom delmængde γ af Σ , lader vi A_γ betegne den principale undermatrix $(A(i, j))_{i, j \in \gamma}$ af A , der fås ved at restringere A til γ .

Lemma 2.4.8 Undermatricen A_γ er irreducibel for alle $\gamma \in \Gamma_A$. Og der gælder, at A_γ er en permutationsmatrix, netop hvis $\gamma \cap \Sigma_0 = \emptyset$ (for $\gamma \in \Gamma_A$).

Bevis: Det er klart fra definitionen, at A_γ er irreducibel for alle $\gamma \in \Gamma_A$.

Antag, at for et givet $\gamma \in \Gamma_A$ er A_γ en permutationsmatrix og lad $i \in \gamma$ være givet. Lad (i_1, \dots, i_k) og (j_1, \dots, j_k) repræsentere to løkker baseret i i (dvs. $i_1 = i_k = j_1 = j_k = i$). Da er $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k \in \gamma$ og således er $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k)$. Da løkkerne var vilkårlige, er $i \notin \Sigma_0$.

Antag nu i stedet, at A_γ ikke er en permutation for et $\gamma \in \Gamma_A$. Da findes et $i \in \gamma$, så $A(i, j) = 1$ for mindst to $j \in \gamma$. Lad således $A(i, i_1) = A(i, j_1) = 1$ for $i_1, j_1 \in \gamma$ med $i_1 \neq j_1$. Da findes $i_2, \dots, i_k, j_2, \dots, j_r \in \gamma$, så $\mu = (i_1, \dots, i_k), \nu = (j_1, \dots, j_r) \in \mathcal{M}_A$ og $i_k = j_r = i$. Således repræsenterer $i\mu\nu$ og $i\nu\mu$ to forskellige løkker baseret i i af samme længde. ■

Sætning 2.4.9 Følgende udsagn er ækvivalente

(a) Matricen A opfylder betingelse (I).

(b) X_A har ingen isolerede punkter

(c) For alle $\gamma \in \Gamma_A$ gælder, at hvis A_γ er en permutationsmatrix, så findes $\gamma_0 \in \Gamma_A \setminus \{\gamma\}$, således at $\gamma \succeq \gamma_0$.

(d) $\forall \mu \in \mathcal{M}_A \setminus \emptyset : p_\mu \neq q_\mu$

Således er for alle $j = 1, \dots, k$

$$V \cap \sigma^j(V) \subseteq O_0 \cap O_j = \emptyset.$$

Da V er en låben delmængde af X_A , er χ_V en kontinuert funktion på X_A . Således defineres ved $q = \omega^{-1}(\chi_V)$ en projektion i $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ (se sætning 2.3.10). For alle $i \in \Sigma$ er da $\omega(qp_i) = \chi_V \cdot \chi_i \neq 0$, da $x^{(i)} \in Y \subseteq V$. Endvidere er $\omega(q\phi_{\mathcal{O}}^j(q)) = \chi_V \cdot (\chi_V \circ \sigma_A^j) = 0$, og således er også $q\phi_{\mathcal{O}}^j(q) = 0$ for alle $j = 1, \dots, k$.

Lad der være givet et $\mu \in \mathcal{M}_A$ med $1 \leq |\mu| \leq k$. Da $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ er abelsk, $\phi_{\mathcal{O}}$ er en *-homomorfi på $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ (jf. lemma 2.3.6) og $q, q_\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, følger det, at der for alle $r \in \mathbb{N}_0$ gælder, at

$$\phi_{\mathcal{O}}^r(q)s_\mu\phi_{\mathcal{O}}^r(q) = \phi_{\mathcal{O}}^r(q)s_\mu s_\mu^* s_\mu \phi_{\mathcal{O}}^r(q) = \phi_{\mathcal{O}}^r(q)s_\mu \phi_{\mathcal{O}}^r(q)s_\mu^* s_\mu = \phi_{\mathcal{O}}^r(q)\phi_{\mathcal{O}}^{r+|\mu|}(q)s_\mu = \phi_{\mathcal{O}}^r(q\phi_{\mathcal{O}}^{|\mu|}(q))s_\mu = 0.$$

■

Lemma 2.4.12 *Antag, at $(\mathcal{O}, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A). Lad $k \in \mathbb{N}$ og lad $q \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ være en projektion, som opfylder, at $qp_i \neq 0$ for alle $i \in \Sigma$ og sæt $q_k = \phi_{\mathcal{O}}^k(q)$. Da er afbildningen $x \mapsto q_k x$ en *-isomorfi af $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ på $q_k \mathcal{F}_k(\mathcal{O}) q_k$. Det er i øvrigt værd at bemærke, at der for $x \in \mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ gælder, at $q_k x q_k = q_k x$.*

Bevis: Den sidste bemærkning følger umiddelbart af lemma 2.3.11. Således ses umiddelbart, at $\mathcal{F}_k(\mathcal{O}) \ni x \mapsto q_k x \in q_k \mathcal{F}_k(\mathcal{O}) q_k$ er en surjektiv *-homomorfi. Vi mangler kun at vise, at denne er injektiv. Da billederne af basisvektorerne for $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ er indbyrdes ortogonale projektioner, er det nok at vise, at billedet ved denne funktion af hver af basisvektorerne for $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ er forskelligt fra 0 (her menes selvfølgelig med den i sætning 2.3.3(c) angivne basis). Givet $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k), \nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \in \mathcal{M}_A^k$ og $i \in \Sigma$. Da $q, q_\mu, q_\nu, p_i \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, $q_\mu p_i = A(\mu_k, i)p_i$, $q_\nu p_i = A(\nu_k, i)p_i$ og $qp_i \neq 0$, gælder følgende implikationer

$$\begin{aligned} 0 &= q_k e_{\mu, \nu}^i = \phi_{\mathcal{O}}^k(q)s_\mu p_i s_\nu^* = s_\mu q q_\mu p_i s_\nu^* \\ \Rightarrow 0 &= q_\mu q q_\mu p_i q_\nu = q(q_\mu p_i)(q_\nu p_i) = A(\mu_k, i)A(\nu_k, i)qp_i \\ \Rightarrow A(\mu_k, i) &= 0 \vee A(\nu_k, i) = 0 \\ \Rightarrow e_{\mu, \nu}^i &= 0. \end{aligned}$$

■

2.5 Entydighed

Definition 2.5.1 Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en ikke-degenereret matrix. For at lette notationen lidt, bruger vi følgende betegnelser: $\mathcal{F}_A := \mathcal{F}(\mathcal{O}_A)$, $\mathcal{F}_k := \mathcal{F}_k(\mathcal{O}_A)$, $\mathcal{D}_A := \mathcal{D}(\mathcal{O}_A)$, $\mathcal{D}_k := \mathcal{D}_k(\mathcal{O}_A)$, $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}(\mathcal{O}_A)$ og $\phi_A := \phi_{\mathcal{O}_A}$.

Lemma 2.5.2 *Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være ikke-degenereret. For hvert $z \in \mathbb{T}$ findes der en og kun en endomorfi α_z på \mathcal{O}_A , som opfylder, at $\alpha_z(s_i) = z s_i$ for $i \in \Sigma$. Der gælder endvidere, at α_z er en automorfi på \mathcal{O}_A for hvert $z \in \mathbb{T}$ og $(\mathcal{O}_A, \mathbb{T}, \alpha)$ er et C^* -dynamisk system.*

Bevis: Vi bemærker umiddelbart, at $(\mathcal{O}_A, (zs_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A) for ethvert $z \in \mathbb{T}$. Pga. den universelle egenskab ved Cuntz-Krieger algebraen $(\mathcal{O}_A, (s_i)_{i \in \Sigma})$ (sætning 2.1.4) findes for hvert $z \in \mathbb{T}$ en entydig *-homomorfi $\alpha_z : \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_A$ opfyldende $\alpha_z(s_i) = z s_i$ for alle $i \in \Sigma$. For hvert $z \in \mathbb{T}$, er $(\alpha_z \circ \alpha_{z^*})(s_i) = (\alpha_{z^*} \circ \alpha_z)(s_i) = s_i = \alpha_1(s_i)$ for $i \in \Sigma$ og pga. entydigheden af α_1 er derfor $\alpha_z \circ \alpha_{z^*} = \alpha_{z^*} \circ \alpha_z = \text{id}_{\mathcal{O}_A}$. Således er $\alpha_z \in \text{Aut}(\mathcal{O}_A)$ for $z \in \mathbb{T}$. At $\mathbb{T} \ni z \mapsto \alpha_z \in \text{Aut}(\mathcal{O}_A)$ er en gruppehomomorfi ses umiddelbart af entydigheden af α_z 'erne ved at evaluere på s_i 'erne.

Det ses umiddelbart, at $z \mapsto \alpha_z(a)$ er kontinuert for alle $a \in \mathcal{P}_A$. Givet $x \in \mathcal{O}_A$ samt $z_0 \in \mathbb{T}$, da vil vi nu vise, at $z \mapsto \alpha_z(x)$ er kontinuert i z_0 . Men dette følger af, at

$$\|\alpha_{z_0}(x) - \alpha_z(x)\| \leq \|\alpha_{z_0}(x) - \alpha_{z_0}(a)\| + \|\alpha_{z_0}(a) - \alpha_z(a)\| + \|\alpha_z(a) - \alpha_z(x)\| \leq 2\|x - a\| + \|\alpha_{z_0}(a) - \alpha_z(a)\|$$

for alle $z \in \mathbb{T}$ og $a \in \mathcal{P}_A$.

■

Lemma 2.5.3 *Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en ikke-degenereret matrix, lad $(\mathcal{O}, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfylde (A) og lad $\varphi : \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}$ være den kanoniske *-homomorfi. Da er $\varphi|_{\mathcal{F}_A}$ en isomorfi af \mathcal{F}_A på $\mathcal{F}(\mathcal{O})$.*

Bevis: Det følger umiddelbart af karakteriseringen, af hvilke elementer er nul i \mathcal{F}_k og $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ (sætning 2.3.3(a)), at $\varphi|_{\mathcal{F}_k}$ er en isomorfi af \mathcal{F}_k på $\mathcal{F}_k(\mathcal{O})$ – se også 2.3.3(b) og (c). Det ønskede følger nu af sætning 2.3.3(e) og (f).

■

Definition 2.5.4 En **betinget forventning** af en C^* -algebra \mathfrak{A} med enhed på en del- C^* -algebra \mathfrak{B} er en positiv lineær afbildning $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, opfyldende $f|_{\mathfrak{B}} = id_{\mathfrak{B}}$. Vi siger, at en betinget forventning $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ er **tro**, netop hvis der for alle $a \in \mathfrak{A} \setminus \{0\}$ gælder, at $f(a^*a) \neq 0$.

Lemma 2.5.5 *Antag, at $A \in \text{Mat}_n(\{0,1\})$ opfylder (I) og at $(\mathcal{O}, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A). Da findes en følge $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ af projektioner i \mathcal{O} , så $q_k \in \phi_{\mathcal{O}}^k(\mathcal{D}(\mathcal{O}))$ for hvert $k \in \mathbb{N}$ og så der for alle $x \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ og alle $\mu \in \mathcal{M}_A$ med $|\mu| \geq 1$ gælder, at*

$$q_k x - x q_k \rightarrow 0, \quad \|q_k x q_k\| \rightarrow \|x\|, \quad q_k s_{\mu} q_k \rightarrow 0, \quad q_k s_{\mu}^* q_k \rightarrow 0 \quad \text{for } k \rightarrow \infty.$$

Bevis: For hvert $k \in \mathbb{N}$ lader vi $q'_k \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ være en projektion opfyldende betingelserne (for q) i lemma 2.4.11. Vi sætter $q_k := \phi_{\mathcal{O}}^k(q'_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

For hvert $x \in \mathcal{F}_{k_0}(\mathcal{O})$ er

$$\begin{aligned} q_k x - x q_k &= 0 && \text{for alle } k \geq k_0 \text{ (ifølge lemma 2.3.11),} \\ \|x\| = \|q_k x\| &= \|q_k x q_k\| && \text{for alle } k \geq k_0 \text{ (ifølge lemma 2.4.12).} \end{aligned}$$

Ved et tæthedsargument ses nu, at

$$q_k x - x q_k \rightarrow 0 \text{ og } \|q_k x q_k\| \rightarrow \|x\| \quad \text{for } k \rightarrow \infty$$

for alle $x \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$. Af definitionen af q_k (se lemma 2.4.11) ses umiddelbart, at for alle $\mu \in \mathcal{M}_A$ med $|\mu| \geq 1$ er

$$q_k s_{\mu} q_k = q_k s_{\mu}^* q_k = 0 \quad \text{for alle } k \geq |\mu|.$$

■

Sætning 2.5.6 (a) $\Phi_{\mathcal{O}_A} : \mathcal{O}_A \ni a \mapsto \int_{\mathbb{T}} \alpha_t(a) dt \in \mathcal{F}_A$ er en afstandsformindskende, tro betinget forventning af \mathcal{O}_A på \mathcal{F}_A . Denne afbildning opfylder, at $\Phi_{\mathcal{O}_A}(x) = x$, $\Phi_{\mathcal{O}_A}(s_{\mu}x) = 0$ og $\Phi_{\mathcal{O}_A}(x s_{\mu}^*) = 0$ for alle $x \in \mathcal{F}_A$ og alle multiindex μ med længde $|\mu| \geq 1$.

(b) Antag, at $A \in \text{Mat}_n(\{0,1\})$ opfylder (I), at $(\mathcal{O}, (t_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A) og lad $\varphi : \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}$ være den kanoniske $*$ -homomorfi. Da findes en afstandsformindskende betinget forventning $\Phi_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O})$. Denne afbildning opfylder, at $\Phi_{\mathcal{O}}(x) = x$, $\Phi_{\mathcal{O}}(t_{\mu}x) = 0$ og $\Phi_{\mathcal{O}}(x t_{\mu}^*) = 0$ for alle $x \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ og alle multiindex μ med længde $|\mu| \geq 1$. Endvidere gælder, at

$$\Phi_{\mathcal{O}} \circ \varphi = \varphi \circ \Phi_{\mathcal{O}_A}.$$

Bevis: (a): Vi mangler selvfølgelig at vise, at integralet rent faktisk ligger i \mathcal{F}_A – så vi betragter det i første omgang som et element i \mathcal{O}_A . Det er klart, at $\Phi_{\mathcal{O}_A}$ er lineær (se definition 1.6.1). Det ses umiddelbart ved brug af lemma 1.6.3, at $\Phi_{\mathcal{O}_A}$ er afstandsformindskende.

Lad der være givet multiindex μ og ν således at $s_{\mu} s_{\nu}^* \neq 0$ og sæt $r = |\mu| - |\nu|$. Da $\alpha_z(s_{\mu} s_{\nu}^*) = z^r s_{\mu} s_{\nu}^*$, er

$$\Phi_{\mathcal{O}_A}(s_{\mu} s_{\nu}^*) = \int_{\mathbb{T}} t^r s_{\mu} s_{\nu}^* dt = s_{\mu} s_{\nu}^* \int_{\mathbb{T}} t^r dt = \begin{cases} 0, & \text{hvis } r \neq 0, \\ s_{\mu} s_{\nu}^*, & \text{hvis } r = 0. \end{cases}$$

Ved kontinuitet er det således klart, at $\Phi_{\mathcal{O}_A}(x) = x$, $\Phi_{\mathcal{O}_A}(s_{\mu}x) = 0$ og $\Phi_{\mathcal{O}_A}(x s_{\mu}^*) = 0$ for alle $x \in \mathcal{F}_A$ og alle multiindex μ med længde $|\mu| \geq 1$. Ifølge lemma 2.2.7 er ethvert element i \mathcal{P}_A en linearkombination af elementer på formen $s_{\mu} s_{\nu}^*$, så $\Phi_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{P}_A) \subseteq \mathcal{F}_A$. Følgelig er $\Phi_{\mathcal{O}_A}(\mathcal{O}_A) \subseteq \mathcal{F}_A$.

Vi mangler nu kun at vise, at $\Phi_{\mathcal{O}_A}$ er positiv og tro. Lad der være givet $a \in \mathcal{O}_A \setminus \{0\}$. Da findes en tilstand τ_0 på \mathcal{O}_A , således at $\tau_0(a^*a) = \|a^*a\|$ (ifølge [Mur90, thm.3.3.6]) og således er

$$\tau_0(\Phi_{\mathcal{O}_A}(a^*a)) = \int_{\mathbb{T}} \tau_0(\alpha_t(a^*a)) dt > 0,$$

da integranden er kontinuert, positiv og ikke identisk nul (thi $\tau_0(\alpha_1(a^*a)) = \|a^*a\|$).

Givet $a \in \mathcal{O}_A$, da gælder tilsvarende for enhver positiv lineær funktional τ på \mathcal{O}_A , at

$$\tau(\Phi_{\mathcal{O}_A}(a^*a)) = \int_{\mathbb{T}} \tau(\alpha_t(a^*a)) dt \geq 0.$$

Følgelig er $\Phi_{\mathcal{O}_A}(a^*a)$ positiv (jf. [Mur90, thm.3.4.3]).

(b): Lad $x \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ være givet. Da kan x ifølge lemma 2.2.7 skrives som en endelig sum

$$x = x_0 + \sum_{|\mu| \geq 1} (x_{-\mu} t_\mu^* + t_\mu x_\mu),$$

hvor alle $x_0, x_{-\mu}, x_\mu \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$. Vi vil nu vise, at $x_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ i denne sum er entydigt bestemt og at $\|x_0\| \leq \|x\|$.

Vælg $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i hht. lemma 2.5.5. For $k \rightarrow \infty$ vil således

$$q_k x q_k - q_k x_0 q_k = \sum_{|\mu| \geq 1} ((q_k x_{-\mu} - x_{-\mu} q_k) t_\mu^* q_k + q_k t_\mu (x_\mu q_k - q_k x_\mu) + x_{-\mu} q_k t_\mu^* q_k + q_k t_\mu q_k x_\mu) \rightarrow 0.$$

Altså er

$$\|x_0\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|q_k x_0 q_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|q_k x q_k\| \leq \|x\|.$$

Antag nu, at x også kan skrives som en endelig sum

$$x = x'_0 + \sum_{|\mu| \geq 1} (x'_{-\mu} t_\mu^* + t_\mu x'_\mu),$$

hvor alle $x'_0, x'_{-\mu}, x'_\mu \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$. Da er

$$0 = x - x = (x_0 - x'_0) + \sum_{|\mu| \geq 1} ((x_{-\mu} - x'_{-\mu}) t_\mu^* + t_\mu (x_\mu - x'_\mu))$$

en fremstilling af 0 – og ifølge det lige viste er derfor $\|x_0 - x'_0\| \leq \|0\| = 0$.

Vi har således en veldefineret afstandsformindskende lineær afbildning $\mathcal{P}(\mathcal{O}) \ni x \mapsto x_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ (hvor x_0 er givet som ovenover). Denne udvides således entydigt til en afstandsformindskende lineær afbildning $\Phi_{\mathcal{O}}: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O})$.

Lad $x \in \mathcal{P}_A$ være vilkårlig og skriv x som en endelig sum

$$x = x_0 + \sum_{|\mu| \geq 1} (x_{-\mu} s_\mu^* + s_\mu x_\mu),$$

hvor alle $x_0, x_{-\mu}, x_\mu \in \mathcal{F}_A$. Ifølge lemma 2.5.3 er da $\varphi(x_0), \varphi(x_{-\mu}), \varphi(x_\mu) \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ for alle μ . Følgelig er

$$\Phi_{\mathcal{O}}(\varphi(x)) = \Phi_{\mathcal{O}}\left(\varphi(x_0) + \sum_{|\mu| \geq 1} (\varphi(x_{-\mu}) t_\mu^* + t_\mu \varphi(x_\mu))\right) = \varphi(x_0) = \varphi(\Phi_{\mathcal{O}_A}(x)).$$

Ved kontinuitet ses således umiddelbart, at $\Phi_{\mathcal{O}} \circ \varphi = \varphi \circ \Phi_{\mathcal{O}_A}$.

Givet $x \in \mathcal{O}$. Da findes $x_0 \in \mathcal{O}_A$, således at $\varphi(x_0) = x$. Følgelig er $\Phi_{\mathcal{O}}(x^*x) = \varphi(\Phi_{\mathcal{O}_A}(x_0^*x_0)) \geq 0$, da $\Phi_{\mathcal{O}_A}$ er positiv. Følgelig er $\Phi_{\mathcal{O}}$ positiv. ■

Bemærkning 2.5.7 Det ses umiddelbart af (b) i sætningen ovenover, at $\Phi_{\mathcal{O}}$ simpelthen er $\Phi_{\mathcal{O}_A}$, hvis \mathcal{O} er \mathcal{O}_A . Dette er årsagen til at vi bruger samme benævnelse for de to afbildninger.

Teorem 2.5.8 Antag, at $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylder (I) og at $(\mathcal{O}, (s'_i)_{i \in \Sigma})$ opfylder (A). Da er \mathcal{O} og \mathcal{O}_A kanonisk isomorfe.

Bevis: Ifølge den universelle egenskab ved \mathcal{O}_A (sætning 2.1.4) findes en (entydig) *-homomorfi $\varphi: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}$ opfyldende $\varphi(s_i) = s'_i$ for $i \in \Sigma$. Vi mangler kun at vise, at φ er injektiv.

Ifølge lemma 2.5.3 er $\varphi|_{\mathcal{F}_A}$ injektiv, så hvis $\varphi(x) = 0$, så er $\varphi(\Phi_{\mathcal{O}_A}(x^*x)) = \Phi_{\mathcal{O}}(\varphi(x^*x)) = 0$ og dermed $\Phi_{\mathcal{O}_A}(x^*x) = 0$. Da $\Phi_{\mathcal{O}_A}$ er tro, følger, at $x = 0$. ■

Bemærkning 2.5.9 Det omvendte til teorem 2.5.8 gælder også: Antag, at $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ er en ikke-degenereret matrix, hvorom der gælder, at for enhver $(\mathcal{O}, (s_i)_{i \in \Sigma})$ opfyldende (A) er den kanoniske *-homomorfi fra \mathcal{O}_A ind i \mathcal{O} injektiv. Da opfylder matricen A betingelse (I). Se [Cun81, rem.3, s.30–31] for bevis samt mere uddybende omkring dette emne.

2.6 K -teori for \mathcal{O}_A

Sætning 2.6.1 Lad $(\mathfrak{A}, \mathbb{T}, \alpha)$ være et C^* -dynamisk system, hvor \mathfrak{A} er en C^* -algebra med enhed $\mathbb{1}$. Lad $p_0 : \mathbb{T} \ni z \mapsto \mathbb{1} \in \mathfrak{A}$ være funktionen som er konstant lig $\mathbb{1}$, lad $\mathfrak{A}^\alpha := \{a \in \mathfrak{A} \mid \forall z \in \mathbb{T} : \alpha_z(a) = a\}$ være fixpunkterne for virkningen α og lad $\varphi : \mathfrak{A}^\alpha \rightarrow C(\mathbb{T}, \mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A} \times_\alpha \mathbb{T}$ være givet ved, at $\varphi(a) : \mathbb{T} \ni z \mapsto a \in \mathfrak{A}$ er den konstante funktion med værdi $a \in \mathfrak{A}^\alpha$. Da er $p_0 \in \mathfrak{A} \times_\alpha \mathbb{T}$ en projektion og $\varphi : \mathfrak{A}^\alpha \rightarrow \varphi(\mathfrak{A}^\alpha) = p_0(\mathfrak{A} \times_\alpha \mathbb{T})p_0$ er en isomorfi mellem C^* -algebraer.

Bevis: \mathfrak{A}^α er klart stabil mht. skalarmultiplikation, addition, adjungering samt multiplikation. Det vises let, at \mathfrak{A}^α er afsluttet. For hvert $f \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ er

$$(f \star p_0)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(t) \alpha_t(p_0(t^* z)) dt = \int_{\mathbb{T}} f(t) dt =: a_0 \quad (2.1)$$

$$(p_0 \star f \star p_0)(z) = \int_{\mathbb{T}} p_0(t) \alpha_t((f \star p_0)(t^* z)) dt = \int_{\mathbb{T}} \alpha_t(a_0) dt =: a_1 \quad (2.2)$$

for alle $z \in \mathbb{T}$ – så $p_0 \star f \star p_0$ er funktionen, som er konstant lig a_1 . For alle $s, z \in \mathbb{T}$ er således

$$\alpha_s((p_0 \star f \star p_0)(z)) = \alpha_s \left(\int_{\mathbb{T}} \alpha_t(a_0) dt \right) = \int_{\mathbb{T}} \alpha_{st}(a_0) dt = \int_{\mathbb{T}} \alpha_t(a_0) dt = (p_0 \star f \star p_0)(z),$$

ifølge sætning 1.6.2, så $p_0 \star f \star p_0 \in \mathfrak{B}$, hvor $\mathfrak{B} = \varphi(\mathfrak{A}^\alpha)$. Det verificeres umiddelbart, at φ er en injektiv $*$ -homomorfi. Således er \mathfrak{B} en C^* -algebra, $p_0 = \varphi(\mathbb{1})$ er en projektion, $p_0 \star b \star p_0 = b$ for alle $b \in \mathfrak{B}$ og p_0 er en enhed for \mathfrak{B} . Vi har således vist, at $\varphi : \mathfrak{A}^\alpha \rightarrow \varphi(\mathfrak{A}^\alpha) = \mathfrak{B} = p_0(C(\mathbb{T}, \mathfrak{A}))p_0$ er en $*$ -isomorfi.

Givet $x \in \mathfrak{A} \times_\alpha \mathbb{T}$, findes $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$, så $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Således er også $p_0 \star x \star p_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} p_0 \star x_k \star p_0 \in \mathfrak{B}$. Vi har altså vist, at $p_0(\mathfrak{A} \times_\alpha \mathbb{T})p_0 = \mathfrak{B}$. ■

Definition 2.6.2 Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra og p en projektion i $M(\mathfrak{A})$. Da kaldes den arvelige del- C^* -algebra $p\mathfrak{A}p$ for et **hjørne**. Vi siger, at $p\mathfrak{A}p$ er et **fuldt hjørne** i \mathfrak{A} , netop hvis $p\mathfrak{A}p$ ikke er indeholdt i noget ægte lukket ideal i \mathfrak{A} .

Projektionen p kaldes **fuld**, netop hvis $p\mathfrak{A}p$ er et fuldt hjørne. Hvis $p \in \mathfrak{A}$, er det klart, at p er fuld, netop hvis p ikke er indeholdt i noget ægte lukket ideal i \mathfrak{A} .

Definition 2.6.3 Vi siger, at et element a i en C^* -algebra \mathfrak{A} er **strengt positivt**, netop hvis $\tau(a) > 0$ for alle positive lineære funktionaler τ på \mathfrak{A} forskellige fra nul. Bemærk, at hvis $\mathfrak{A} \neq \{0\}$ er separabel eller har enhed, så har \mathfrak{A} et strengt positivt element (jf. [Ped79, §§3.10.5–3.10.6]).

Til lemma B.5 haves følgende korollar

Korollar 2.6.4 Lad \mathfrak{A} og \mathfrak{B} være C^* -algebraer. Da betragtes $M(\mathfrak{A}) \otimes_* M(\mathfrak{B}) \supseteq \mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}$ naturligt som en del- C^* -algebra af $M(\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B})$.¹

Bevis: Da \mathfrak{A} og \mathfrak{B} er essentielle idealer i hhv. $M(\mathfrak{A})$ og $M(\mathfrak{B})$, er $\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}$ ifølge lemma B.5 et essentielt ideal i $M(\mathfrak{A}) \otimes_* M(\mathfrak{B})$. Da $M(\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B})$ er den største C^* -algebra, som indeholder $\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}$ som essentielt ideal, kan vi opfatte dette som $\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B} \subseteq M(\mathfrak{A}) \otimes_* M(\mathfrak{B}) \subseteq M(\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B})$ (jf. [Mur90, thm.3.1.8]). ■

Følgende vigtige resultat er vist af L.G. Brown i [Bro77, lem.2.5 og cor.2.6]:

Teorem 2.6.5 (Brown) Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra med et strengt positivt element og lad $p_0 \in M(\mathfrak{A})$ være en fuld projektion. Da kan $p_0\mathfrak{A}p_0 \otimes \mathbb{K}$ identificeres med $(p_0 \otimes \mathbb{1}_{M(\mathbb{K})})(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K})(p_0 \otimes \mathbb{1}_{M(\mathbb{K})})$, og der findes en partiel isometri $v \in M(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K})$, så $vv^* = p_0 \otimes \mathbb{1}_{M(\mathbb{K})}$, $v^*v = \mathbb{1}_{M(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K})}$ og $p_0\mathfrak{A}p_0 \otimes \mathbb{K} \ni x \mapsto v^*xv \in \mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$ er en isomorfi med $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K} \ni x \mapsto vxv^* \in p_0\mathfrak{A}p_0 \otimes \mathbb{K}$ som invers.

¹Dette er et resultat, som bruges rigtig mange steder, men sjældent er bevist. Jeg har faktisk ikke kunnet finde noget bevis selv i litteraturen, og alle steder hvor forfatteren har villet uddybe det, er der henvist til [WO93, app.T]. Problemet er, at N.E. Wegge-Olsen bruger det sidste resultat fra [WO93, lem.T.5.3], som siger, at $\pi_1 \odot \pi_2$ er injektiv, hvis og kun hvis både π_1 og π_2 er injektive (hvor π_1 og π_2 er kommuterende $*$ -homomorfier). I beviset for dette lemma henvises til prop.T.5.1, men afbildningen $\pi_1 \odot \pi_2$ i propositionen er *ikke* den samme! I øvrigt er udsagnet i lemma T.5.3 klart falsk, thi \mathbb{C}^k er en kommutativ C^* -algebra, men $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^k = \mathbb{C}^k \odot \mathbb{C}^k$ kan indlejres i \mathbb{C}^k , netop hvis $k = 1$. Denne fejl har iøvrigt forplantet sig rundt i appendixet; bla. i beviset for cor.T.6.5 og prop.T.6.25. Gert K. Pedersen har været så venlig, at henlede min opmærksomhed på [Ped99, lem.11.12], for at kunne bevise dette korollar.

Dualt til [Bro77, cor.2.7] haves i K -teori følgende

Sætning 2.6.6 *Lad \mathfrak{A} være en separabel C^* -algebra, lad $p_0 \in M(\mathfrak{A})$ være en fuld projektion, og lad $\iota: p_0\mathfrak{A}p_0 \hookrightarrow \mathfrak{A}$ betegne indlejringen. Da er $K_0(\iota): K_0(p_0\mathfrak{A}p_0) \rightarrow K_0(\mathfrak{A})$ en isomorfi.*

Bevis: Find en partiel isometri $v \in M(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K})$ i hht. Browns resultat (teorem 2.6.5). Dvs. $vv^* = p_0 \otimes \mathbb{1}_{M(\mathbb{K})}$, $v^*v = \mathbb{1}_{M(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K})}$ og $\psi: p_0\mathfrak{A}p_0 \otimes \mathbb{K} \ni x \mapsto v^*xv \in \mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$ er en isomorfi. Bemærk endvidere, at $(p_0 \otimes \mathbb{1}_{M(\mathbb{K})})(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K})(p_0 \otimes \mathbb{1}_{M(\mathbb{K})}) = p_0\mathfrak{A}p_0 \otimes \mathbb{K}$.

Lad κ hhv. κ_0 betegne indlejringen $\mathfrak{A} \ni a \mapsto a \otimes e_{11} \in \mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$ hhv. $p_0\mathfrak{A}p_0 \ni a \mapsto a \otimes e_{11} \in p_0\mathfrak{A}p_0 \otimes \mathbb{K}$. Da $K_0(\kappa)$ og $K_0(\kappa_0)$ er isomorfier, er det nok at vise, at $K_0(\psi) \circ K_0(\kappa_0) = K_0(\kappa) \circ K_0(\iota)$ – altså at vise at nedenstående diagram er kommutativt,

$$\begin{array}{ccc} K_0(p_0\mathfrak{A}p_0) & \xrightarrow{K_0(\iota)} & K_0(\mathfrak{A}) \\ K_0(\kappa_0) \downarrow \cong & & \cong \downarrow K_0(\kappa) \\ K_0(p_0\mathfrak{A}p_0 \otimes \mathbb{K}) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}). \end{array}$$

Vi skal altså vise, at $K_0(\psi \circ \kappa_0) = K_0(\kappa \circ \iota)$. Lad derfor $p = [p_{ij}]_{ij} \in \mathcal{P}_k(p_0\mathfrak{A}p_0)$, $k \in \mathbb{N}$ være vilkårligt (vi husker på, at $p_0\mathfrak{A}p_0$ har enhed p_0). Da er $\kappa_0(p) = [p_{ij} \otimes e_{11}]_{ij} = (\kappa \circ \iota)(p)$. Sæt $u = [(p_{ij} \otimes e_{11})v]_{ij} \in \text{Mat}_k(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K})$ (da $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$ er et ideal i $M(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K})$). Bemærk, at

$$\begin{aligned} uu^* &= \left[\sum_{l=1}^k (p_{il} \otimes e_{11}) v v^* (p_{lj} \otimes e_{11}) \right]_{ij} = \left[\sum_{l=1}^k (p_{il} \otimes e_{11}) (p_0 \otimes \mathbb{1}_{M(\mathbb{K})}) (p_{lj} \otimes e_{11}) \right]_{ij} \\ &= \left[\sum_{l=1}^k (p_{il} p_{lj} \otimes e_{11}) \right]_{ij} = [p_{ij} \otimes e_{11}]_{ij} = (\kappa \circ \iota)(p), \\ u^*u &= \left[\sum_{l=1}^k v^* (p_{il} \otimes e_{11}) (p_{lj} \otimes e_{11}) v \right]_{ij} = \left[\sum_{l=1}^k v^* (p_{il} p_{lj} \otimes e_{11}) v \right]_{ij} \\ &= [v^* (p_{ij} \otimes e_{11}) v]_{ij} = (\psi \circ \kappa_0)(p), \end{aligned}$$

da $p \in \mathcal{P}_k(p_0\mathfrak{A}p_0)$ er en projektion og p_0 er enheden i $p_0\mathfrak{A}p_0$. Altså er $(\kappa \circ \iota)(p) \sim_0 (\psi \circ \kappa_0)(p)$ og dermed $K_0(\kappa \circ \iota)([p]_0) = [(\kappa \circ \iota)(p)]_0 = [(\psi \circ \kappa_0)(p)]_0 = K_0(\psi \circ \kappa_0)([p]_0)$. ■

Sætning 2.6.7 *Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en ikke-degenereret matrix og lad p_0 betegne funktionen i $C(\mathbb{T}, \mathcal{O}_A)$, som er konstant lig enheden $\mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}$ i \mathcal{O}_A . Da er $p_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})p_0$ et fuldt hjørne.*

Bevis: Lad \mathcal{I} være et vilkårligt lukket ideal i $\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}$ indeholdende $p_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})p_0$. Følgelig er $p_0 \in \mathcal{I}$. For ethvert $a \in \mathcal{O}_A$ betegner vi med \widehat{a} den konstante funktion $\mathbb{T} \ni z \mapsto a \in \mathcal{O}_A$ med værdi a . For $a, b \in \mathcal{O}_A$ og $z \in \mathbb{T}$ er da

$$\begin{aligned} (\widehat{a} \star p_0)(z) &= \int_{\mathbb{T}} a \alpha_t(\mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}) dt = a, \\ (\widehat{b}^*)(z) &= \alpha_z(b^*), \\ (\widehat{a} \star \widehat{b}^*)(z) &= \int_{\mathbb{T}} a \alpha_t(\alpha_{t^*z}(b^*)) dt = a \alpha_z(b^*). \end{aligned}$$

Således er $\widehat{a} \in \mathcal{I}$ for alle $a \in \mathcal{O}_A$. For hvert $a \in \mathcal{O}_A$ og $\mu \in \mathcal{M}_A$ med $|\mu| = k \in \mathbb{N}$ er endvidere for alle $z \in \mathbb{T}$

$$(\widehat{as}_\mu \star \widehat{s}_\mu^*)(z) = z^{-k} a s_\mu s_\mu^* = z^{-k} a p_\mu$$

og dermed

$$\sum_{|\mu|=k} (\widehat{as}_\mu \star \widehat{s}_\mu^*)(z) = z^{-k} a.$$

Altså ligger funktionen $\mathbb{T} \ni z \mapsto z^{-k} a \in \mathcal{O}_A$ i \mathcal{I} for alle $k \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathcal{O}_A$.

Givet $k \in \mathbb{N}$ og $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathcal{M}_A$ findes $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \in \mathcal{M}_A$, så $A(\nu_k, \mu_1) = 1$ (da A er ikke-degenereret). Da $q_\nu = q_{\nu_k}$, følger af lemma 2.2.2(c), at

$$p_\mu q_\nu = p_\mu q_{\nu_k} = A(\nu_k, \mu_1) p_\mu = p_\mu,$$

og således er

$$(\widehat{ap}_\mu s_\nu^* \star \widehat{s}_\nu^*)(z) = a p_\mu s_\nu^* \alpha_z(s_\nu) = z^k a p_\mu s_\nu^* s_\nu = z^k a p_\mu.$$

Heraf følger, at $\mathbb{T} \ni z \mapsto z^k a \in \mathcal{O}_A$ ligger i \mathcal{I} for $k \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathcal{O}_A$, da

$$\sum_{|\mu|=k} z^k a p_\mu = z^k a.$$

Af sætning 1.6.8 følger nu, at $\mathcal{I} = \mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}$. ■

Lemma 2.6.8 $\mathcal{O}_A^\alpha = \mathcal{F}_A$.

Bevis: “ \supseteq ” er klar!

“ \subseteq ”: Vi bruger den tro betingede forventning $\Phi_{\mathcal{O}_A}: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{F}_A$ fra sætning 2.5.6(a). Da er for $a \in \mathcal{O}_A^\alpha$

$$\Phi_{\mathcal{O}_A}(a) = \int_{\mathbb{T}} \alpha_t(a) dt = \int_{\mathbb{T}} a dt = a.$$

§ **2.6.9** Lad $\varphi: \mathcal{F}_A \rightarrow p_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})p_0$ være isomorfien $a \mapsto \hat{a}$, hvor \hat{a} betegner den konstante funktion med værdi a og lad $p_0 = \widehat{\mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}}$ (se sætning 2.6.1 og lemma 2.6.8). Lad endvidere $\iota: p_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})p_0 \hookrightarrow \mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}$ betegne inklusionsafbildningen. Den duale gruppe til \mathbb{T} er som bekendt \mathbb{Z} (se f.eks. [Fol95, thm.4.5]). En homomorfi fra \mathbb{T} 's duale gruppe er således fastlagt ved dens værdi på 1. Vi vil derfor betragte den duale virkning værende en automorfi $\hat{\alpha} \in \text{Aut}(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})$ givet ved, at $\hat{\alpha}(x)(z) = zx(z)$, $z \in \mathbb{T}$ for ethvert $x \in C(\mathbb{T}, \mathcal{O}_A)$. Vi definerer nu en isomorfi $\beta := K_0(\varphi)^{-1} \circ K_0(\iota)^{-1} \circ K_0(\hat{\alpha}) \circ K_0(\iota) \circ K_0(\varphi)$, hvor $\hat{\alpha}$ er den duale virkning – betragt diagrammet

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{F}_A) & \xrightarrow{\beta} & K_0(\mathcal{F}_A) \\ K_0(\varphi) \downarrow \cong & & \cong \uparrow K_0(\varphi)^{-1} \\ K_0(p_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})p_0) & & K_0(p_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})p_0) \\ K_0(\iota) \downarrow \cong & & \cong \uparrow K_0(\iota)^{-1} \\ K_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) & \xrightarrow[\hat{\alpha}]{\cong} & K_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}). \end{array}$$

Sætning 2.6.10 Lad $p \in \mathcal{F}_A$ være en projektion og lad $s \in \mathcal{O}_A$ være en partiel isometri opfyldende $p \leq s^*s$ og $\alpha_z(s) = zs$ for alle $z \in \mathbb{T}$. Da er $\beta([p]_0) = [sps^*]_0$ (i $K_0(\mathcal{F}_A)$).

Bevis: For hvert $a \in \mathcal{O}_A$ betegner vi med \hat{a} den konstante funktion $\mathbb{T} \ni z \mapsto a \in \mathcal{O}_A$ med værdi a . Bemærk, at der gælder, at $sps^* \in \mathcal{O}_A^\alpha = \mathcal{F}_A$. Det er således nok at vise, at

$$K_0(\hat{\alpha})([\hat{p}]_0) = [\widehat{sps^*}]_0$$

i $K_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})$.

Man ser umiddelbart, at $\hat{s} \star \hat{p} = \widehat{sp}$ og heraf, at $(\hat{s} \star \hat{p} \star \hat{s}^*)(z) = sp\alpha_z(s^*) = z^*sps^*$ for $z \in \mathbb{T}$. Således er

$$\hat{\alpha}(\hat{s} \star \hat{p} \star \hat{s}^*) = \widehat{sps^*}.$$

Der gælder, at $\hat{p} \leq \widehat{s^*s}$, da $s^*s \in \mathcal{F}_A$, afbildningen $\mathcal{F}_A \ni a \mapsto \hat{a} \in C(\mathbb{T}, \mathfrak{A})$ er en *-homomorfi (se sætning 2.6.1 og lemma 2.6.8) og sådanne er positive. Da $(\hat{s}^* \star \hat{s})(z) = \int_{\mathbb{T}} \alpha_t(s^*)\alpha_t(s)dt = \int_{\mathbb{T}} t^*s^*tsdt = s^*s$, $z \in \mathbb{T}$, er $(\hat{s}^* \star \hat{s}) = \widehat{s^*s}$. Således er

$$\hat{p} = \hat{p} \star \widehat{s^*s} \star \hat{p} = \hat{p} \star \hat{s}^* \star \hat{s} \star \hat{p} = (\hat{s} \star \hat{p})^* \star (\hat{s} \star \hat{p})$$

og

$$\hat{s} \star \hat{p} \star \hat{s}^* = \hat{s} \star \hat{p} \star \hat{p} \star \hat{s}^* = (\hat{s} \star \hat{p}) \star (\hat{s} \star \hat{p})^*,$$

så $\hat{p} \sim \hat{s} \star \hat{p} \star \hat{s}^*$ i $\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}$. Følgelig er

$$K_0(\hat{\alpha})([\hat{p}]_0) = K_0(\hat{\alpha})([\hat{s} \star \hat{p} \star \hat{s}^*]_0) = [\hat{\alpha}(\hat{s} \star \hat{p} \star \hat{s}^*)]_0 = [\widehat{sps^*}]_0.$$

Lemma 2.6.11 Givet $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathcal{M}_A^k$ med $e_{\mu, \mu}^i \neq 0$ og sæt $\nu = (\mu_2, \dots, \mu_k)$. Da er $\beta^{-1}([e_{\mu, \mu}^i]_0) = [e_{\nu, \nu}^i]_0$. ■

Bevis: Ifølge lemma 2.2.2(c) er $q_{\mu_1} e_{\nu, \nu}^i = e_{\nu, \nu}^i$. Følgelig er $e_{\nu, \nu}^i \leq q_{\mu_1}$. Ifølge sætning 2.6.10 er således $\beta([e_{\nu, \nu}^i]_0) = [s_{\mu_1} e_{\nu, \nu}^i s_{\mu_1}^*]_0 = [e_{\mu, \mu}^i]_0$. ■

I [PV80] (se dog også [Bla98, §10]) har Pimsner og Voiculescu opnået en cyklisk seks-leddet exakt følge, som sammenkæder K -teorien for et krydsprodukt med \mathbb{Z} med K -teorien for den originale C^* -algebra:

Teorem 2.6.12 (Pimsner-Voiculescu) *Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra og lad $\alpha \in \text{Aut}(\mathfrak{A})$. Lad $\iota: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \times_{\alpha} \mathbb{Z}$ betegne den sædvanlige indlejring. Da findes en cyklisk seks-leddet exakt følge*

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathfrak{A}) & \xrightarrow{id - K_0(\alpha)^{-1}} & K_0(\mathfrak{A}) & \xrightarrow{K_0(\iota)} & K_0(\mathfrak{A} \times_{\alpha} \mathbb{Z}) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\mathfrak{A} \times_{\alpha} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{K_1(\iota)} & K_1(\mathfrak{A}) & \xleftarrow{id - K_1(\alpha)^{-1}} & K_1(\mathfrak{A}). \end{array}$$

Takai har vist en dualitetssætning for krydsprodukter. Gert K. Pedersen har medtaget bevis for denne i [Ped79, thm.7.9.3].

Teorem 2.6.13 (Takai) *Lad $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ være en C^* -dynamisk system, hvor G er abelsk. Da er det dobbelt duale system $(\mathfrak{A} \times_{\alpha} G \times_{\hat{\alpha}} \hat{G}, G, \hat{\alpha})$ kovariant isomorf med systemet $(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}(L_2(G)), G, \alpha \otimes \text{Ad } \lambda)$, hvor λ betegner den højre regulære repræsentation af G på $L_2(G)$. Specielt gælder, at $\mathfrak{A} \times_{\alpha} G \times_{\hat{\alpha}} \hat{G}$ og \mathfrak{A} er stabilt isomorfe.*

§ 2.6.14 Der gælder, at

$$K_0(\mathcal{F}_k) = \mathbb{Z}[e_{\mu^1, \mu^1}^1]_0 + \mathbb{Z}[e_{\mu^2, \mu^2}^2]_0 + \cdots + \mathbb{Z}[e_{\mu^n, \mu^n}^n]_0, \cong \mathbb{Z}^n$$

hvor $\mu^1, \dots, \mu^n \in \mathcal{M}_A^k$ er valgt således at $e_{\mu^i, \mu^i}^i \neq 0$ for $i = 1, \dots, n$ (se [RLL00, §7.1.1]). Vi kan således identificere $K_0(\mathcal{F}_k)$ med \mathbb{Z}^n under afbildningen $\sum_{i=1}^n \lambda_i [e_{\mu^i, \mu^i}^i]_0 \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{\top}$.

Vi har

$$e_{\mu, \mu}^i = \sum_{j=1}^n e_{\mu^j, \mu^j}^j = \sum_{j=1}^n A(i, j) e_{\mu^j, \mu^j}^j.$$

Bemærk, at $e_{\mu, \mu}^i \neq 0 \wedge A(i, j) = 1 \Rightarrow e_{\mu^j, \mu^j}^j \neq 0$. Lad $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{\top} \in \mathbb{Z}^n$ repræsentere et element i $K_0(\mathcal{F}_k)$. Inklusionsafbildningen $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1}$ inducerer en afbildning $K_0(\mathcal{F}_k) \rightarrow K_0(\mathcal{F}_{k+1})$. Vi betragter nu billedet af $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{\top} \in \mathbb{Z}^n$ under denne inducerede afbildning. Billedet af $(0, \dots, 0, \lambda_i, 0, \dots, 0)^{\top}$ er ifølge ovenstående lig med $\lambda_i (A(i, 1), A(i, 2), \dots, A(i, n))^{\top}$. Følgelig er billedet af $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{\top}$ lig

$$\begin{pmatrix} A(1, 1)\lambda_1 + A(2, 1)\lambda_2 + \cdots + A(n, 1)\lambda_n \\ A(1, 2)\lambda_1 + A(2, 2)\lambda_2 + \cdots + A(n, 2)\lambda_n \\ \vdots \\ A(1, n)\lambda_1 + A(2, n)\lambda_2 + \cdots + A(n, n)\lambda_n \end{pmatrix} = A^{\top} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Så hvis elementerne i $K_0(\mathcal{F}_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ på naturlig vis betragtes som søjlevektorer i \mathbb{Z}^n , er de inducerede afbildninger $K_0(\mathcal{F}_k) \rightarrow K_0(\mathcal{F}_{k+1})$ givet som $x \mapsto A^{\top} x$.

Lad $\varinjlim (\mathbb{Z}^n, A^{\top})$ betegne den induktive grænse af den induktive følge

$$\mathbb{Z}^n \xrightarrow{A^{\top}} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{A^{\top}} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{A^{\top}} \cdots$$

For $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ skriver vi $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, netop hvis $\exists i_0 \in \mathbb{N} \forall i \geq i_0 (x_i = y_i)$. Således er ifølge kontinuiteten af K_0 (se [RLL00, thm.6.3.2])

$$K_0(\mathcal{F}_A) = \varinjlim (\mathbb{Z}^n, A^{\top}) = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^n)^{\mathbb{N}} \mid \exists i_0 \in \mathbb{N} \forall i \geq i_0 : x_{i+1} = A^{\top} x_i\} / \sim,$$

og afbildningerne $K_0(\mathcal{F}_k) = \mathbb{Z}^n \ni x \mapsto [(0, \dots, 0, x, A^{\top} x, A^{\top} A^{\top} x, \dots)]_{\sim} \in \varinjlim (\mathbb{Z}^n, A^{\top}) = K_0(\mathcal{F}_A)$, hvor x 'et optræder på den $(k+1)$ 'te plads, er de af inklusionsafbildningerne, $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_A$, inducerede afbildninger.

Ethvert element i $K_0(\mathcal{F}_A)$ kan skrives på formen $[(0, \dots, 0, x, A^{\top} x, A^{\top} A^{\top} x, \dots)]_{\sim}$. Af lemma 2.6.11 ses nu umiddelbart, at β^{-1} svarer til skiftafbildningen på $\varinjlim (\mathbb{Z}^n, A^{\top}) = K_0(\mathcal{F}_A)$ – mao. hvis $x \in K_0(\mathcal{F}_A)$ er repræsenteret ved følgen $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, så er $\beta^{-1}(x)$ repræsenteret ved følgen $(x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$.

Da \mathcal{F}_A er en AF -algebra, er $K_1(\mathcal{F}_A \otimes \mathbb{K}) \cong K_1(\mathcal{F}_A) \cong \{0\}$, thi K_1 -funktoren er stabil, kontinuert og additiv ([RLL00, prop.8.2.8, 8.2.7 og 8.2.6]), så da $K_1(\text{Mat}_k(\mathbb{C})) \cong \{0\}$ ([RLL00, example 8.1.8]), følger det ønskede (se også [RLL00, exercise 8.7]). Da $(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{F}_A \otimes \mathbb{K}$, er $K_1(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) \cong K_1(\mathcal{F}_A) \cong \{0\}$ – således giver Pimsner-Voiculescus cykliske seks-leddede exakte følge (se teorem 2.6.12) anvendt sammen med Takais dualitetssætning (se teorem 2.6.13) nu en exakt følge

$$0 \longrightarrow K_1(\mathcal{O}_A) \longrightarrow K_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) \xrightarrow{id - K_0(\hat{\alpha})^{-1}} K_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) \longrightarrow K_0(\mathcal{O}_A) \longrightarrow 0.$$

Altså har vi en exakt følge

$$0 \longrightarrow K_1(\mathcal{O}_A) \longrightarrow K_0(\mathcal{F}_A) \xrightarrow{id - \beta^{-1}} K_0(\mathcal{F}_A) \longrightarrow K_0(\mathcal{O}_A) \longrightarrow 0,$$

så

$$\begin{aligned} K_0(\mathcal{O}_A) &\cong K_0(\mathcal{F}_A)/(id - \beta^{-1})K_0(\mathcal{F}_A) \\ &\cong \varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)/(id - \sigma)\varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top), \\ K_1(\mathcal{O}_A) &\cong \ker(id - \beta^{-1}) \text{ på } K_0(\mathcal{F}_A) \\ &\cong \ker(id - \sigma) \text{ på } \varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top), \end{aligned}$$

hvor σ betegner skiftafbildningen på $\varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)$.

Teorem 2.6.15 *Givet en matrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfyldende betingelse (I). Da er*

$$\begin{aligned} K_0(\mathcal{O}_A) &\cong \mathbb{Z}^n/(I - A^\top)\mathbb{Z}^n \cong \text{cok}(I - A^\top), \\ K_1(\mathcal{O}_A) &\cong \ker(I - A^\top) \quad (\text{på } \mathbb{Z}^n). \end{aligned}$$

Mere specifikt, lad $[p_i]_0$ betegne klassen i $K_0(\mathcal{O}_A)$ indeholdende p_i , lad e_1, \dots, e_n betegne standard basen for \mathbb{Z}^n og lad $[e_i]$ betegne klassen for e_i i $\mathbb{Z}^n/(I - A^\top)\mathbb{Z}^n$. Da udvides afbildningen $[p_i]_0 \mapsto [e_i]$ til en isomorfi af $K_0(\mathcal{O}_A)$ på $\mathbb{Z}^n/(I - A^\top)\mathbb{Z}^n$.

Bevis: Lad $j: K_0(\mathcal{F}_0) = \mathbb{Z}^n \rightarrow \varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top) = K_0(\mathcal{F}_A)$ være homomorfien induceret af inklusionen $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_A$, dvs. $j(x) = [(x, A^\top x, (A^\top)^2 x, (A^\top)^3 x, \dots)]_\sim$. For ethvert $x \in \varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)$ og $k \in \mathbb{N}$ er $x - \sigma(x), \sigma(x) - \sigma^2(x), \sigma^2(x) - \sigma^3(x), \dots, \sigma^{k-1}(x) - \sigma^k(x) \in (id - \sigma)\varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)$, og dermed er $x - \sigma^k(x) \in (id - \sigma)\varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)$.

For hvert $x = [(x_i)_{i \in \mathbb{N}}]_\sim \in \varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)$ findes et $i_0 \in \mathbb{N}$, så $x_{i+1} = A^\top x_i$ for alle $i \geq i_0$. Klart er $\sigma^{i_0}(x) \in j(\mathbb{Z}^n)$ og $x - \sigma^{i_0}(x) \in (id - \sigma)\varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)$. Det er klart, at følgende diagram kommuterer

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{I - A^\top} & \mathbb{Z}^n \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ \varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top) & \xrightarrow{id - \sigma} & \varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top). \end{array}$$

Afbildningen j inducerer en afbildning $j': \mathbb{Z}^n \ni x \mapsto [j(x)] \in \varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)/(id - \sigma)\varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)$. Af ovenstående er det klart, at j' er surjektiv. Af diagrammet følger umiddelbart, at $(I - A^\top)\mathbb{Z}^n \subseteq \ker j'$. Vi vil nu vise den omvendte inklusion. Lad der derfor være givet et $x \in \mathbb{Z}^n$, således at $j(x) \in (id - \sigma)\varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)$. Antag, at $j(x) = (id - \sigma)[(y_i)_{i \in \mathbb{N}}]_\sim$. Således findes et $i_0 \in \mathbb{N}$, så $y_{i+1} = A^\top y_i$ og $(A^\top)^{i-1}x = y_i - y_{i+1} = (I - A^\top)y_i$ for alle $i \geq i_0$. Således er

$$(I - A^\top)(x + A^\top x + (A^\top)^2 x + \dots + (A^\top)^{i_0} x + y_{i_0+2}) = x - (A^\top)^{i_0+1} x + (I - A^\top)y_{i_0+2} = x.$$

Da således $\ker j' = (I - A^\top)\mathbb{Z}^n$ og j' er surjektiv, er

$$K_0(\mathcal{O}_A) \cong \varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)/(id - \sigma)\varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top) \cong \mathbb{Z}^n/(I - A^\top)\mathbb{Z}^n.$$

Det er endvidere af diagrammet klart, at $x \in \ker(I - A^\top) \Rightarrow j(x) \in \ker(id - \sigma)$. På den anden side, hvis $y \in \ker(id - \sigma)$ da kan y repræsenteres af en konstant følge (x, x, x, \dots) – og da $x = A^\top x$ (for at være et „lovligt element“ i $\varinjlim(\mathbb{Z}^n, A^\top)$), er $y = j(x)$ og $x \in \ker(I - A^\top)$. Følgelig er

$$K_1(\mathcal{O}_A) \cong \ker(id - \sigma) \cong \ker(I - A^\top).$$

Vi mangler at vise, at $[p_i]_0$ bliver sendt over i $[e_i]$ for $i = 1, \dots, n$. Da dette kræver, at man går ind i beviset, hvor isomorfien i Takais sætning konstrueres, udelades beviset. I [PR96, lem.4.2.2] er dette bevist for nogle Cuntz-Krieger algebraer over uendelige matricer – beviset kan sandsynligvis også bruges i vores tilfælde. I beviset for dette lemma henvises til artiklen [Rae88] – dette tidsskrift er imidlertid tilsyneladende bortkommet fra biblioteket, så jeg har ikke haft lejlighed til at kigge på denne artikel. ■

Bemærkning 2.6.16 Givet en matrix $B \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ (eller i $\text{Mat}_n(\mathbb{Z})$). Lad $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0)$ være Smith normal formen for B (jf. teorem 1.2.5 og bemærkning 1.2.7). Da ses umiddelbart, at

$$\text{cok } B \cong \text{cok } B^T \cong \text{cok } S \cong \mathbb{Z}/s_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/s_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-r},$$

$$\ker B \cong \ker B^T \cong \ker S \cong \mathbb{Z}^{n-r}.$$

Heraf ses umiddelbart, at $\text{cok } B$ og $\ker B$ er uendelige grupper, netop hvis $\det B = 0$. Og hvis $\det B \neq 0$, så er $\ker B$ trivial og $\text{cok } B$ er endelig med $|\det B|$ elementer.

Bemærkning 2.6.17 Vi vil her skitsere en konkret beskrivelse af $K_1(\mathcal{O}_A)$. Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylde (I). Lad $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{Z}^n$ være givet og lad $|x| = |x_1| + \dots + |x_n|$. Lad $v_x \in \text{Mat}_{|x|}(\mathcal{O}_A)$ være diagonalmatricen, som blandt sine indgange har $|x_i|$ kopier af s_i , hvis x_i er positiv og $|x_i|$ kopier af s_i^* , hvis x_i er negativ. Da er v_x en partiel isometri og $v_x^*v_x, v_xv_x^* \in \text{Mat}_{|x|}(\mathcal{D}_0)$. Bemærk, at $\mathcal{D}_0 \cong \mathbb{C}^n$. Således kan vi repræsentere $v_x^*v_x$ og $v_xv_x^*$ som elementer i $\bigoplus_{i=1}^{|x|} \mathbb{C}^n$ på oplagt måde. Bemærk endvidere, at

$$\text{Mat}_{|x|}(\mathbb{C}^n) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Mat}_{|x|}(\mathbb{C}).$$

Skrives diagonalelementerne i både $v_x^*v_x$ og $v_xv_x^*$ som summer af elementerne $\{s_1s_1^*, \dots, s_ns_n^*\}$, så ses at for $x_i \geq 0$ er antallet af $s_i s_i^*$ 'er i $v_xv_x^*$

$$x_i + \sum_{j \in \{k \mid x_k < 0\} \setminus \{i\}} |x_j| A(j, i)$$

og antallet af $s_i s_i^*$ 'er i $v_x^*v_x$ er

$$x_i A(i, i) + \sum_{j \in \{k \mid x_k \geq 0\} \setminus \{i\}} x_j A(j, i).$$

Forskellen på disse ligninger er forskellen på dimensionerne i den i 'te direkte summand; den er således

$$x_i - \sum_{j=1}^n A(j, i) x_j,$$

som er lig den i 'te komponent af $(I - A^T)x$. Det tilsvarende gælder (numerisk), hvis $x_j < 0$. Det følger således af [RLL00, exercise 2.9], at $(I - A^T)x = 0$, netop hvis $v_xv_x^*$ er (Murray-von Neumann) ækvivalent med $v_x^*v_x$ i $\text{Mat}_{|x|}(\mathcal{D}_0)$, netop hvis $I - v_xv_x^*$ er ækvivalent med $I - v_x^*v_x$. Antag nu, at $x \in \ker(I - A^T)$. Vi kan således vælge en partiel isometri $w_x \in \text{Mat}_{|x|}(\mathcal{D}_0)$, så $w_xw_x^* = I - v_xv_x^*$ og $w_x^*w_x = I - v_x^*v_x$. Sæt $u_x = v_x + w_x$. Da er u_x et unitært element i $\text{Mat}_{|x|}(\mathcal{D}_0)$, thi det ses nemt, at $v_xw_x^* = v_x(w_x^*w_x)w_x^* = v_xw_x^* - v_x(v_x^*v_x)w_x^* = 0$ og tilsvarende $v_x^*w_x = 0$ (og dermed i øvrigt også $w_xv_x^* = 0 = w_x^*v_x$).

Med ovenstående betegnelser, er afbildningen $\ker(I - A^T) \ni x \mapsto [u_x]_1 \in K_1(\mathcal{O}_A)$ en isomorfi (beviserne udelades – materialet er taget fra [Rør95, s.33]).

2.7 Idealgitteret

Definition 2.7.1 Et **gitter** er en ordnet mængde (S, \leq) , således at ethvert par af elementer $x, y \in S$ har en største nedre grænse (glb) og en mindste øvre grænse (lub).

Ved en **gitter homomorfi** fra (S_1, \leq_1) ind i (S_2, \leq_2) forstås en afbildning $g: S_1 \rightarrow S_2$, således at der for alle $x, y \in S_1$ gælder, at

$$g(\text{glb}(x, y)) = \text{glb}(g(x), g(y)),$$

$$g(\text{lub}(x, y)) = \text{lub}(g(x), g(y)).$$

Det ses nemt, at en gitter homomorfi automatisk er ordenstro. Endvidere ses nemt, at en afbildning mellem gitre er en gitter isomorfi, netop hvis den er en ordensisomorfi.

Bemærkning 2.7.2 Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra. Idet mængden af lukkede idealer i \mathfrak{A} ordnes ved inklusion, ses nemt, at dette er et gitter – kaldet **idealgitteret for \mathfrak{A}** og vi betegner det $(\mathcal{I}\text{deal}(\mathfrak{A}), \subseteq)$ eller kun $\mathcal{I}\text{deal}(\mathfrak{A})$. Vi har nemlig, at

$$\text{glb}(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2,$$

$$\text{lub}(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.$$

2.8 Idealstrukturen i \mathcal{O}_A

For at kunne beskrive idealstrukturen i \mathcal{O}_A har vi brug for lidt mere terminologi. Overalt i afsnittet antages A at være en ikke-degenereret $\{0, 1\}$ -matrix.

Definition 2.8.1 En delmængde H af Γ_A kaldes **arvelig**, netop hvis der for alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_A$ gælder, at

$$\gamma_1 \in H \wedge \gamma_1 \succeq \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \in H.$$

Bemærk, at således er den tomme mængde specielt arvelig.

Definition 2.8.2 På samme måde kaldes en delmængde γ af Σ **arvelig** (mht. A), netop hvis der for alle $i_1, i_2 \in \Sigma$ gælder, at

$$i_1 \in \gamma \wedge i_1 \succeq i_2 \Rightarrow i_2 \in \gamma.$$

Definition 2.8.3 Givet et $\gamma_0 \in \Gamma_A$. Da sættes

$$\begin{aligned} H(\gamma_0) &= \{\gamma \in \Gamma_A \mid \gamma_0 \succeq \gamma\}, \\ H_-(\gamma_0) &= \{\gamma \in \Gamma_A \mid \gamma_0 \succeq \gamma \wedge \gamma_0 \neq \gamma\} = H(\gamma_0) \setminus \{\gamma_0\}. \end{aligned}$$

Mao. er $H(\gamma_0)$ den mindste arvelige delmængde af Γ_A indeholdende γ_0 , og $H_-(\gamma_0)$ er den største ægte delmængde af $H(\gamma_0)$, som er arvelig.

Definition 2.8.4 For enhver delmængde $N \subseteq \Gamma_A$ defineres

$$\Sigma(N) = \{i \in \Sigma \mid \exists i_1, i_2 \in \bigcup_{\gamma \in N} \gamma : i_1 \succeq i \succeq i_2\}.$$

Definition 2.8.5 Vi siger, at en delmængde $\gamma \subseteq \Sigma$ er **mættet** (mht. A), netop hvis

$$\{i \in \Sigma \mid A(i, j) = 1 \Rightarrow j \in \gamma\} \subseteq \gamma.$$

Bemærk, at \emptyset og Σ er mættede og at enhver fællesmængde af mættede mængder er mættet.

For hver delmængde $\gamma \subseteq \Sigma$ kan vi således definere **mætningen**, $\bar{\gamma}$, af γ (mht. A) som den mindste mættede delmængde af Σ indeholdende γ . Dvs.

$$\bar{\gamma} = \bigcap \{\gamma' \subseteq \Sigma \mid \gamma \subseteq \gamma' \wedge \gamma' \text{ er mættet}\}.$$

Lemma 2.8.6 Lad H være en arvelig delmængde af Γ_A . Da gælder der

$$\overline{\Sigma(H)} = \{i \in \Sigma \mid \forall j \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma_A \setminus H} \gamma : i \not\succeq j\} = \Sigma \setminus \Sigma(\Gamma_A \setminus H).$$

Mao. består mængden $\overline{\Sigma(H)}$ af de knuder, der ikke har nogen sti til nogen af knuderne i $\bigcup(\Gamma_A \setminus H)$ (og følgelig har de en sti til en af knuderne i $\bigcup H$).

Bevis: Lad

$$\gamma_0 = \{i \in \Sigma \mid \forall j \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma_A \setminus H} \gamma : i \not\succeq j\}.$$

Mao. består mængden γ_0 af de knuder, der ikke har nogen sti til nogen af knuderne i $\bigcup(\Gamma_A \setminus H)$ (og følgelig har de en sti til en af knuderne i $\bigcup H$).

Det er klart, at γ_0 er mættet og at $\Sigma(H) \subseteq \gamma_0$. Følgelig er $\overline{\Sigma(H)} \subseteq \gamma_0$.

Da der ikke er nogle løkker gående mellem knuderne i $\gamma_0 \setminus \Sigma(H)$, findes en knude i_1 heri, så $A(i_1, j) = 1 \Rightarrow j \in \Sigma(H)$. Følgelig er $\Sigma(H) \cup \{i_1\} \subseteq \overline{\Sigma(H)}$. Da der ikke er nogle løkker gående mellem knuderne i $\gamma_0 \setminus (\Sigma(H) \cup \{i_1\})$, findes en knude i_2 heri, så $A(i_2, j) = 1 \Rightarrow j \in \Sigma(H) \cup \{i_1\}$. Følgelig er $\Sigma(H) \cup \{i_1, i_2\} \subseteq \overline{\Sigma(H)}$. Da der ikke er nogle løkker gående mellem knuderne i $\gamma_0 \setminus (\Sigma(H) \cup \{i_1, i_2\})$, findes en knude i_3 heri, så $A(i_3, j) = 1 \Rightarrow j \in \Sigma(H) \cup \{i_1, i_2\}$. Følgelig er $\Sigma(H) \cup \{i_1, i_2, i_3\} \subseteq \overline{\Sigma(H)}$. Da γ_0 er endelig, må denne proces bryde af. Følgelig er $\gamma_0 \subseteq \overline{\Sigma(H)}$.

Bemærk, at da H er arvelig og A er ikke-degenereret, er

$$\Sigma(\Gamma_A \setminus H) = \{i \in \Sigma \mid \exists i_2 \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma_A \setminus H} \gamma : i \succeq i_2\}.$$

■

Lemma 2.8.7 Lad H være en arvelig delmængde af Γ_A . Da er $\Sigma(H)$ og $\overline{\Sigma(H)}$ arvelige.

Bevis: Givet $i_1, i_2 \in \Sigma$, så $i_1 \in \Sigma(H)$ og $i_1 \succeq i_2$. Da findes $i_0 \in \bigcup_{\gamma \in H} \gamma$, så $i_0 \succeq i_1$ og endvidere findes $\gamma \in \Gamma_A$ og $i_3 \in \gamma$, så $i_2 \succeq i_3$. Følgelig er $i_0 \succeq i_2 \succeq i_3$ og $[i_3] = \gamma \in H$, da $[i_3] \preceq [i_0] \in H$.

At $\overline{\Sigma(H)}$ er arvelig, følger umiddelbart af foregående lemma. \blacksquare

Definition 2.8.8 For hver arvelig delmængde H af Γ_A lader vi \mathcal{J}_H betegne det lukkede ideal frembragt af $\{s_i \mid i \in \Sigma(H)\}$ i \mathcal{O}_A .

For hvert $\gamma \subseteq \Sigma$ sættes

$$\mathcal{M}_A(\gamma) = \{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{M}_A \mid k \in \mathbb{N}_0 \wedge i_1, \dots, i_k \in \gamma\}$$

og

$$p_\gamma = \sum_{i \in \gamma} p_i.$$

Definition 2.8.9 Vi siger, at en matrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylder **betingelse (II)**, netop hvis A er ikke-degenereret og A_γ ikke er en permutation for noget $\gamma \in \Gamma_A$.

Bemærkning 2.8.10 Det er således klart, at hvis $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylder betingelse (II), så vil både A og A^\top opfylde betingelse (I). Det er i øvrigt værd at bemærke, at hvis $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$, så kan vi definere det analoge til betingelserne (I) og (II) vha. irreducibilitetskomponenterne for $(\overline{X}_A, \overline{\sigma}_A)$ (det vil i et senere afsnit være behændigt).

Sætning 2.8.11 Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylde betingelse (II), lad \mathcal{J} være et lukket ideal i \mathcal{O}_A og lad $H \subseteq \Gamma_A$ være en arvelig mængde, da gælder der

(a) Mængden $C_{\mathcal{J}} = \{i \in \Sigma \mid s_i \in \mathcal{J}\}$ er mættet, $H_{\mathcal{J}} = \{[i] \mid i \in C_{\mathcal{J}} \wedge i \succeq i\}$ er arvelig og $C_{\mathcal{J}} = \overline{\Sigma(H_{\mathcal{J}})}$ (så $\mathcal{J}_{H_{\mathcal{J}}} \subseteq \mathcal{J}$).

(b)

$$i \in \overline{\Sigma(H)} \Rightarrow s_i \in \mathcal{J}_H.$$

(c) \mathcal{J}_H er det lukkede ideal frembragt af $p_{\Sigma(H)}$ og ligeledes er \mathcal{J}_H også det lukkede ideal frembragt af $p_{\overline{\Sigma(H)}}$.

(d) Elementerne

$$e_k = \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)}), \\ |\mu| \leq k}} s_\mu p_{\overline{\Sigma(H)}} s_\mu^*, k \in \mathbb{N}_0$$

udgør en approksimerende enhed for \mathcal{J}_H .

(e)

$$s_i \in \mathcal{J}_H \Rightarrow i \in \overline{\Sigma(H)}.$$

(f) Vi har, at $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{H_{\mathcal{J}}}$.

(g) Matricerne $A_{\Sigma(H)}$ og $A_{\Sigma(\Gamma_A \setminus H)}$ opfylder begge betingelse (II), $\mathcal{J}_H \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A_{\Sigma(H)}} \otimes \mathbb{K}$ og $\mathcal{O}_A / \mathcal{J}_H \cong \mathcal{O}_{A_{\Sigma(\Gamma_A \setminus H)}}$ (den sidste isomorfi er endda kanonisk).

(h) Skriv

$$\Sigma(H) = \{i_1, \dots, i_k\},$$

hvor $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Vi har da en isomorfi $\delta_1: K_0(\mathcal{J}_H) \rightarrow \text{cok}(I - A_{\Sigma(H)})^\top$, som opfylder, at $\delta_1([p_{i_1}]_0) = [(1, 0, \dots, 0)^\top]$, $\delta_1([p_{i_2}]_0) = [(0, 1, \dots, 0)^\top]$, \dots , $\delta_1([p_{i_k}]_0) = [(0, 0, \dots, 1)^\top]$.

Bevis: (a): For $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathcal{M}_A$ med $k \geq 1$ og $\mu_1 \in C_{\mathcal{J}}$ er $s_{\mu_k} = s_{\mu_k} q_{\mu_k} = s_{\mu_k} q_\mu \in \mathcal{J}$. Således er

$$i \in C_{\mathcal{J}} \wedge i \succeq j \Rightarrow j \in C_{\mathcal{J}}.$$

Heraf er det klart, at $C_{\mathcal{J}}$ er arvelig, at $H_{\mathcal{J}}$ er arvelig og at $\Sigma(H_{\mathcal{J}}) \subseteq C_{\mathcal{J}}$. Antag, at $i \in \Sigma$ og at $A(i, j) = 1 \Rightarrow j \in C_{\mathcal{J}}$. Så er

$$s_i = s_i \left(\sum_{j \in \Sigma} p_j \right) = s_i \left(\sum_{j \in C_{\mathcal{J}}} p_j \right) \in \mathcal{J},$$

da $s_i s_j = 0$ for alle $j \in \Sigma \setminus C_{\mathcal{J}}$ (pga. antagelsen). Altså er $i \in C_{\mathcal{J}}$, og $C_{\mathcal{J}}$ er således mættet.

Vi har nu vist, at $\overline{\Sigma(H_{\mathcal{J}})} \subseteq C_{\mathcal{J}}$ og mangler således kun at vise, at $C_{\mathcal{J}} \subseteq \overline{\Sigma(H_{\mathcal{J}})}$. Antag, at $i_0 \in \Sigma \setminus \overline{\Sigma(H_{\mathcal{J}})}$. Således findes ifølge lemma 2.8.6 et $i \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma_A \setminus H_{\mathcal{J}}} \gamma$, så $i_0 \succeq i$. Bemærk, at da $[i] \in \Gamma_A \setminus H_{\mathcal{J}}$, er $i \notin C_{\mathcal{J}}$. Da $C_{\mathcal{J}}$ er arvelig, følger, at $i_0 \notin C_{\mathcal{J}}$. Således har vi vist den anden inklusion.

(b): Fra del (a) vides, at $\{i \in \Sigma \mid s_i \in \mathcal{J}_H\}$ er en mættet mængde. Da $\{i \in \Sigma \mid s_i \in \mathcal{J}_H\}$ – ifølge definitionen – indeholder $\Sigma(H)$, er det klart, at $\overline{\Sigma(H)} \subseteq \{i \in \Sigma \mid s_i \in \mathcal{J}_H\}$.

(c): Der gælder oplagt, at $p_{\Sigma(H)} \in \mathcal{J}_H$. Af (b) følger umiddelbart, at $p_{\overline{\Sigma(H)}} \in \mathcal{J}_H$. På den anden side gælder der, at

$$p_{\Sigma(H)} s_i = \sum_{j \in \Sigma(H)} p_j p_i s_i = p_i s_i = s_i, \text{ for alle } i \in \Sigma(H),$$

$$p_{\overline{\Sigma(H)}} s_i = \sum_{j \in \overline{\Sigma(H)}} p_j p_i s_i = p_i s_i = s_i, \text{ for alle } i \in \overline{\Sigma(H)}.$$

(d): Da $\overline{\Sigma(H)}$ er arvelig, kan ethvert multiindex $\mu \in \mathcal{M}_A$ på entydig vis skrives på formen $\mu = \alpha\beta$, hvor $\alpha \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)})$ og $\beta \in \mathcal{M}_A(\overline{\Sigma(H)})$.

Af sætning 2.3.4(a) er det klart, at $s_{\mu} p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu}^*$ er projektioner for alle $\mu \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)})$. Der gælder, at $p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu} = 0$ for alle $\mu \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)})$ med $|\mu| \geq 1$, thi $s_i^* s_{\mu} = 0$, hvis μ ikke begynder med i . Således er $p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu} p_{\overline{\Sigma(H)}} = 0$ og $p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} = 0$ for alle $\mu \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)})$ med $|\mu| \geq 1$. Således følger af lemma 2.2.5, at projektionerne $(s_{\mu} p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu}^*)_{\mu \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)})}$ er indbyrdes ortogonale.

Da $p_j s_i = \delta_{i,j} s_i$, følger det, at $s_{\mu} = \sum_{j \in \Sigma} p_j s_{\mu} = \sum_{j \in \overline{\Sigma(H)}} p_j s_{\mu} = p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu}$ for alle $\mu \in \mathcal{M}_A(\overline{\Sigma(H)})$ med $|\mu| > 0$. Da $\overline{\Sigma(H)}$ er arvelig, gælder ligeledes, at $s_{\mu} = \sum_{j \in \Sigma} s_{\mu} p_j = \sum_{j \in \overline{\Sigma(H)}} s_{\mu} p_j = s_{\mu} p_{\overline{\Sigma(H)}}$ for alle $\mu \in \mathcal{M}_A(\overline{\Sigma(H)})$ med $|\mu| > 0$. Følgelig er

$$p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu} s_{\nu}^* = s_{\mu} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} = s_{\mu} s_{\nu}^* \quad (2.3)$$

for alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}_A(\overline{\Sigma(H)})$ med $|\mu| + |\nu| > 0$.

Således er $e_k, k \in \mathbb{N}_0$ projektioner (og derfor positive og med norm højst 1). Klart er $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ voksende. Vi ønsker nu at vise, at $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k x = x$ for alle $x \in \mathcal{J}_H$. Ethvert element i \mathcal{J}_H kan ifølge lemma 2.2.7, B.2 og B.1 approksimeres vilkårlig godt med en linearkombination fra $\{s_{\mu} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu'} s_{\nu'}^* \mid \mu, \nu, \mu', \nu' \in \mathcal{M}_A\}$. Vi antager derfor, at vi har givet $\mu, \nu, \mu', \nu' \in \mathcal{M}_A$, så $x = s_{\mu} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu'} s_{\nu'}^* \neq 0$. Så er nødvendigvis $\nu, \nu' \in \mathcal{M}_A(\overline{\Sigma(H)})$. Endvidere kan vi skrive μ og ν' på formen $\mu = \alpha\beta$ og $\nu' = \alpha'\beta'$, hvor $\alpha, \alpha' \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)})$ og $\beta, \beta' \in \mathcal{M}_A(\overline{\Sigma(H)})$. Hvis $|\beta| + |\nu| > 0$, så følger af ligning (2.3), at

$$s_{\alpha} s_{\beta} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} = s_{\alpha} p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\beta} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} = s_{\alpha} p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\alpha}^* s_{\alpha} s_{\beta} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}},$$

da $p_{\overline{\Sigma(H)}}, s_{\alpha}^* s_{\alpha} \in \mathcal{D}_A$. Denne ligning gælder oplagt også, hvis $\beta = \nu = \emptyset$. For alle $k \geq |\alpha|$ er således

$$\begin{aligned} e_k x &= \sum_{\substack{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)}), \\ |\tilde{\mu}| \leq k}} (s_{\tilde{\mu}} p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\tilde{\mu}}^*) (s_{\alpha} s_{\beta} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu'} s_{\beta'}^* s_{\alpha'}^*) \\ &= \sum_{\substack{\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)}), \\ |\tilde{\mu}| \leq k}} (s_{\tilde{\mu}} p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\tilde{\mu}}^*) (s_{\alpha} p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\alpha}^*) (s_{\alpha} s_{\beta} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu'} s_{\beta'}^* s_{\alpha'}^*) \\ &= (s_{\alpha} p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\alpha}^*) (s_{\alpha} s_{\beta} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu'} s_{\beta'}^* s_{\alpha'}^*) \\ &= (s_{\alpha} s_{\beta} s_{\nu}^* p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\mu'} s_{\beta'}^* s_{\alpha'}^*) \\ &= x. \end{aligned}$$

Ved et tæthedsargument har vi således vist, at $(e_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ er en approksimerende enhed for \mathcal{J}_H .

(e): Lad der være givet et $i \in \Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)}$. Vi vil så vise, at $s_i \notin \mathcal{J}_H$. Ifølge lemma 2.8.6 findes $i_0 \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma_A \setminus H} \gamma$, således at $i \succeq i_0$. Bemærk, at $i_0 \succeq i_0$ og $i_0 \in \Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)} = \Sigma(\Gamma_A \setminus H)$.

Givet $k \in \mathbb{N}$. Vi ønsker nu at vise, at $\|q_{i_0} e_k - q_{i_0}\| = 1$. For hvert $\mu \in \mathcal{M}_A$ er $p_{\mu}, e_k \in \mathcal{D}_A$ og således er også

$$p_{\mu} e_k = p_{\mu} e_k p_{\mu} \leq p_{\mu} \mathbb{1}_{\mathcal{O}_A} p_{\mu} = p_{\mu}.$$

Der findes klart et $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \in \mathcal{M}_A(\Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)})$ med $|\nu| = k$, således at $i_0 \nu \in \mathcal{M}_A$. Endvidere findes et $j_0 \in \Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)}$, så $A(\nu_k, j_0) = 1$ (thi ellers var $\nu_k \in \overline{\Sigma(H)}$). Således er

$$p_{\nu} = \sum_{j \in \Sigma} p_{\nu j} \geq p_{\nu j_0} + \sum_{j \in \overline{\Sigma(H)}} p_{\nu j} = p_{\nu j_0} + s_{\nu} p_{\overline{\Sigma(H)}} s_{\nu}^*.$$

Da $s_i^* p_{\overline{\Sigma(H)}} = 0$ for alle $i \in \Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)}$, er $s_\nu^* s_\mu p_{\overline{\Sigma(H)}} = 0$ for alle $\mu \in \mathcal{M}_A$ med $|\mu| < k$. Følgelig er $p_\nu e_k = p_\nu s_\nu p_{\overline{\Sigma(H)}} s_\nu^* = s_\nu p_{\overline{\Sigma(H)}} s_\nu^*$. Og da $p_{\nu j_0} \neq 0$, følger det således, at

$$p_\nu \succeq p_\nu e_k.$$

Der gælder, at

$$q_{i_0} = \sum_{j \in \Sigma} A(i_0, j) p_j = \sum_{j \in \Sigma} \sum_{\mu \in \mathcal{M}_A^{k-1}} A(i_0, j) p_{j\mu} = \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_A^k \\ i_0 \mu \in \mathcal{M}_A}} p_\mu.$$

Følgelig er

$$q_{i_0} e_k = \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_A^k \\ i_0 \mu \in \mathcal{M}_A}} p_\mu e_k \preceq \sum_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_A^k \\ i_0 \mu \in \mathcal{M}_A}} p_\mu = q_{i_0}.$$

Altså er $q_{i_0} - q_{i_0} e_k$ en projektion forskellig fra nul-projektionen. Følgelig er $\|q_{i_0} - q_{i_0} e_k\| = 1$. Da $k \in \mathbb{N}$ var vilkårlig og $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er en approksimerende enhed for \mathcal{J}_H , er $q_{i_0} \notin \mathcal{J}_H$.

Da $i \succeq i_0$, findes $\nu_0 \in \mathcal{M}_A$, så $i\nu_0 i_0 \in \mathcal{M}_A$. Følgelig er $s_{i\nu_0 i_0}^* s_{i\nu_0 i_0} = q_{i_0} \notin \mathcal{J}_H$ – og da \mathcal{J}_H er et ideal er således $s_i \notin \mathcal{J}_H$.

(g): Sæt $A' = A_{\Sigma(H)}$ og $A'' = A_{\Sigma(\Gamma_A \setminus H)}$. Det er ret oplagt, at A' og A'' opfylder (II). Lad \mathfrak{A}_1 og \mathfrak{A}_2 være C^* -algebraer og lad $\varphi_1: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathfrak{A}_1$ og $\varphi_2: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathfrak{A}_2$ være to surjektive $*$ -homomorfier, som opfylder, at for $i = 1, 2$ er $\varphi_i(s_j) = 0$ for alle $j \in \overline{\Sigma(H)} = \Sigma \setminus \Sigma(\Gamma_A \setminus H)$ og $\varphi_i(s_j) \neq 0$ for alle $j \in \Sigma \setminus \overline{\Sigma(H)} = \Sigma(\Gamma_A \setminus H)$. Altså opfylder $(\varphi_1(s_i))_{i \in \Sigma(\Gamma_A \setminus H)}$ og $(\varphi_2(s_i))_{i \in \Sigma(\Gamma_A \setminus H)}$ begge (A'') , og da A'' opfylder (II), følger af teorem 2.5.8 at afbildningen $\varphi_1(s_i) \mapsto \varphi_2(s_i), i \in \Sigma$ udvides entydigt til en $*$ -homomorfi ϕ af $\varphi_1(\mathcal{O}_A) \cong \mathcal{O}_{A''}$ på $\varphi_2(\mathcal{O}_A) \cong \mathcal{O}_{A''}$, som endda er en isomorfi. Pga. entydighed kommuterer diagrammet

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker \varphi_1 & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \mathcal{O}_A & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathfrak{A}_1 \longrightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \cong \downarrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & \ker \varphi_2 & \xrightarrow{\hookrightarrow} & \mathcal{O}_A & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathfrak{A}_2 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Altså er $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$, thi

$$x \in \ker \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_2(x) = (\phi \circ \varphi_1)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker \varphi_2.$$

Heraf og af del (b) og (e) ses umiddelbart, ved at lade $\varphi_1: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_A/\mathcal{J}_H$ være kvotientafbildningen, at $\mathcal{O}_A/\mathcal{J}_H \cong \mathcal{O}_{A_{\Sigma(\Gamma_A \setminus H)}}$.

For ethvert $\mu \in \mathcal{M}_A$ med $|\mu| \geq 1$ er

$$p_{\Sigma(H)} s_\mu = \begin{cases} s_\mu & \text{hvis } \mu_1 \in \Sigma(H), \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da $\Sigma(H)$ er arvelig, er således $p_{\Sigma(H)} s_\mu s_\nu^* p_{\Sigma(H)} \in C^*({s_i | i \in \Sigma(H)})$ for alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}_A$. Da ethvert element i \mathcal{O}_A kan approksimeres vilkårligt godt med linearkombinationer fra $\{s_\mu s_\nu^* | \mu, \nu \in \mathcal{M}_A\}$, er således $p_{\Sigma(H)} \mathcal{O}_A p_{\Sigma(H)} \subseteq C^*({s_i | i \in \Sigma(H)})$. Der gælder, at

$$s_i = \sum_{j \in \Sigma} \sum_{k \in \Sigma} p_j s_i p_k = \sum_{j \in \Sigma(H)} \sum_{k \in \Sigma(H)} p_j s_i p_k = p_{\Sigma(H)} s_i p_{\Sigma(H)}$$

for alle $i \in \Sigma(H)$, da $p_j s_i = \delta_{ij} s_i$ og $\Sigma(H)$ er arvelig. Således er den omvendte inklusion klar – altså gælder der $p_{\Sigma(H)} \mathcal{O}_A p_{\Sigma(H)} = C^*({s_i | i \in \Sigma(H)})$. Således er $p_{\Sigma(H)} \mathcal{O}_A p_{\Sigma(H)} = p_{\Sigma(H)} \mathcal{J}_H p_{\Sigma(H)}$ kanonisk isomorf med $\mathcal{O}_{A'}$.

Vi ønsker nu at vise, at $p_{\Sigma(H)} \mathcal{J}_H p_{\Sigma(H)}$ er et fuldt hjørne i \mathcal{J}_H . Antag, at \mathcal{J}_0 er et lukket ideal i \mathcal{J}_H indeholdende $p_{\Sigma(H)} \mathcal{J}_H p_{\Sigma(H)}$. Følgelig er \mathcal{J}_0 et lukket ideal i \mathcal{O}_A indeholdende $p_{\Sigma(H)}$ (jf. [Mur90, rem.3.1.2]). Da \mathcal{J}_H er det lukkede ideal frembragt af $p_{\Sigma(H)}$ (se del (c)), er $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_H$ og $p_{\Sigma(H)} \mathcal{J}_H p_{\Sigma(H)}$ er således et fuldt hjørne i \mathcal{J}_H . Da $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_A}$ er et strengt positivt element i \mathcal{O}_A , følger nu af Browns resultat (se teorem 2.6.5), at $\mathcal{O}_{A'}$ er stabilt isomorf med \mathcal{J}_H .

(f): For et givet lukket ideal \mathcal{J} , lad $\varphi_1: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_A/\mathcal{J}_{H\mathcal{J}}$ og $\varphi_2: \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_A/\mathcal{J}$ være kvotientafbildningerne. Af ovenstående samt del (a), (b) og (e) ses umiddelbart, at for $i = 1, 2$ er $\varphi_i(s_j) = 0$ for alle $j \in \overline{\Sigma(H\mathcal{J})} = \Sigma \setminus \Sigma(\Gamma_A \setminus H\mathcal{J})$ og $\varphi_i(s_j) \neq 0$ for alle $j \in \Sigma \setminus \overline{\Sigma(H\mathcal{J})} = \Sigma(\Gamma_A \setminus H\mathcal{J})$. Følgelig er $\mathcal{J}_{H\mathcal{J}} = \ker \varphi_1 = \ker \varphi_2 = \mathcal{J}$.

(h): Ifølge ovenstående, er $p_{\Sigma(H)} \mathcal{J}_H p_{\Sigma(H)}$ kanonisk isomorf med $\mathcal{O}_{A_{\Sigma(H)}}$ og $p_{\Sigma(H)} \mathcal{J}_H p_{\Sigma(H)}$ er et fuldt hjørne i idealet \mathcal{J}_H . Af sætning 2.6.6 følger, at indlejringen af $p_{\Sigma(H)} \mathcal{J}_H p_{\Sigma(H)} \hookrightarrow \mathcal{J}_H$ inducerer en isomorfi $K_0(p_{\Sigma(H)} \mathcal{J}_H p_{\Sigma(H)}) \rightarrow K_0(\mathcal{J}_H)$ i K -teori. Ved at bruge identifikationen af $K_0(\mathcal{O}_{A_{\Sigma(H)}})$ med $\text{cok}(I - A_{\Sigma(H)})^\Gamma$ fra teorem 2.6.15, ses nu umiddelbart det ønskede. ■

Teorem 2.8.12 *Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylde (II). Da er afbildningen $H \mapsto \mathcal{J}_H$ en gitterisomorfi af mængden af arvelige delmængder af Γ_A på mængden af lukkede idealer i \mathcal{O}_A .*

Bevis: Vi ønsker først at vise, at afbildningen $H \mapsto \mathcal{J}_H$ er bijektiv. Surjektiviteten følger umiddelbart af del (f) i foregående sætning. Antag derfor, at $\mathcal{J}_H = \mathcal{J}_{H'}$. Af (b) og (e) i foregående sætning følger, at

$$\overline{\Sigma(H)} = \overline{\Sigma(H')},$$

og heraf, at $H = H'$.

Da afbildningen klart er inklusionsbevarende, er den således en gitterisomorfi. ■

Bemærkning 2.8.13 I [aHR97, thm.3.5] findes en mere generel version af dette teorem, hvor de gauge-invariante idealer klassificeres (og hvor matricerne ikke nødvendigvis opfylder betingelse (I)).

Eksempel 2.8.14 Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en givet matrix på formen

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ X & A_2 & 0 \\ Y & 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

hvor A_1, A_2 og A_3 er irreducible ikke-permutationsmatricer og $X, Y \neq 0$. Da har Γ_A præcis tre elementer svarende til diagonalblokkene; skriv $\Gamma_A = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, hvor γ_i svarer til A_i , $i = 1, 2, 3$. De arvelige delmængder af Γ_A er da præcis \emptyset , $H(\gamma_1) = \{\gamma_1\}$, $H(\gamma_2) = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, $H(\gamma_3) = \{\gamma_1, \gamma_3\}$ samt $\Gamma_A = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Sæt $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_\emptyset$, $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_{H(\gamma_1)}$, $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_{H(\gamma_2)}$ og $\mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_{H(\gamma_3)}$. Dette svarer til idealstrukturen

$$\begin{array}{ccccc} & & & \mathcal{J}_2 & & \\ & & & \swarrow & \searrow & \\ & & & \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 \cap \mathcal{J}_3 & & \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = \mathcal{O}_A \\ & & & \swarrow & \searrow & \\ & & & \mathcal{J}_3 & & \\ & & & \swarrow & \searrow & \\ \{0\} = \mathcal{J}_0 & \xrightarrow{\subseteq} & & & & \end{array}$$

2.9 Γ_A er en invariant for $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K}$

Sætning 2.9.1 *Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra med enhed $\mathbf{1}$. Da er afbildningen $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{I} \otimes \mathbb{K}$ en gitter isomorfi af $\text{Ideal}(\mathfrak{A})$ på $\text{Ideal}(\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K})$. Følgelig kan idealgitteret for \mathfrak{A} betragtes som en invariant for den stabiliserede C^* -algebra $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$.*

Bevis: Lad \mathcal{I} være et lukket ideal i \mathfrak{A} . Da \mathbb{K} er nukleær, betragtes $\mathcal{I} \otimes \mathbb{K}$ som en del- C^* -algebra af $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$ (jf. [Mur90, rem.6.5.1]). Det er ligetil at vise, at $\mathcal{I} \otimes \mathbb{K}$ er et ideal i $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$.

Vi kan konkret betragte \mathbb{K} som værende de kompakte operatorer på ℓ_2 , $\mathbb{K}(\ell_2)$. Lad således – som sædvanligt – e_{ij} betegne den partielle isometri, givet ved, at $e_{ij}((h_l)_{l \in \mathbb{N}}) = (\delta_{il} h_j)_{l \in \mathbb{N}}$ – ma. „flytter e_{ij} koordinat j over i koordinat i “. Således er $(e_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ et system af matrix enheder i \mathbb{K} . For hvert $j \in \mathbb{N}$ sætter vi $p_j = \sum_{i=1}^j e_{ii}$. Da er $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en approksimerende enhed for \mathbb{K} (jf. [Mur90, example 3.1.1]).

Lad \mathcal{I} være et lukket ideal i \mathfrak{A} . Vi ønsker at vise, at

$$\mathcal{I} \otimes \mathbb{K} = \overline{\text{span}}\{(\mathbf{1} \otimes k)(x \otimes e_{11})(\mathbf{1} \otimes k') \mid x \in \mathcal{I} \wedge k, k' \in \mathbb{K}\}. \quad (2.4)$$

Sæt $\mathcal{J} = \overline{\text{span}}\{(\mathbf{1} \otimes k)(x \otimes e_{11})(\mathbf{1} \otimes k') \mid x \in \mathcal{I} \wedge k, k' \in \mathbb{K}\}$. Da $\mathcal{I} \otimes \mathbb{K}$ er et lukket ideal, er det klart, at $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I} \otimes \mathbb{K}$. På den anden side er $x \otimes k \in \mathcal{J}$ for alle $x \in \mathcal{I}$ og $k \in \mathbb{K}$, thi \mathcal{J} er afsluttet og

$$\sum_{i=1}^j (\mathbf{1} \otimes e_{i1})(x \otimes e_{11})(\mathbf{1} \otimes e_{1i}k) = \sum_{i=1}^j (x \otimes e_{ii}k) = x \otimes p_j k \rightarrow x \otimes k \quad \text{for } j \rightarrow \infty.$$

Følgelig er $\mathcal{I} \otimes \mathbb{K} \subseteq \mathcal{J}$, og dermed er $\mathcal{I} \otimes \mathbb{K} \subseteq \mathcal{J}$, da \mathcal{J} er afsluttet. Således har vi vist, at ligning (2.4) gælder og at dette er det lukkede ideal frembragt af $\mathcal{I} \otimes \mathbb{C}e_{11}$.

Surjektivitet af $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{I} \otimes \mathbb{K}$: Bemærk, at $a \mapsto a \otimes e_{11}$ er en $*$ -isomorfi af \mathfrak{A} på $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}e_{11}$. Så de lukkede idealer i \mathfrak{A} og i $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}e_{11}$ står i en-en korrespondance. Lad der være givet et lukket ideal \mathcal{J} i $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$. Sæt $\mathcal{I}_0 = (\mathbf{1} \otimes e_{11})\mathcal{J}(\mathbf{1} \otimes e_{11})$. Det er klart, at \mathcal{I}_0 er et to-sidet ideal i $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}e_{11}$. Lad $x_i \in \mathcal{J}$, $i \in \mathbb{N}$ og antag, at $((\mathbf{1} \otimes e_{11})x_i(\mathbf{1} \otimes e_{11}))_{i \in \mathbb{N}}$ er konvergent i $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}e_{11}$ med grænse y . Da $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{C}e_{11} = \mathfrak{A} \odot \mathbb{C}e_{11}$ er et underrum af $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$, ligger grænseværdien i det afsluttede ideal \mathcal{J} . Således er

$$y = \lim_{i \rightarrow \infty} (\mathbf{1} \otimes e_{11})x_i(\mathbf{1} \otimes e_{11}) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\mathbf{1} \otimes e_{11})(\mathbf{1} \otimes e_{11})x_i(\mathbf{1} \otimes e_{11})(\mathbf{1} \otimes e_{11}) = (\mathbf{1} \otimes e_{11})y(\mathbf{1} \otimes e_{11}) \in \mathcal{I}_0.$$

Følgelig er \mathcal{I}_0 afsluttet. Lad \mathcal{J}_0 være det afsluttede ideal frembragt af \mathcal{I}_0 i $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$. Klart er $\mathcal{J}_0 \subseteq \mathcal{J}$. For alle $x \in \mathcal{J}$ er $\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l (\mathbf{1} \otimes e_{ii})x(\mathbf{1} \otimes e_{jj}) = (\mathbf{1} \otimes p_l)x(\mathbf{1} \otimes p_l) \rightarrow x$ for $l \rightarrow \infty$. For at vise inklusionen $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}_0$ er det således nok at vise, at $(\mathbf{1} \otimes e_{ii})x(\mathbf{1} \otimes e_{jj}) \in \mathcal{J}_0$ for alle $i, j \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathcal{J}$, da \mathcal{J}_0 er afsluttet underrum. Lad der således være givet $i, j \in \mathbb{N}$ og $x \in \mathcal{J}$. Da er

$$(\mathbf{1} \otimes e_{ii})x(\mathbf{1} \otimes e_{jj}) = (\mathbf{1} \otimes e_{i1}e_{11}e_{1i})x(\mathbf{1} \otimes e_{j1}e_{11}e_{1j}) = (\mathbf{1} \otimes e_{i1})(\mathbf{1} \otimes e_{11})(\mathbf{1} \otimes e_{1i})x(\mathbf{1} \otimes e_{j1})(\mathbf{1} \otimes e_{11})(\mathbf{1} \otimes e_{1j}).$$

Og da $(\mathbf{1} \otimes e_{1i})x(\mathbf{1} \otimes e_{j1}) \in \mathcal{J}$, er $(\mathbf{1} \otimes e_{11})(\mathbf{1} \otimes e_{1i})x(\mathbf{1} \otimes e_{j1})(\mathbf{1} \otimes e_{11}) \in \mathcal{I}_0$ – så $(\mathbf{1} \otimes e_{ii})x(\mathbf{1} \otimes e_{jj}) \in \mathcal{J}_0$. Vi har således vist, at $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}$. Hermed er surjektiviteten vist, og vi har et bud på en invers afbildning.

Injektivitet af $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{I} \otimes \mathbb{K}$: Givet et lukket ideal \mathcal{I} i \mathfrak{A} . Vi ønsker at vise, at

$$(\mathbf{1} \otimes e_{11})(\mathcal{I} \otimes \mathbb{K})(\mathbf{1} \otimes e_{11}) = \mathcal{I} \otimes \mathbb{C}e_{11}.$$

Thi af denne ligning følger injektiviteten (da vi har en (venstre)-invers afbildning). Inklusionen „ \supseteq “ er klar! For alle $x \in \mathcal{I}$ og $k \in \mathbb{K}$ er $e_{11}ke_{11} = \lambda e_{11}$ for et passende $\lambda \in \mathbb{C}$, og dermed er

$$(\mathbf{1} \otimes e_{11})(x \otimes k)(\mathbf{1} \otimes e_{11}) = x \otimes e_{11}ke_{11} \in \mathcal{I} \otimes \mathbb{C}e_{11}.$$

Ved linearitet ses, at $(\mathbf{1} \otimes e_{11})(\mathcal{I} \otimes \mathbb{K})(\mathbf{1} \otimes e_{11}) \subseteq \mathcal{I} \otimes \mathbb{C}e_{11}$. Da $\mathcal{I} \otimes \mathbb{C}e_{11} = \mathcal{I} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathbb{C}e_{11}$ er afsluttet i $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$, ses ved et tæthedsargument, at også $(\mathbf{1} \otimes e_{11})(\mathcal{I} \otimes \mathbb{K})(\mathbf{1} \otimes e_{11}) \subseteq \mathcal{I} \otimes \mathbb{C}e_{11}$.

Da $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{I} \otimes \mathbb{K}$ klart er inklusionsbevarende, følger nu, at denne er en gitter isomorfi. ■

Sætning 2.9.2 *Lad A og A' være $\{0, 1\}$ -matricer, som opfylder betingelse (II). Da gælder, at*

$$\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K} \Rightarrow (\Gamma_A, \succeq) \cong (\Gamma_{A'}, \succeq).$$

Den ordnede mængde af komponenter er altså en invariant af Cuntz-Krieger algebraer op til stabil isomorfi. Mere specifikt gælder der, at hvis $\varphi: \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$ er en isomorfi, så findes der en ordensisomorfi $\delta: (\Gamma_A, \succeq) \rightarrow (\Gamma_{A'}, \succeq)$, som opfylder, at $\varphi(\mathcal{J}_{H(\gamma)} \otimes \mathbb{K}) = \mathcal{J}_{H(\delta(\gamma))} \otimes \mathbb{K}$ for alle $\gamma \in \Gamma_A$.

Bevis: Antag, at der er givet en isomorfi $\varphi: \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$. Lad $\text{Her}(\Gamma_A)$ og $\text{Her}(\Gamma_{A'})$ betegne gitteret af arvelige delmængder af hhv. Γ_A og $\Gamma_{A'}$. Da følger af teorem 2.8.12 og sætning 2.9.1, at der findes en gitter isomorfi $\eta: \text{Her}(\Gamma_A) \rightarrow \text{Her}(\Gamma_{A'})$, som opfylder, at $\varphi(\mathcal{J}_H \otimes \mathbb{K}) = \mathcal{J}_{\eta(H)} \otimes \mathbb{K}$ for alle $H \in \text{Her}(\Gamma_A)$.

Givet $\gamma_0 \in \Gamma_A$. Vi ønsker at vise, at $\text{card}(\eta(H(\gamma_0)) \setminus \eta(H_-(\gamma_0))) = 1$. Klart er $\eta(H(\gamma_0)) \setminus \eta(H_-(\gamma_0)) \neq \emptyset$. Givet $\gamma'_1, \gamma'_2 \in \eta(H(\gamma_0)) \setminus \eta(H_-(\gamma_0))$. Da

$$H(\gamma'_1), H(\gamma'_2) \subseteq \eta(H(\gamma_0)), \quad H(\gamma'_1), H(\gamma'_2) \not\subseteq \eta(H_-(\gamma_0)),$$

er

$$\eta^{-1}(H(\gamma'_1)), \eta^{-1}(H(\gamma'_2)) \subseteq H(\gamma_0), \quad \eta^{-1}(H(\gamma'_1)), \eta^{-1}(H(\gamma'_2)) \not\subseteq H_-(\gamma_0).$$

Bemærk, at $H_-(\gamma_0)$ er den største ægte delmængde af $H(\gamma_0)$, som er arvelig. Således er $\eta^{-1}(H(\gamma'_1)) = H(\gamma_0) = \eta^{-1}(H(\gamma'_2))$, dvs. $H(\gamma'_1) = \eta(H(\gamma_0)) = H(\gamma'_2)$. Så $\gamma'_1 \succeq \gamma'_2$ og $\gamma'_2 \succeq \gamma'_1$, og således er $\gamma'_1 = \gamma'_2$.

Således veldefineres en afbildning $\delta: \Gamma_A \rightarrow \Gamma_{A'}$, ved at $\delta(\gamma_0)$ er lig elementet i $\eta(H(\gamma_0)) \setminus \eta(H_-(\gamma_0))$ for hvert $\gamma_0 \in \Gamma_A$. Og analogt veldefineres en afbildning $\delta': \Gamma_{A'} \rightarrow \Gamma_A$, ved at $\delta'(\gamma'_0)$ er lig elementet i $\eta^{-1}(H(\gamma'_0)) \setminus \eta^{-1}(H_-(\gamma'_0))$ for hvert $\gamma'_0 \in \Gamma_{A'}$. Fra ovenstående har vi endda ligningerne

$$H(\delta(\gamma_0)) = \eta(H(\gamma_0)), \quad H_-(\delta(\gamma_0)) = \eta(H_-(\gamma_0)) \quad \text{for } \gamma_0 \in \Gamma_A,$$

$$H(\delta'(\gamma'_0)) = \eta^{-1}(H(\gamma'_0)), \quad H_-(\delta'(\gamma'_0)) = \eta^{-1}(H_-(\gamma'_0)) \quad \text{for } \gamma'_0 \in \Gamma_{A'}.$$

Således er $\delta'(\delta(\gamma_0))$ lig elementet i

$$\eta^{-1}(H(\delta(\gamma_0))) \setminus \eta^{-1}(H_-(\delta(\gamma_0))) = H(\gamma_0) \setminus H_-(\gamma_0) = \{\gamma_0\},$$

og $\delta(\delta'(\gamma'_0))$ er lig elementet i

$$\eta(H(\delta'(\gamma'_0))) \setminus \eta(H_-(\delta'(\gamma'_0))) = H(\gamma'_0) \setminus H_-(\gamma'_0) = \{\gamma'_0\}.$$

Ergo er δ bijektiv (med δ' som invers afbildning). For alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_A$ er

$$\gamma_1 \succeq \gamma_2 \Leftrightarrow H(\gamma_1) \supseteq H(\gamma_2) \Leftrightarrow H(\delta(\gamma_1)) = \eta(H(\gamma_1)) \supseteq \eta(H(\gamma_2)) = H(\delta(\gamma_2)) \Leftrightarrow \delta(\gamma_1) \succeq \delta(\gamma_2).$$

Og således er δ en ordensisomorfi. ■

2.10 Cuntz-Krieger algebraer som invarianter

Teorem 2.10.1 *Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\{0, 1\})$ være to givne matricer. Da gælder følgende:*

- (a) *Hvis A og A' opfylder betingelse (I) og (X_A, σ_A) og $(X_{A'}, \sigma_{A'})$ er topologisk konjugerede, så er $\mathcal{O}_A \cong \mathcal{O}_{A'}$,*
 (b) *Hvis A, A^\top, A' og A'^\top opfylder betingelse (I) og $(\bar{X}_A, \bar{\sigma}_A)$ og $(\bar{X}_{A'}, \bar{\sigma}_{A'})$ er topologisk konjugerede, så er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$,*
 (c) *Hvis A, A^\top, A' og A'^\top opfylder betingelse (I) og $(\bar{X}_A, \bar{\sigma}_A)$ og $(\bar{X}_{A'}, \bar{\sigma}_{A'})$ er FE (hvilket jo også betegnes $A \sim_{FE} A'$), så er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$.*

Bevis: (a): Dette er bevist i [CK80, prop.2.17]. Selv om det ikke er særlig svært at vise (da vi allerede har vist, at $\mathcal{D}_A \cong C(X_A)$, sætning 2.3.10), udelades beviset. Omend dette er et vigtigt og interessant resultat, så har det ikke så stor betydning her i specialet, da hovedfokuset ligger på stabil isomorfi.

(b): Dette er bevist i [Cun81, thm.2.3] – beviset udelades. Dette er af flere årsager. Alt kan ikke komme med i specialet, men grunden, til at jeg har valgt at lade præcis dette udgå, er, at beviset ikke er særlig interessant ud fra, hvad målsætningen med specialet er. Hvis jeg havde vist dette, så ville jeg dog nemmere kunne udregne K -teorien for Cuntz-Krieger algebraerne (undervejs laves mange krydsprodukter).

(c): Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være givet. Definér en ny matrix $PS(A) \in \text{Mat}_{n+1}(\{0, 1\})$ ved

$$PS(A) = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bemærk, at A og A^\top opfylder betingelse (I), netop hvis $PS(A)$ og $PS(A)^\top$ opfylder betingelse (I). Det er således ifølge del (b) og Parry og Sullivans resultat (teorem 1.5.5) nok at vise, at $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{PS(A)} \otimes \mathbb{K}$. Lad s_0, s_1, \dots, s_n være de kanoniske partielle isometrier, som frembringer C^* -algebraen $\mathcal{O}_{PS(A)}$. Sæt $s'_1 = s_1 s_0, s'_2 = s_2, \dots, s'_n = s_n$. Da er $s_i s_0 \neq 0 \Leftrightarrow i = 1$ og $s_1 s_i \neq 0 \Leftrightarrow i = 0$. Således er

$$s_1 s_1^* = \sum_{i=0}^n s_1 s_i s_i^* s_1^* = s_1 s_0 s_0^* s_1^* = s'_1 s_1'^* \text{ og } s_1'^* s'_1 = s_0^* s_1^* s_1 s_0 = s_0^* s_0.$$

Det er således klart, at $(s'_i)_{i=1}^n$ opfylder (A). Sæt

$$p = \sum_{i=1}^n s_i s_i^* = \sum_{i=1}^n s'_i s_i'^*.$$

Hvis $s_\mu \neq 0$ for et $\mu \in \mathcal{M}_{PS(A)}$, så findes et $\alpha \in \mathcal{M}_A$, så s_μ er lig $s_0 s'_\alpha, s'_\alpha, s'_\alpha s_0^*$ eller $s_0 s'_\alpha s_0^*$ (thi $s_1 = s_1 s_0 s_0^* = s'_1 s_0^*$). Hvis $p s_\mu s_\nu^* p \neq 0$ for $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{PS(A)}$, findes således $\alpha, \beta \in \mathcal{M}_A$, så $p s_\mu s_\nu^* p = s'_\alpha s'_\beta^*$. Da elementerne i $\mathcal{O}_{PS(A)}$ kan approksimeres vilkårlig godt med elementer fra $\{s_\mu s_\nu^* \mid \mu, \nu \in \mathcal{M}_{PS(A)}\}$, er $p \mathcal{O}_{PS(A)} p$ frembragt af elementerne s'_1, \dots, s'_n (det er klart, at $s'_1, \dots, s'_n \in p \mathcal{O}_{PS(A)} p$). Følgelig er $p \mathcal{O}_{PS(A)} p$ (kanonisk) isomorf med \mathcal{O}_A .

Antag, at \mathcal{I} er et lukket ideal i $\mathcal{O}_{PS(A)}$ indeholdende $p \mathcal{O}_{PS(A)} p$. Således er $p \in \mathcal{I}$, og dermed $s_i = p s_i \in \mathcal{I}$ for $i = 1, \dots, n$. Endvidere er $s_0 = s_0 s_0^* s_0 = s_0 (s_0^* s_1^* s_1 s_0) \in \mathcal{I}$, så alle frembringerne for $\mathcal{O}_{PS(A)}$ tilhører \mathcal{I} . Vi har således vist, at $p \mathcal{O}_{PS(A)} p$ er et fuldt hjørne i $\mathcal{O}_{PS(A)}$. Da $\mathcal{O}_A \cong p \mathcal{O}_{PS(A)} p$, følger af Browns resultat (teorem 2.6.5), at $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{PS(A)} \otimes \mathbb{K}$. ■

2.11 Bemærkninger

Afsnit 2.1: Lemma 2.1.3 er et lemma, jeg har bevist. Beviset for sætning 2.1.4 er inspireret af beviset for [Lor97, thm.3.1.1].

Afsnit 2.2 er som helhed inspireret af [CK80]. Der er dog fyldt en del detaljer på i forhold til denne artikel. Lemma 2.2.5 og 2.2.7 svarer til [CK80, lem.2.1 hhv. 2.2].

Afsnit 2.3 svarer i det store hele til teksten i [CK80] fra prop. 2.3 til og med prop. 2.5, hvor jeg har bevist de mange påstande, som fremsættes i teksten. Sætning 2.3.3 og 2.3.10 svarer ca. til [CK80, prop. 2.3 hhv. 2.5], mens lemma 2.3.11 svarer til [CK80, lem.2.4] samt [Car01, lem.3.3.9].

Afsnit 2.4 er også baseret på [CK80]. Resultaterne fra sætning 2.4.9 er nævnt rundt omkring ([CK80, nederst s.254 til øverst 255] samt [Cun81, s.29]), jeg har tilføjet bevis for påstandene. Lemma 2.4.10 indgår i beviset for lemma 2.4.11, som svarer til [CK80, lem.2.6]. Lemma 2.4.12 svarer til [CK80, lem.2.7].

Afsnit 2.5 er en blanding af [Car01] og [CK80]. Lemma 2.5.3 svarer til [CK80, prop.2.10(a)], sætning 2.5.6 svarer til [CK80, prop.2.8 og 2.11] mens teorem 2.5.8 svarer til [CK80, thm.2.13].

Afsnit 2.6: Sætning 2.6.1 er fra [Ros79, cor.] og sætning 2.6.6 er en dual sætning til [Bro77, cor.2.7]. Ud over de referencer, der er anført i teksten, er resten af afsnittet fra [Mat97], [Mat98] samt [Cun81, prop.3.1].

Afsnittene 2.7–2.9 om idealer: Beviset for sætning 2.8.11 (og således også for teorem 2.8.12) bygger på beviserne for [Cun81, thm.2.5] og [aHR97, lem.3.4 og thm.3.5]. Resultatet fra sætning 2.9.1 bruges overalt, men jeg har intet sted fundet antydning af et bevis. Jeg gik selv i gang med at bevise det, men fik problemer med at vise surjektiviteten. Det her anførte bevis bygger på en skitse til bevis, som Ryzsard Nest gav mig i Vandrehallen på HCØ. Det øvrige af afsnit 2.7–2.9 er detaljer, definitioner og resultater, som jeg selv har fyldt ud med.

Afsnit 2.10: Teorem 2.10.1(a), (b) og (c) svarer til hhv. [CK80, prop.2.17], [Cun81, thm.2.3] og [Cun81, thm.2.4] (se dog også [CK80, thm.4.1]).

Kapitel 3

Eksisterende klassifikationsresultater

Der findes flere klassifikationsresultater for Cuntz-Krieger algebraer. Jeg vil her i kapitlet formulere nogle af disse resultater og skitsere beviser for nogle blandt disse. Jeg har valgt at lægge hovedvægten på de klassifikationsresultater, som har mere eller mindre direkte forbindelse til SFT (og FE). Jeg har skitseret en del af beviset for Mikael Rørdams klassifikationssætning for simple Cuntz-Krieger algebraer. I denne sammenhæng har det været naturligt at nævne Kirchberg og Phillips resultat for rent uendelige, simple, nukleære, separable C^* -algebraer tilhørende UCT-klassen \mathcal{N} . Danrun Huang har klassificeret Cuntz-Krieger algebraer med præcis et ikke-trivielt lukket ideal og Cuntz-Krieger algebraer med triviel K_1 -gruppe. Beviserne er delvist skitseret, og de udnytter på afgørende vis resultater omkring FE af SFT. Jeg har endvidere medtaget et resultat af M. Rørdam, hvori Cuntz-Krieger algebraerne med præcis et ikke-trivielt lukket ideal er klassificeret (sætningen er lidt mere generel end dette). Dette resultat viser sig nemlig at være ret interessant ifm. klassifikation af en større skare af Cuntz-Krieger algebraer. Invarianten har en vis sammenhæng med D. Huang's invarianter, og også med nye artikler om FE af SFT af Mike Boyle og D. Huang. Beviset udnytter KK -teori og skitseres ikke.

Da alle henvisningerne er anført i teksten, er der ikke så mange kommentarer at føje til dette afsnit – derfor afsluttes dette kapitel ikke med bemærkninger. Det skal bemærkes, at denne gennemgang hverken er fuldstændig eller grundig og til tider måske heller ikke strengt korrekt. Det har ene og alene været min hensigt med dette kapitel, at undersøge og beskrive hovedtrækkene i bevis-idéerne. Dette kapitel er ikke en direkte forudsætning for at læse resten af specialet, men det kan virke motiverende for nogle af de undersøgelser, der foretages senere. Dog vil jeg komme til at bruge: definition 3.1.1, bemærkning 3.1.2, teorem 3.1.3, definition 3.3.1 og 3.3.2, hvilke man jo kan vende tilbage til efterhånden, som disse bruges.

3.1 Rørdams klassifikation af simple Cuntz-Krieger algebraer

Efter at J. Franks først i firserne klassificerede de irreducible SFT (hvis nabomatricer ikke er permutationsmatricer) op til FE, blev der naturligvis tænkt over, hvorvidt $\det(I - A)$ er en invariant af simple Cuntz-Krieger algebraer (op til stabil isomorfi). Thi i givet fald ville man så have en fuldstændig invariant af de simple Cuntz-Krieger algebraer op til stabil isomorfi (da Cuntz-Krieger algebraer er FE-invarianter og $K_0(\mathcal{O}_A) \cong \text{cok}(I - A^\top) \cong \text{cok}(I - A)$). Denne problematik blev taget op af J. Cuntz. I [Cun86] skitserede han et bevis, for at de simple Cuntz-Krieger algebraer er klassificeret op til stabil isomorfi ved deres K_0 -grupper, *forudsat* at Cuntz-Krieger algebraerne hørende til matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

er isomorfe – men han tilføjer, at man trods alt må forvente, at disse Cuntz-Krieger algebraer ikke en gang er stabilt isomorfe. Disse spørgsmål forblev dog åbne indtil M. Rørdam midt i halvfemserne viste, at Cuntz-Krieger algebraerne hørende til matricerne i ligning (3.1) er isomorfe (jf. [Rør95]).

Vi vil her formulere (nogle af) hovedresultaterne fra [Rør95] og skitsere en del af beviserne.

Definition 3.1.1 For hver matrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ definerer vi to matricer $A_- \in \text{Mat}_{n+2}(\{0, 1\})$ og $A_\sim \in \text{Mat}_{n+3}(\{0, 1\})$ ved

$$A_- = \begin{pmatrix} A & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad A_\sim = \begin{pmatrix} A & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Bemærk, at $\det(I - A) = -\det(I - A_-) = -\det(I - A_\sim)$, at A_\sim altid er irreducibel og at A_- er irreducibel, hvis A er irreducibel.

Bemærkning 3.1.2 Det er værd at bemærke, at for $n \geq 2$ er Cuntz algebraen \mathcal{O}_n præcis Cuntz-Krieger algebraen \mathcal{O}_A hørende til $n \times n$ matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Med lidt misbrug af notation betegnes denne matrix n . Årsagen er, at skiftrummet hørende til denne matrix oplagt er topologisk konjugeret til skiftrummet hørende til 1×1 matricen (n) . Og desuden passer notationen for Cuntz algebraer hermed sammen med den for Cuntz-Krieger algebraer.

Teorem 3.1.3 (Rørdam, Lemma 6.4 i [Rør95]) Der gælder, at $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_{2_-}$.

Teorem 3.1.4 (Theorem 6.5 i [Rør95]) Lad A og A' være irreducible ikke-permutationsmatricer med indgange fra $\{0, 1\}$. Da er

$$\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K} \Leftrightarrow K_0(\mathcal{O}_A) \cong K_0(\mathcal{O}_{A'}),$$

$$\mathcal{O}_A \cong \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow (K_0(\mathcal{O}_A), [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}]_0) \cong (K_0(\mathcal{O}_{A'}), [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{A'}}]_0)$$

(at $(K_0(\mathcal{O}_A), [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}]_0) \cong (K_0(\mathcal{O}_{A'}), [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{A'}}]_0)$ betyder, at der findes en gruppeisomorfi $\alpha: K_0(\mathcal{O}_A) \rightarrow K_0(\mathcal{O}_{A'})$, således at $\alpha([\mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}]_0) = [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{A'}}]_0$).

Beviskitse: Beviset for teorem 3.1.3 vil jeg ikke berøre, da dette falder helt uden for rammen for dette speciale. Beviset udnytter KK -teori (hvilket jeg iøvrigt heller ikke kender særlig meget til). En af hovedindredienserne i beviset for teorem 3.1.4 – ud over teorem 3.1.3 – er thm. 7.2 fra appendixet i [Rør95], som udsiger, at

$$\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_{2_-} \Rightarrow \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A_-} \otimes \mathbb{K} \quad (3.2)$$

for alle irreducible ikke-permutationer $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ (en generalisering af dette er bevist i lemma 5.2.2).

Lad nu A og A' være som i teoremet og antag, at $K_0(\mathcal{O}_A) \cong K_0(\mathcal{O}_{A'})$. Hvis $\det(I - A) = \det(I - A')$, så giver Franks klassifikationssætning, teorem 1.5.6, at $A \sim_{FE} A'$ – og dermed er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$.

Antag derfor, at $\det(I - A) = -\det(I - A') \neq 0$. Da er $\det(I - A_-) = -\det(I - A) = \det(I - A')$, så $A_- \sim_{FE} A'$ og dermed er $\mathcal{O}_{A_-} \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$. Det ønskede følger nu af (3.2) samt teorem 3.1.3.

Dette resultat bruges sammen med [Hua94, thm.2.15] af D. Huang, som udsiger, at enhver automorfi af K_0 -gruppen for en simpel Cuntz-Krieger algebra er induceret af en FE, til at vise den sidste del. ■

3.2 Kirchberg-Phillips' klassifikationssætning

Definition 3.2.1 En simpel C^* -algebra \mathfrak{A} kaldes **rent uendelig**, netop hvis den ikke er isomorf med \mathbb{C} og der for alle positive elementer $a, b \in \mathfrak{A}$ forskellige fra 0 findes $x, y \in \mathfrak{A}$, således at $b = xay$ (se også [Rør02, prop.4.1.1 og def.4.1.2]).

Definition 3.2.2 En **Kirchberg algebra** er en rent uendelig, simpel, nukleær, separabel C^* -algebra.

Definition 3.2.3 En C^* -algebra kaldes **K -abelsk**, netop hvis den er KK -ækvivalent med en abelsk C^* -algebra. **UCT klassen** \mathcal{N} er klassen af alle separable K -abelske C^* -algebraer.

E. Kirchberg og N.C. Phillips ([Kir, Thm.C] og [Phi00]) har vist et vigtigt klassifikationsresultat. Følgende er taget fra [Rør02, thm.8.4.1(ii) og (iv)]

Teorem 3.2.4 (Kirchberg-Phillips) Lad \mathfrak{A} og \mathfrak{B} være Kirchberg algebraer tilhørende UCT klassen \mathcal{N} . Da gælder der

(a)

$$\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K} \cong \mathfrak{B} \otimes \mathbb{K} \Leftrightarrow (K_0(\mathfrak{A}), K_1(\mathfrak{A})) \cong (K_0(\mathfrak{B}), K_1(\mathfrak{B})).$$

(b) Hvis \mathfrak{A} og \mathfrak{B} har enheder hhv. $\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$ og $\mathbb{1}_{\mathfrak{B}}$, så er

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Leftrightarrow (K_0(\mathfrak{A}), [\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}]_0, K_1(\mathfrak{A})) \cong (K_0(\mathfrak{B}), [\mathbb{1}_{\mathfrak{B}}]_0, K_1(\mathfrak{B})).$$

Sætning 3.2.5 *Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ være en irreducibel ikke-permutationsmatrix. Da er \mathcal{O}_A en Kirchberg algebra tilhørende UCT klassen \mathcal{N} .*

Beviskitse: At \mathcal{O}_A er simpel og separabel, følger af hhv. teorem 2.8.12 og lemma B.3. Af Browns resultat (teorem 2.6.5), lemma 2.6.8, sætning 2.6.7 og sætning 2.6.1 følger, at

$$\mathcal{F}_A \cong p_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})p_0 \quad \text{og} \quad p_0(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T})p_0 \otimes \mathbb{K} \cong (\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}.$$

Fra Takai's dualitetssætning (se teorem 2.6.13) haves, at

$$((\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) \times_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K}.$$

I [Lan82, s. 389, 1.5–6 f.o.] står, at $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{K}$ er nukleær, netop hvis \mathfrak{A} er nukleær. Således følger af [Bla98, thm.15.8.2], at \mathcal{O}_A er nukleær.

Bemærk, at $\text{Mat}_k(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{K} \cong \text{Mat}_k(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{K}$ (dette kan f.eks. vises, ved at vise, at $\text{Mat}_k(\mathbb{K})$ kan opfattes som de kompakte operatorer på $\mathbb{B}(\ell_2^k)$). Da \mathbb{C} tilhører UCT klassen \mathcal{N} , ses af [Rør02, prop.2.4.7(iii)], at $\text{Mat}_k(\mathbb{C})$ tilhører UCT klassen \mathcal{N} for alle $k \in \mathbb{N}$. Af [Rør02, prop.2.4.7(i)] ses, at den direkte sum af to nukleære C^* -algebraer fra UCT klassen \mathcal{N} selv tilhører UCT klassen \mathcal{N} . Følgelig giver [Mur90, thm.6.3.8] nu, at alle endeligdimensionale C^* -algebraer tilhører UCT klassen \mathcal{N} . Af [Rør02, prop.2.4.7] ses nu, at alle AF-algebraer tilhører UCT klassen \mathcal{N} . Da $\mathcal{F}_A \otimes \mathbb{K} \cong (\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) \otimes \mathbb{K}$, følger af [Rør02, prop.2.4.7(iii)], at $\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}$ tilhører UCT klassen \mathcal{N} og er nukleær – se ovenstående. Af [Rør02, prop.2.4.7(iv)] følger, at $(\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) \times_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z}$ tilhører UCT klassen \mathcal{N} . Da $((\mathcal{O}_A \times_\alpha \mathbb{T}) \times_{\hat{\alpha}} \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K}$, følger således af [Rør02, prop.2.4.7(iii)], at \mathcal{O}_A tilhører UCT klassen \mathcal{N} .

Jeg har udeladt beviset for, at \mathcal{O}_A er rent uendelig, da dette ikke er en væsentlig del af specialet – se dog f.eks. [Mat97, prop.7.3 og 6.2]. ■

Således er teorem 3.1.4 et direkte korollar til teorem 3.2.4 og sætning 3.2.5, da isomorfi af K_0 -grupperne for Cuntz-Krieger algebraer medfører isomorfi af K_1 -grupperne (se teorem 1.2.5, bemærkning 1.2.7 og teorem 2.6.15).

3.3 Huangs klassifikation af to-komponent Cuntz-Krieger algebraer

J. Cuntz indledte i [Cun81] studiet af ikke-simple Cuntz-Krieger algebraer og FE af reducible SFT. Han har især betragtet tilfældet, hvor \mathcal{O}_A har præcis et ikke-trivielt lukket ideal (og A opfylder (II)). I dette tilfælde kan den tilhørende nabomatrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ (modulo konjugering med en permutationsmatrix) skrives som en blok øvre trekantsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & X \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

hvor matricerne A_{11} og A_{22} er essentielt irreducible, de maksimale irreducible principale undermatricer af A_{11} og A_{22} er ikke permutationer og $X \neq 0$.

Definition 3.3.1 Givet en ikke-degenereret matrix

$$A = \begin{pmatrix} M & X \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

hvor $M \in \text{Mat}_m(\mathbb{N}_0)$, $N \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$ og $X \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{N}_0)$. Da kan X identificeres med et element i $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$ via

$$X = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X(i, j)(e_i \otimes f_j),$$

hvor e_1, \dots, e_m og f_1, \dots, f_n betegner standardbaserne for hhv. \mathbb{Z}^m og \mathbb{Z}^n . Lad $q_1: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m / (I - M)\mathbb{Z}^m$ og $q_2: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n / (I - N^T)\mathbb{Z}^n$ være kvotientafbildningerne. Da definerer X på naturlig vis en ækvivalensklasse

$$[X] := (q_1 \otimes q_2)(X) \in \text{cok}(I - M) \otimes \text{cok}(I - N^T) =: \mathcal{C}(M, N),$$

hvor $\mathcal{C}(M, N)$ kaldes for **Cuntz gruppen**. Bemærk iøvrigt at dette ikke er helt konsistent med artiklen [Hua95] idet D. Huang medtager X 's klasse, $[X]$, i definitionen af Cuntz gruppen. Jeg synes mit valg gør notationen lidt lettere (idet man f.eks. kan sige $[X] = [Y]$ i $\mathcal{C}(M, N)$ o.l.).

Definition 3.3.2 Lad der være givet ikke-degenererede matricer A og A' med indgange fra \mathbb{N}_0 og antag, at disse kan skrives på formen

$$A = \begin{pmatrix} M & X \\ 0 & N \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} M' & X' \\ 0 & N' \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

hvor M, N, M' og N' er essentielt irreducible matricer. Da defineres **Cuntz invarianten**, $\mathcal{C}(A)$, af A , som sættet $([X], \text{cok}(I - M), \text{cok}(I - N^\top))$; hvor vi siger, at $\mathcal{C}(A) \cong \mathcal{C}(A')$, netop hvis der findes isomorfier $\delta: \text{cok}(I - M) \rightarrow \text{cok}(I - M')$ og $\eta: \text{cok}(I - N^\top) \rightarrow \text{cok}(I - N'^\top)$, således at $(\delta \otimes \eta)([X]) = [X']$ (i $\mathcal{C}(M', N')$).

Bemærkning 3.3.3 Lad $A \in \text{Mat}_{m+n}(\{0, 1\})$ og $A' \in \text{Mat}_{m'+n'}(\{0, 1\})$ være ikke-degenererede matricer på formen (3.3), hvor diagonalblokkene M, N, M' og N' er essentielt irreducible, de maksimale principale undermatricer af disse er ikke permutationer og $X, X' \neq 0$. Da er $\mathcal{C}(A) \cong \mathcal{C}(A')$, hvis $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$. Invarianten $\mathcal{C}(A)$ blev fundet i [Cun81] via C^* -algebra udvidelser (KK -teori). Antag, for nemheds skyld, at diagonalblokkene er irreducible (og ikke-permutationsmatricer). Da er en udvidelse af \mathcal{O}_M med $\mathcal{O}_N \otimes \mathbb{K}$ og en udvidelse af $\mathcal{O}_{M'}$ med $\mathcal{O}_{N'} \otimes \mathbb{K}$

$$\rho: 0 \rightarrow \mathcal{O}_N \otimes \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{O}_A \rightarrow \mathcal{O}_M \rightarrow 0,$$

$$\rho': 0 \rightarrow \mathcal{O}_{N'} \otimes \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{O}_{A'} \rightarrow \mathcal{O}_{M'} \rightarrow 0.$$

Cuntz viste, at hvis $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$, så findes en isomorfi $\beta: \text{Ext}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_N) \rightarrow \text{Ext}(\mathcal{O}_{M'}, \mathcal{O}_{N'})$, således at $\beta([\rho]) = [\rho']$. Så sættet $([\rho], \text{Ext}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_N))$ er en stabil isomorfi invariant. Cuntz viste også, at $[\rho] \in \text{Ext}(\mathcal{O}_M) \otimes K_0(\mathcal{O}_N) \subseteq \text{Ext}(\mathcal{O}_M, \mathcal{O}_N)$ og at sættet $([X], \text{cok}(I - M), \text{cok}(I - N^\top))$ er isomorft med sættet $([\rho], \text{Ext}(\mathcal{O}_M), K_0(\mathcal{O}_N))$.

I [Hua94, thm.1.10] har D. Huang vha. matrix teknikker bevist, at Cuntz invarianten er en invariant af SFT (med $\Gamma_A = \{\gamma_1, \gamma_2\}, \gamma_1 \succeq \gamma_2$) op til FE og endvidere viste han følgende resultat

Teorem 3.3.4 (Thm. 0.2 i [Hua94]) *Lad $A \in \text{Mat}_{m+n}(\{0, 1\})$ og $A' \in \text{Mat}_{m'+n'}(\{0, 1\})$ være på formen (3.3), hvor diagonalblokkene M, N, M' og N' er essentielt irreducible og $X, X' \neq 0$. Da er $A \sim_{FE} A'$, hvis og kun hvis*

(1) $M \sim_{FE} M'$ og $N \sim_{FE} N'$ og

(2) $\mathcal{C}(A) \cong \mathcal{C}(A')$.

Hvis de maksimale irreducible principale undermatricer af M, N, M' og N' er ikke-permutationer, så kan (1) erstattes af (1'): $\text{sgn det}(I - M) = \text{sgn det}(I - M')$ og $\text{sgn det}(I - N) = \text{sgn det}(I - N')$.

I artiklen [Hua96] har D. Huang vist følgende teorem

Teorem 3.3.5 (Thm. 2.6 i [Hua96]) *Lad $A \in \text{Mat}_{m+n}(\{0, 1\})$ og $A' \in \text{Mat}_{m'+n'}(\{0, 1\})$ være ikke-degenererede matricer på formen (3.3), hvor diagonalblokkene M, N, M' og N' er essentielt irreducible, de maksimale irreducible principale undermatricer af disse er ikke-permutationsmatricer og $X, X' \neq 0$. Da er*

$$\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K} \Leftrightarrow \mathcal{C}(A) \cong \mathcal{C}(A').$$

Beviskitse: Vi skitserer beviset for “ \Leftarrow ”. Antag, at $\mathcal{C}(A) \cong \mathcal{C}(A')$. Hvis $\text{sgn det}(I - M) = \text{sgn det}(I - M')$ og $\text{sgn det}(I - N) = \text{sgn det}(I - N')$, så følger af teorem 3.3.4, at $A \sim_{FE} A'$ – og således også $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$.

Antag nu, at $\text{sgn det}(I - M) = -\text{sgn det}(I - M') \neq 0$. Lad

$$A_* = \begin{pmatrix} M_* & X_* \\ 0 & N \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A_{**} = \begin{pmatrix} M_{**} & X_{**} \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

hvor $M_* = M_\sim$, $M_{**} = (M_*)_-$, $X_* = \begin{pmatrix} X \\ 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$ og $X_{**} = \begin{pmatrix} X_* \\ 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$. Man kan forholdsvis nemt vise, at $\mathcal{C}(A) \cong \mathcal{C}(A_*) \cong \mathcal{C}(A_{**})$. Bemærk, at $\text{sgn det}(I - M) = \text{sgn det}(I - M_{**})$ og $\text{sgn det}(I - M') = \text{sgn det}(I - M_*)$. Af teorem 3.3.4 haves således, at $A \sim_{FE} A_{**}$ – og dermed er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A_{**}} \otimes \mathbb{K}$. Mikael Rørdam har vist, at $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_{2_-}$ (se teorem 3.1.3), og inspireret af J. Cuntz har M. Rørdam skrevet et bevis for, at $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_{2_-} \Rightarrow \mathcal{O}_{T_\sim} \cong \mathcal{O}_{(T_\sim)_-}$ for enhver irreducibel, ikke-permutationsmatrix T (se thm. 7.2 i appendixet for [Rør95]). Dette bevis kan modificeres til at vise, at $\mathcal{O}_{A_*} \cong \mathcal{O}_{A_{**}}$ (se beviset for [Hua96, thm.2.6] eller lemma 5.2.2). Følgelig har vi, at

$$\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A_*} \otimes \mathbb{K} \wedge \mathcal{C}(A) \cong \mathcal{C}(A_*) \cong \mathcal{C}(A') \wedge \text{sgn det}(I - M_*) = \text{sgn det}(I - M')$$

mens den anden diagonalblok i A_* er identisk med den i A (nemlig N). For at bevise sætningen kan vi således w.l.o.g. antage, at $\text{sgn det}(I - M) = \text{sgn det}(I - M')$. Hvis $\text{sgn det}(I - N) = \text{sgn det}(I - N')$, har vi som før det ønskede; hvis derimod $\text{sgn det}(I - N) = -\text{sgn det}(I - N') \neq 0$, kan vi lave det analoge argument anvendt på diagonalblokken N . ■

3.4 Huangs klassifikation af Cuntz-Krieger algebraer med triviel K_1 -gruppe

D. Huang har klassificeret alle Cuntz-Krieger algebraer med triviel K_1 -gruppe i [Hua95]. Lige som de øvrige klassifikationsresultater, så bygger beviset på afgørende vis på resultater omkring FE af SFT. Bemærk, at $K_1(\mathcal{O}_A)$ er triviel (altså lig $\{0\}$), hvis og kun hvis $\det(I - A) \neq 0$, hvis og kun hvis 1 ikke er en egen værdi for A , hvis og kun hvis $K_0(\mathcal{O}_A)$ er en endelig gruppe.

Fra [Hua95, lem.2.5] haves (se dog også lemma 4.1.2)

Lemma 3.4.1 *Lad $A = \begin{pmatrix} M & X \\ 0 & N \end{pmatrix}$ være en matrix med indgange fra \mathbb{N}_0 og hvor 1 ikke er en egen værdi for N . Da defineres en kort-exakt følge*

$$0 \longrightarrow \text{cok}(I - M) \xrightarrow{[x] \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}} \text{cok}(I - A) \xrightarrow{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto [y]} \text{cok}(I - N) \longrightarrow 0.$$

Definition 3.4.2 Antag, at 1 ikke er en egen værdi for $\{0, 1\}$ -matricen A , og at A opfylder betingelse (II). Da kan ifølge lemma 3.4.1 $K_0(\mathcal{O}_{A_{\Sigma(H(\gamma_2))}})$ på naturlig vis opfattes som en undergruppe af $K_0(\mathcal{O}_{A_{\Sigma(H(\gamma_1))}})$ for $\gamma_1 \succeq \gamma_2$, og $K_0(\mathcal{O}_{A_{\Sigma(H_-(\gamma))}})$ kan også på naturlig vis opfattes som en undergruppe af $K_0(\mathcal{O}_{A_{\Sigma(H(\gamma))}})$ for $\gamma \in \Gamma_A$. Den Γ -filtrerede $K_0(\mathcal{O}_A)$, betegnet $K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A)$, er $K_0(\mathcal{O}_A)$ sammen med familien af undergrupper $K_0(\mathcal{O}_{A_{\Sigma(H(\gamma))}})$, $\gamma \in \Gamma_A$.

Lad A og A' være to $\{0, 1\}$ -matricer, som opfylder betingelse (II) og ikke har 1 som egen værdi. At $K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A)$ er isomorf med $K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A'})$ (via parret (α, ρ)) betyder, at der er isomorfier $\alpha: K_0(\mathcal{O}_A) \rightarrow K_0(\mathcal{O}_{A'})$ og $\rho: \Gamma_A \rightarrow \Gamma_{A'}$, således at $\alpha(K_0(\mathcal{O}_{A_{\Sigma(H(\gamma))}})) = K_0(\mathcal{O}_{A'_{\Sigma(H(\rho(\gamma))}})$ for alle $\gamma \in \Gamma_A$. At $(K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A), [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}]_0) \cong (K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A'}), [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{A'}}]_0)$ betyder, at der findes isomorfier $\alpha: K_0(\mathcal{O}_A) \rightarrow K_0(\mathcal{O}_{A'})$ og $\rho: \Gamma_A \rightarrow \Gamma_{A'}$, således at $K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A)$ er isomorf med $K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A'})$ via parret (α, ρ) og $\alpha([\mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}]_0) = [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{A'}}]_0$.

(Dette er ikke fuldstændig identisk med D. Huangs definition, i tilfældet hvor der findes „overgangstilstande“ mellem irreducibilitetskomponenterne. Idéen er dog klart den samme, og man kan vise, at definitionerne stemmer overens.)

I [Hua95, thm.3.13, thm.4.7 og 4.9] har D. Huang vist følgende teoremer

Teorem 3.4.3 *Lad A og A' være $\{0, 1\}$ -matricer, som opfylder betingelse (II) og ikke har 1 som egen værdi. Da er $A \sim_{FE} A'$, hvis og kun hvis der findes en isomorfi (α, ρ) fra $K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A)$ til $K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A'})$, således at $A_\gamma \sim_{FE} A'_{\rho(\gamma)}$ for alle $\gamma \in \Gamma_A$.*

Teorem 3.4.4 *Lad A og A' være $\{0, 1\}$ -matricer, som opfylder betingelse (II) og ikke har 1 som egen værdi. Da er*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K} &\Leftrightarrow K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A) \cong K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A'}), \\ \mathcal{O}_A \cong \mathcal{O}_{A'} &\Leftrightarrow (K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A), [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}]_0) \cong (K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A'}), [\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{A'}}]_0). \end{aligned}$$

Beviskitse: Det er kun beviset for „ \Leftarrow “ i første del af teoremet, som skitseres. Antag derfor, at $K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A) \cong K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A'})$ via parret (α, ρ) . Skriv $\Gamma_A = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$. Hvis $A_{\gamma_i} \sim_{FE} A'_{\rho(\gamma_i)}$ for alle $i = 1, \dots, N$, så følger af teorem 3.4.3, at $A \sim_{FE} A'$ – og således også $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$.

Lad G_1, G_2, G, G'_1, G'_2 og G' være grupper. Hvis vi har følgende heloptrukne kommutative diagram med kort-exakte rækker

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_1 & \hookrightarrow & G & \twoheadrightarrow & G_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \psi|_{G_1} \downarrow \cong & & \psi \downarrow \cong & & \exists \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & G'_1 & \hookrightarrow & G' & \twoheadrightarrow & G'_2 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

så eftervises umiddelbart ved diagramjagt, at der findes en isomorfi fra G_2 på G'_2 , indikeret med den stiplede pil, så hele diagrammet kommuterer. Vha. dette kan vises, at $K_0(\mathcal{O}_{A_{\gamma_i}}) \cong K_0(\mathcal{O}_{A_{\rho(\gamma_i)}})$ for alle $i = 1, \dots, N$.

Antag, at der findes $i_0 \in \{1, \dots, N\}$, så $A_{\gamma_{i_0}} \not\sim_{FE} A'_{\rho(\gamma_{i_0})}$. Følgelig må $\det(I - A_{\gamma_{i_0}}) = -\det(I - A_{\rho(\gamma_{i_0})}) \neq 0$. Modulo konjugering med en permutation, kan A skrives på formen $A = \begin{pmatrix} M & X & Y \\ 0 & Q & Z \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}$, hvor $Q = A_{\gamma_{i_0}}$. Lad

$$A_* = \begin{pmatrix} M & X_* & Y \\ 0 & Q_* & Z_* \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} \text{ og } A_{**} = \begin{pmatrix} M & X_{**} & Y \\ 0 & Q_{**} & Z_{**} \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix},$$

hvor $Q_* = Q_\sim$, $Q_{**} = (Q_*)_-$, $X_* = (X \ 0)$, $X_{**} = (X_* \ 0) = (X \ 0)$, $Z_* = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$, $Z_{**} = \begin{pmatrix} Z_* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$ (der tilføjes et passende antal nuller) og M eller N kan være tom.

Man kan forholdsvis nemt vise, at $K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A) \cong K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A_*}) \cong K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A_{**}})$. Bemærk, at $\text{sgn det}(I - A_{\gamma_{i_0}}) = \text{sgn det}(I - (A_{\gamma_{i_0}})_{**})$ og $\text{sgn det}(I - A'_{\rho(\gamma_{i_0})}) = \text{sgn det}(I - (A_{\gamma_{i_0}})_*)$. Af teorem 3.4.3 haves således, at $A \sim_{FE} A_{**}$ – og dermed er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A_{**}} \otimes \mathbb{K}$. Mikael Rørdam har vist, at $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_{2_-}$ (se teorem 3.1.3), og inspireret af J. Cuntz har M. Rørdam skrevet et bevis for, at $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_{2_-} \Rightarrow \mathcal{O}_{T_\sim} \cong \mathcal{O}_{(T_\sim)_-}$ for enhver irreducibel ikke-permutationsmatrix T (se thm. 7.2 i appendixet for [Rør95]). Dette bevis kan modificeres til at vise, at $\mathcal{O}_{A_*} \cong \mathcal{O}_{A_{**}}$ (se beviset for [Hua95, lem.4.3] eller lemma 5.2.2). Følgelig har vi, at

$$\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A_*} \otimes \mathbb{K} \wedge K_0^\Gamma(\mathcal{O}_A) \cong K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A_*}) \cong K_0^\Gamma(\mathcal{O}_{A'}) \wedge \text{sgn det}(I - (A_{\gamma_{i_0}})_*) = \text{sgn det}(I - A'_{\rho(\gamma_{i_0})})$$

mens alle de andre diagonalblokke i A_* er identiske med dem i A . For at bevise sætningen kan vi således w.l.o.g. antage, at $\text{sgn det}(I - A_{\gamma_{i_0}}) = \text{sgn det}(I - A'_{\rho(\gamma_{i_0})})$. Denne proces gentager vi for alle diagonalblokke med „forkert fortegn“. ■

3.5 Rørdams klassifikation af to-komponent Cuntz-Krieger algebraer

Mikael Rørdam har i [Rør97] vha. KK -teori og Kirchberg-Phillips' klassifikationssætning (se teorem 3.2.4) klassificeret alle Cuntz-Krieger algebraer med præcis et ikke-trivielt lukket ideal. Mere præcis, så har han vist følgende teorem:

Teorem 3.5.1 (Rørdam, thm.5.3 i [Rør97]) *Lad $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{B}$ og \mathfrak{B}' være stabile Kirchberg algebraer tilhørende UCT klassen \mathcal{N} og antag, at*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{B} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{E} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{A} \longrightarrow 0, \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{B}' & \xrightarrow{\varphi'} & \mathfrak{E}' & \xrightarrow{\psi'} & \mathfrak{A}' \longrightarrow 0. \end{array}$$

er essentielle udvidelser (dvs. at billedet af \mathfrak{B} og \mathfrak{B}' er et essentielt lukket ideal i hhv. \mathfrak{E} og \mathfrak{E}'). Da gælder der, at $\mathfrak{E} \cong \mathfrak{E}'$, hvis og kun hvis de tilhørende cykliske seks-leddede exakte følger fra K -teori er isomorfe (som exakte følger); dvs. at der findes isomorfier $\alpha_i: K_i(\mathfrak{A}) \rightarrow K_i(\mathfrak{A}')$, $\beta_i: K_i(\mathfrak{B}) \rightarrow K_i(\mathfrak{B}')$, $\eta_i: K_i(\mathfrak{E}) \rightarrow K_i(\mathfrak{E}')$ for $i = 0, 1$, således at følgende diagram kommuterer

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} K_0(\mathfrak{B}) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(\mathfrak{E}) & \xrightarrow{K_0(\psi)} & K_0(\mathfrak{A}) & \xrightarrow{\Delta_0} & K_1(\mathfrak{B}) & \xrightarrow{K_1(\varphi)} & K_1(\mathfrak{E}) & \xrightarrow{K_1(\psi)} & K_1(\mathfrak{A}) & \xrightarrow{\Delta_1} & K_0(\mathfrak{B}) \\ \beta_0 \downarrow \cong & & \eta_0 \downarrow \cong & & \alpha_0 \downarrow \cong & & \beta_1 \downarrow \cong & & \eta_1 \downarrow \cong & & \alpha_1 \downarrow \cong & & \beta_0 \downarrow \cong \\ K_0(\mathfrak{B}') & \xrightarrow{K_0(\varphi')} & K_0(\mathfrak{E}') & \xrightarrow{K_0(\psi')} & K_0(\mathfrak{A}') & \xrightarrow{\Delta'_0} & K_1(\mathfrak{B}') & \xrightarrow{K_1(\varphi')} & K_1(\mathfrak{E}') & \xrightarrow{K_1(\psi')} & K_1(\mathfrak{A}') & \xrightarrow{\Delta'_1} & K_0(\mathfrak{B}') \end{array}$$

Korollar 3.5.2 *Lad A og A' være $\{0, 1\}$ -matricer, som opfylder betingelse (II), og antag, at \mathcal{O}_A og $\mathcal{O}_{A'}$ har præcis et ikke-trivielt lukket ideal. Da er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$, hvis og kun hvis de tilhørende cykliske seks-leddede exakte følger fra K -teori er isomorfe (som exakte følger).*

Beviskitse: Da \mathcal{O}_A og $\mathcal{O}_{A'}$ har præcis et ikke-trivielt lukket ideal, kan vi uden indskrænkelse skrive $\Gamma_A = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ og $\Gamma_{A'} = \{\gamma'_1, \gamma'_2\}$, hvor $\gamma_1 \succeq \gamma_2$ og $\gamma'_1 \succeq \gamma'_2$. Følgelig haves kort-exakte følger

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{\gamma_2} \hookrightarrow & \mathcal{O}_A & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_A / \mathcal{J}_{\gamma_2} & \longrightarrow 0, \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{\gamma'_2} \hookrightarrow & \mathcal{O}_{A'} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{A'} / \mathcal{J}_{\gamma'_2} & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ifølge [Mur90, thm.6.5.2] haves således kort-exakte følger

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{\gamma_2} \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_A / \mathcal{J}_{\gamma_2}) \otimes \mathbb{K} \longrightarrow 0, \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{\gamma'_2} \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{A'} / \mathcal{J}_{\gamma'_2}) \otimes \mathbb{K} \longrightarrow 0, \end{array}$$

og ifølge sætning 2.8.11 således også kort-exakte følger

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A_{\gamma_2}} \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A_{\gamma_1}} \otimes \mathbb{K} \longrightarrow 0, \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A'_{\gamma'_2}} \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{A'_{\gamma'_1}} \otimes \mathbb{K} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Da $\mathcal{O}_{A_{\gamma_1}}, \mathcal{O}_{A_{\gamma_2}}, \mathcal{O}_{A'_{\gamma'_1}}$ og $\mathcal{O}_{A'_{\gamma'_2}}$ er Kirchberg algebraer tilhørende UCT klassen \mathcal{N} , kan vha. [Rør02, prop.4.1.8(i) og prop.2.4.7(iii)] vises, at $\mathcal{O}_{A_{\gamma_1}} \otimes \mathbb{K}, \mathcal{O}_{A_{\gamma_2}} \otimes \mathbb{K}, \mathcal{O}_{A'_{\gamma'_1}} \otimes \mathbb{K}$ og $\mathcal{O}_{A'_{\gamma'_2}} \otimes \mathbb{K}$ er stabile Kirchberg algebraer tilhørende UCT klassen \mathcal{N} .

Da det er oplagt, at \mathcal{J}_{γ_2} og $\mathcal{J}_{\gamma'_2}$ er essentielle idealer i hhv. \mathcal{O}_A og $\mathcal{O}_{A'}$, følger resultatet nu umiddelbart af foregående teorem. ■

Kapitel 4

$GL_{\mathcal{P}}$ - og $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens samt K -vævet

Jeg skal prøve at lokalisere og beskrive problemerne med at udvide de eksisterende klassifikationsresultater og om muligt vise en ny klassifikationssætning. Den første mur man render panden imod, er helt klart, at den sætning man skal forsøge at bevise, ikke på forhånd er givet. Så første skridt er at få et godt bud på en fuldstændig invariant. Andet skridt er så at bevise, at dette er en fuldstændig invariant. Men dette kan være svært, thi for det første aner man ikke, om den sætning, man prøver at vise, er sand; og selv om den er sand, så kan det være nærmest umuligt at vise den.

Derfor har jeg i første omgang arbejdet en del med de eksisterende invarianter. Jeg synes selv, at Cuntz invarianten (for Cuntz-Krieger algebraer med præcis et ikke-trivielt lukket ideal) er ret unaturlig. Jeg synes det er ret svært at regne på den, og jeg har også lidt svært ved at give gode bud på, hvordan denne skulle kunne udvides til det generelle tilfælde.

På den anden side, så er det klart, at der er en nær sammenhæng mellem D. Huangs klassifikation af Cuntz-Krieger algebraer med triviel K_1 -gruppe og M. Rørdams klassifikation af to-komponent tilfældet. I [Hua95] er der endvidere skitseret, at M. Rørdams invariant, den cykliske seks-leddede exakte følge, og Cuntz invarianten er ens for Cuntz-Krieger algebraer med præcis et ikke-trivielt lukket ideal og trivielle K_1 -grupper.

Oprindeligt havde jeg et bevis for, at dette gjaldt mere generelt (også med ikke-trivielle K_1 -grupper). Men jeg har ladet dette udgå igen af flere grunde. Tildels var beviset langt og besværligt, tildels var der brugt resultater fra en artikel, som er behæftet med nogle fejl og desuden så falder det lidt pænere ud af det efterfølgende arbejde, jeg har lavet. Men det gav mig et indtryk af, at man skulle forsøge at lave en udvidelse af M. Rørdams invariant, den cykliske seks-leddede exakte følge, således at man havde flere exakte følger – og isomorfien skulle så være passende kohærent (som for D. Huangs klassifikation af Cuntz-Krieger algebraer med triviel K_1 -grupper). Men først nogle nemme hjælpesætninger, som trods alt belyser naturen af disse invarianter lidt bedre.

4.1 En cyklisk seks-leddet exakt følge stammende fra matricer

Fra [Fox02, lem.3.12(1)] haves slangelemmaet (som er bevist i [Fox02, 4.7(1)]):

Lemma 4.1.1 (Slangelemmaet) *Antag, at*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \kappa & & \downarrow \lambda & & \downarrow \mu & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{\alpha'} & L' & \xrightarrow{\beta'} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

er et kommutativt diagram med exakte rækker (hvor K, L, M, K', L', M' er moduler over en kommutativ, ikke-triviel ring med et-element og afbildningerne er homomorfier). Der induceres da en exakt følge

$$0 \longrightarrow \ker \kappa \xrightarrow{\alpha_1} \ker \lambda \xrightarrow{\beta_1} \ker \mu \xrightarrow{\delta} \operatorname{cok} \kappa \xrightarrow{\tilde{\alpha}'} \operatorname{cok} \lambda \xrightarrow{\tilde{\beta}'} \operatorname{cok} \mu \longrightarrow 0,$$

hvor $\alpha_1, \beta_1, \tilde{\alpha}'$ og $\tilde{\beta}'$ er induceret på oplagt måde af hhv. α, β, α' og β' , og δ er den forbindende homomorfi.

Lemma 4.1.2 *Lad B være givet som en blokmatrix $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m+n}(\mathbb{Z})$. Da induceres en cyklisk seks-leddet exakt følge*

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{cok} B_1 & \xrightarrow{\lambda: [x] \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}} & \operatorname{cok} B & \xrightarrow{\mu: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto [y]} & \operatorname{cok} B_2 \\ \uparrow \Delta: y \mapsto [Xy] & & & & \downarrow 0 \\ \ker B_2 & \xleftarrow{\beta: y \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} & \ker B & \xleftarrow{\alpha: \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto x} & \ker B_1 \end{array}$$

Alternativt kan denne følge skrives som

$$0 \longrightarrow \ker B_1 \xrightarrow{\alpha: x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}} \ker B \xrightarrow{\beta: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y} \ker B_2 \xrightarrow{\Delta: y \mapsto [Xy]} \operatorname{cok} B_1 \xrightarrow{\lambda: [x] \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}} \operatorname{cok} B \xrightarrow{\mu: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto [y]} \operatorname{cok} B_2 \longrightarrow 0.$$

Bevis: Det er ligetil – men langsommeligt – at vise dette direkte (se beviset for [Hua01b, Thm.2.1] for nogle af tilfældene). Dette lemma er faktisk kun et specialtilfælde af slangelemmaet ovenover anvendt på diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow B_1 & & \downarrow B & & \downarrow B_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m & \longrightarrow & \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Det eneste, vi mangler at vise, er, at den forbindende homomorfi er givet som $y \mapsto [Xy]$. Men dette ses nemt ved definitionen af den forbindende homomorfi (se [Fox02, 4.5(1) samt 4.5(□)]) ved diagramjagt: Givet $y \in \ker B_2$, da haves følgende

$$\begin{array}{ccc} (0, y) & \xrightarrow{2} & y \\ \downarrow 3 & & \downarrow 1 \\ Xy & \xrightarrow{5} & (Xy, 0) \xrightarrow{4} 0. \end{array}$$

■

Definition 4.1.3 Lad $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m+n}(\mathbb{Z})$ og $B' = \begin{pmatrix} B'_1 & X' \\ 0 & B'_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{m'+n'}(\mathbb{Z})$. Med $\mathcal{E}(B)$ betegner vi den exakte følge, som B ifølge foregående lemma inducerer – hvor det er underforstået, hvilken blokstruktur der pålægges B . Vi skriver $\mathcal{E}(B) \cong \mathcal{E}(B')$, netop hvis de exakte følger er isomorfe; dvs. at der findes isomorfier $\xi_1: \ker B_1 \rightarrow \ker B'_1$, $\xi: \ker B \rightarrow \ker B'$, $\xi_2: \ker B_2 \rightarrow \ker B'_2$, $\delta_1: \operatorname{cok} B_1 \rightarrow \operatorname{cok} B'_1$, $\delta: \operatorname{cok} B \rightarrow \operatorname{cok} B'$ og $\delta_2: \operatorname{cok} B_2 \rightarrow \operatorname{cok} B'_2$, således at vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha} & \ker B & \xrightarrow{\beta} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \operatorname{cok} B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \operatorname{cok} B & \xrightarrow{\mu} & \operatorname{cok} B_2 \\ \cong \downarrow \xi_1 & & \cong \downarrow \xi & & \cong \downarrow \xi_2 & & \cong \downarrow \delta_1 & & \cong \downarrow \delta & & \cong \downarrow \delta_2 \\ \ker B'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B'_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \operatorname{cok} B'_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \operatorname{cok} B' & \xrightarrow{\mu'} & \operatorname{cok} B'_2. \end{array}$$

Og i givet fald vil vi sige, at $(\xi_1, \xi, \xi_2, \delta_1, \delta, \delta_2)$ inducerer isomorfien.

For hver matrix A på formen $A = \begin{pmatrix} M & X \\ 0 & N \end{pmatrix}$ kan vi således både betragte den seks-leddede exakte følge, $\mathcal{E}(I - A)$, som $(I - A)$ inducerer og Cuntz gruppen sammen med X 's placering heri, ($[X], \operatorname{cok}(I - M), \operatorname{cok}(I - N^T)$). Der er nu flere oplagte spørgsmål, som melder sig. D. Huang har i [Hua95] vist, at hvis 1 ikke er en egen værdi for A (og dermed bliver den seks-leddede exakte følge en kort-exakt følge), så er disse to „invarianter“ ens. Gælder dette også generelt? Hvis $A \in \operatorname{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylder betingelse (II), $H \subseteq \Gamma_A$ er arvelig og $A = \begin{pmatrix} A_{\overline{\Sigma(H)}} & 0 \\ X & A_{\Sigma(\Gamma_A \setminus H)} \end{pmatrix}$, er den seks-leddede exakte følge $\mathcal{E}(I - A^T)$ så kanonisk isomorf med den cykliske seks-leddede exakte følge fra K -teori (stammende fra den kort-exakte følge $\mathcal{J}_H \hookrightarrow \mathcal{O}_A \twoheadrightarrow \mathcal{O}_A/\mathcal{J}_H$)? Bl.a. disse spørgsmål vil jeg forsøge at afklare i dette kapitel.

Lemma 4.1.4 Givet en matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(\{0, 1\})$, som opfylder betingelse (II). Lad der være givet en arvelig delmængde $H \subseteq \Gamma_A$. Da kan $A_{\overline{\Sigma(H)}}$ modulo konjugering med en permutationsmatrix skrives på formen $A_{\overline{\Sigma(H)}} = \begin{pmatrix} A_{\Sigma(H)} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, hvor A_{22} er en nedre trekantsmatrix med nuller i diagonalen. Antages, at $A_{\overline{\Sigma(H)}}$ er skrevet på denne form, så haves en isomorfi $\operatorname{cok}(I - A_{\overline{\Sigma(H)}}^T) \ni x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{cok}(I - A_{\overline{\Sigma(H)}}^T)$.

Bevis: Det følger umiddelbart af lemma 2.8.6, at $A_{\overline{\Sigma(H)}}$ kan skrives på den ønskede form. Antag, at $A_{\overline{\Sigma(H)}}$ er skrevet på denne form og lad $k \in \mathbb{N}$ og $k' \in \mathbb{N}$ betegne antallet af elementer i hhv. $\Sigma(H)$ og $\overline{\Sigma(H)} \setminus \Sigma(H)$ (hvilke vi uden indskrænkelse kan antage, ikke er nul). Givet $x \in \mathbb{Z}^k$. Da er

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in (I - A_{\overline{\Sigma(H)}}^T)\mathbb{Z}^{k+k'} &\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{Z}^k, y_0 \in \mathbb{Z}^{k'} ((I - A_{22}^T)y_0 = 0 \wedge -A_{21}^T y_0 + (I - A_{\Sigma(H)}^T)x_0 = x) \\ &\Leftrightarrow x \in (I - A_{\Sigma(H)}^T)\mathbb{Z}^k, \end{aligned}$$

da $(I - A_{22}^T)y_0 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 0$. Ifølge isomorfisætningen [Tho98, GRP.5.8] inducerer homomorfien $\mathbb{Z}^k \ni x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{cok}(I - A_{\overline{\Sigma(H)}}^T)$ således den ønskede isomorfi. ■

Sætning 4.1.5 Givet en matrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$, som opfylder betingelse (II). Antag, at $H \subsetneq \Gamma_A$ er en ikke-tom, arvelig delmængde. Modulo konjugering med en permutationsmatrix, kan A skrives på formen

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

hvor $A_{11} = A_{\overline{\Sigma(H)}}$ og $A_{22} = A_{\Sigma(\Gamma_A \setminus H)}$. Antag, at A er skrevet på denne form og lad k_1 og k_2 betegne størrelsen af hhv. A_{11} og A_{22} . Den kortexakte følge

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_H \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_A \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_A/\mathcal{J}_H \longrightarrow 0$$

inducerer en cyklisk seksleddet exakt følge fra K -teori, som er isomorf med $\mathcal{E}(I - A^\top)$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_1(\mathcal{J}_H) & \xrightarrow{K_1(\iota)} & K_1(\mathcal{O}_A) & \xrightarrow{K_1(\pi)} & K_1(\mathcal{O}_A/\mathcal{J}_H) & \xrightarrow{\Delta_1} & K_0(\mathcal{J}_H) & \xrightarrow{K_0(\iota)} & K_0(\mathcal{O}_A) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathcal{O}_A/\mathcal{J}_H) & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong \downarrow \xi_1 & & \cong \downarrow \xi & & \cong \downarrow \xi_2 & & \cong \downarrow \delta_1 & & \cong \downarrow \delta & & \cong \downarrow \delta_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(I - A_{11}^\top) & \xrightarrow{\alpha} & \ker(I - A^\top) & \xrightarrow{\beta} & \ker(I - A_{22}^\top) & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok}(I - A_{11}^\top) & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok}(I - A^\top) & \xrightarrow{\mu} & \text{cok}(I - A_{22}^\top) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

hvor ξ og ξ_2 på oplagt måde findes fra bemærkning 2.6.17 og $\delta_1: [p_i]_0 \mapsto [(\delta_{1,i}, \dots, \delta_{k_1,i})^\top]$, $\delta: [p_i]_0 \mapsto [(\delta_{1,i}, \dots, \delta_{n,i})^\top]$ og $\delta_2: [\pi(p_i)]_0 \mapsto [(\delta_{k_1+1,i}, \dots, \delta_{n,i})^\top]$.

Bevis: Beviset udelades. En bevisskitse findes i tillæg C. ■

4.2 Om homomorfier mellem kerner og mellem kokerner

Antagelse 4.2.1 Lad her i afsnittet $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ og $B' \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{Z})$ være to givne matricer. Lad $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$, $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{N}$ og $D' = \text{diag}(d'_1, \dots, d'_{r'}, 0, \dots, 0)$, $d'_1, \dots, d'_{r'} \in \mathbb{N}$ være Smith normal formen for hhv. B og B' . Lad $P, Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ og $P', Q' \in GL_{n'}(\mathbb{Z})$ opfylde $B = PDQ$ og $B' = P'D'Q'$. Sæt $D_0 = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$, $D'_0 = \text{diag}(d'_1, \dots, d'_{r'})$, $k = n - r$ og $k' = n' - r'$.

Lemma 4.2.2 Vi har en isomorfi $\ker B \ni x \mapsto Qx \in \ker D$ med $\ker D \ni x \mapsto Q^{-1}x \in \ker B$ som invers. Endvidere har vi en isomorfi $\text{cok } B \ni x \mapsto P^{-1}x \in \text{cok } D$ med $\text{cok } D \ni x \mapsto Px \in \text{cok } B$ som invers.

Bevis: Vi ser umiddelbart, at for alle $x \in \mathbb{Z}^n$ er

$$\begin{aligned} x \in \ker B &\Leftrightarrow PDQx = 0 \Leftrightarrow DQx = 0 \Leftrightarrow Qx \in \ker D, \\ x \in B\mathbb{Z}^n &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z}^n (x = PDQy) \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z}^n (P^{-1}x = DQy) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z}^n (P^{-1}x = Dy) \Leftrightarrow P^{-1}x \in D\mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Følgende lemma og definition er taget fra [Hua01a, lem.2.1, def.2.2]¹

Lemma 4.2.3 Der gælder følgende:

(a) Enhver homomorfi $\delta: \text{cok } B \rightarrow \text{cok } B'$ kan repræsenteres ved en multiplikation

$$\delta = \delta_U: [x] \mapsto [Ux] \text{ for en matrix } U \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z}). \quad (4.1)$$

En sådan matrix U er ikke (nødvendigvis) entydigt bestemt af δ . Der gælder, at $\delta_{U_1} = \delta_{U_2}$, hvis og kun hvis $U_1 - U_2 = B'W$ for en matrix $W \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$. På den anden side, så kan en matrix $U \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$ inducere en homomorfi $\delta_U: \text{cok } B \rightarrow \text{cok } B'$ ved multiplikationen i (4.1), hvis og kun hvis der findes en matrix $W \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$, således at $UB = B'W$.

(b) Enhver homomorfi $\xi: \ker B \rightarrow \ker B'$ kan repræsenteres ved en multiplikation

$$\xi = \xi_W: x \mapsto Wx, x \in \ker B \text{ for en matrix } W \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z}). \quad (4.2)$$

En sådan matrix W er ikke (nødvendigvis) entydigt bestemt af ξ – men W kan altid vælges, så $B'W = 0$. På den anden side kan en matrix $W \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$ inducere en homomorfi $\xi_W: \ker B \rightarrow \ker B'$ ved multiplikationen i (4.2), hvis der findes en matrix $U \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$, således at $UB = B'W$.

¹Lemmaet er ikke taget ordret herfra, da der er en fejl i heri. Lad $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ og $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da inducerer identitetsmatricen $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ klart en homomorfi (endda isomorfi) fra $\ker B$ til $\ker B'$. Men klart findes ikke $U \in \text{Mat}_2(\mathbb{Z})$, så $UB = B'I = B'$.

Bevis: (a): Givet en homomorfi $\delta: \text{cok } B \rightarrow \text{cok } B'$. Lad e_1, \dots, e_n være standard basen for \mathbb{Z}^n og vælg $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{Z}^{n'}$, så $\delta([e_1]) = [y_1], \dots, \delta([e_n]) = [y_n]$ i $\text{cok } B'$. Sæt $U = (y_1 \ \cdots \ y_n) \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$. Da er det klart, at $\delta([x]) = [Ux]$ for alle $x \in \mathbb{Z}^n$.

Antag, at $\delta_{U_1} = \delta_{U_2}$. Da er $\delta_{U_1 - U_2} = \delta_{U_1} - \delta_{U_2} = 0$. For hvert $i = 1, \dots, n$ findes således $y_i \in \mathbb{Z}^{n'}$, så $(U_1 - U_2)e_i = B'y_i$. Sæt $W = (y_1 \ \cdots \ y_n)$, da er $U_1 - U_2 = B'W$.

Antag nu, at U inducerer en homomorfi δ_U . Så inducerer UB klart nulafbildningen $\delta_{UB} = 0$. Ifølge ovenstående findes derfor en matrix $W \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$, så $UB = B'W$.

Antag nu i stedet, at $UB = B'W$. Vi vil så vise, at δ_U veldefineres ved (4.1). Antag, at $[x_1] = [x_2]$ i $\text{cok } B$. Så findes $x_0 \in \mathbb{Z}^n$, så $x_1 - x_2 = Bx_0$. Følgelig er $U(x_1 - x_2) = UBx_0 = B'Wx_0 \in B'\mathbb{Z}^{n'}$, så $[Ux_1] = [Ux_2]$ i $\text{cok } B'$.

(b): Antag først, at B og B' er lig deres Smith normal former. Givet en homomorfi $\xi: \text{ker } B \rightarrow \text{ker } B'$. Sæt $W = (0 \ \cdots \ 0 \ \xi(e_{n-k+1}) \ \cdots \ \xi(e_n))$. Givet $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \text{ker } B$, da er $x_1 = \cdots = x_{n-k} = 0$. Følgelig er $Wx = x_{n-k+1}\xi(e_{n-k+1}) + \cdots + x_n\xi(e_n) = \xi(x)$. Bemærk iøvrigt, at

$$B'W = (0 \ \cdots \ 0 \ B'\xi(e_{n-k+1}) \ \cdots \ B'\xi(e_n)) = 0.$$

Nu til det generelle tilfælde. Lad B og B' være vilkårlige. Af foregående lemma ses, at matricerne Q og Q' inducerer isomorfier $\xi_Q: \text{ker } B \rightarrow \text{ker } D$ og $\xi_{Q'}: \text{ker } B' \rightarrow \text{ker } D'$ med hhv. $\xi_{Q^{-1}}: \text{ker } D \rightarrow \text{ker } B$ og $\xi_{Q'^{-1}}: \text{ker } D' \rightarrow \text{ker } B'$ som inverse. Ifølge ovenstående findes således en matrix $W_0 \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$, så $D'W_0 = 0$ og $(\xi_{Q'} \circ \xi \circ \xi_{Q^{-1}})(x) = W_0x$ for alle $x \in \text{ker } D$. Sæt $W = Q'^{-1}W_0Q$, da eftervises umiddelbart, at $B'W = 0$ og $\xi(x) = Wx$ for alle $x \in \text{ker } B$.

Antag nu, at der er givet matricer, så $UB = B'W$. Da vil vi vise, at der veldefineres en afbildning ξ_W ved (4.2). Hvis $x \in \text{ker } B$, så er $B'(Wx) = UBx = 0$ og dermed $Wx \in \text{ker } B'$. ■

Definition 4.2.4 Enhver matrixligning $UB = B'W$ (hvor $U, W \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$) inducerer fire homomorfier:

$$\begin{aligned} \delta_U: \text{cok } B &\rightarrow \text{cok } B', & \text{givet ved } [x] &\mapsto [Ux]; \\ \xi_W: \text{ker } B &\rightarrow \text{ker } B', & \text{givet ved } x &\mapsto Wx; \\ \eta_W: \text{cok } B'^T &\rightarrow \text{cok } B^T, & \text{givet ved } [x] &\mapsto [W^T x]; \\ \zeta_U: \text{ker } B'^T &\rightarrow \text{ker } B^T, & \text{givet ved } x &\mapsto U^T x. \end{aligned}$$

Med ovenstående betegnelser følger således umiddelbart af lemma 4.2.2 og 4.2.3, at

Korollar 4.2.5 Givet $U, W \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$. Da har vi klart, at $UB = B'W \Leftrightarrow (P'^{-1}UP)D = D'(Q'WQ^{-1})$. Hvis $UB = B'W$, så er afbildningen δ_U (ξ_W, η_W hhv. ζ_U) en isomorfi, hvis og kun hvis $\delta_{P'^{-1}UP}$ ($\xi_{Q'WQ^{-1}}, \eta_{Q'WQ^{-1}}$ hhv. $\zeta_{P'^{-1}UP}$) er en isomorfi.

Følgende observationer er på s. 189–190 i [Hua95] (se også definitionerne 3.3.1 og 3.3.2):

Lemma 4.2.6 Givet matricer $M \in \text{Mat}_m(\mathbb{Z})$ og $N \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$. På sædvanlig vis identificeres $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$ med $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$. Mere præcis gives en isomorfi fra $\mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n$ på $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$, som opfylder, at billedet af $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T \otimes (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)^T$ er matricen, hvis (i, j) 'te indgang er $\lambda_i \lambda'_j$ for $i = 1, \dots, m$ og $j = 1, \dots, n$. Således gives en homomorfi fra $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ på $\mathcal{C}(M, N)$ (nemlig den, som svarer til $q_1 \otimes q_2$ under denne identifikation). Kernen for denne homomorfi er

$$\{(I - M)U + V(I - N) \mid U, V \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})\},$$

og således induceres en isomorfi

$$\mathcal{C}(M, N) \cong \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z}) / \{(I - M)U + V(I - N) \mid U, V \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})\}.$$

Lad der nu også være givet $M' \in \text{Mat}_{m'}(\mathbb{Z})$, $N' \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{Z})$, $X \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ og $X' \in \text{Mat}_{m' \times n'}(\mathbb{Z})$. Lad der endvidere være givet isomorfier $\delta: \text{cok}(I - M) \rightarrow \text{cok}(I - M')$ og $\eta: \text{cok}(I - N^T) \rightarrow \text{cok}(I - N'^T)$. Da defineres en isomorfi $(\delta \otimes \eta): \mathcal{C}(M, N) \rightarrow \mathcal{C}(M', N')$. Lad $\delta = \delta_U$ og $\eta = \eta_S$, hvor $U(I - M) = (I - M')W$ og $R(I - N') = (I - N)S$. Da er $(\delta \otimes \eta)([X]) = [X']$, hvis og kun hvis $[UXS] = [X']$.

Bevis: *Første del:* Vi har en homomorfi $(q_1 \otimes q_2): \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m \otimes \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathcal{C}(M, N)$. Antag, at $X = (I - M)U + V(I - N)$. Da kan vi skrive U og V på formen $U = (u_1 \ \cdots \ u_n)$ og $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ (hvor u_i 'erne er søjlevektorer i \mathbb{Z}^m og v_j 'erne er rækkevektorer i \mathbb{Z}^n). Lad e_1, \dots, e_m og f_1, \dots, f_n betegne standardbasen for hhv. \mathbb{Z}^m og \mathbb{Z}^n . Da er

$$\begin{aligned} (q_1 \otimes q_2)((I - M)U) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n e_i^\top (I - M)u_j [e_i] \otimes [f_j] = \sum_{j=1}^n [(I - M)u_j] \otimes [f_j] \\ &= 0 \text{ i } \mathcal{C}(M, N), \\ (q_1 \otimes q_2)(V(I - N)) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_i (I - N)f_j [e_i] \otimes [f_j] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_j^\top (I - N^\top)v_i^\top [e_i] \otimes [f_j] \\ &= \sum_{i=1}^m [e_i] \otimes [(I - N^\top)v_i^\top] = 0 \text{ i } \mathcal{C}(M, N). \end{aligned}$$

Ved linearitet ses således, at $(q_1 \otimes q_2)(X) = 0$ i $\mathcal{C}(M, N)$. Således induceres en homomorfi

$$\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z}) / \{(I - M)U + V(I - N) \mid U, V \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})\} \rightarrow \text{cok}(I - M) \otimes \text{cok}(I - N^\top).$$

På den anden side kan vi definere en bilinear afbildning

$$\Phi: \text{cok}(I - M) \times \text{cok}(I - N^\top) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z}) / \{(I - M)U + V(I - N) \mid U, V \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})\},$$

ved at $\Phi([x], [y]) = [x \otimes y]$. Denne er veldefineret, thi hvis $[x] = [x']$ og $[y] = [y']$, så er $x - x' = (I - M)x_0$ og $y - y' = (I - N^\top)y_0$ for passende $x_0 \in \mathbb{Z}^m$ og $y_0 \in \mathbb{Z}^n$ – og følgende er

$$\begin{aligned} x(i, 1)y(j, 1) - x'(i, 1)y'(j, 1) &= (x(i, 1) - x'(i, 1))y(j, 1) + x'(i, 1)(y(j, 1) - y'(j, 1)) \\ &= e_i^\top (I - M)x_0 y(j, 1) + x'(i, 1)f_j^\top (I - N^\top)y_0 \\ &= e_i^\top (I - M)x_0 y^\top f_j + e_i^\top x' y_0^\top (I - N)f_j, \end{aligned}$$

så $x \otimes y - x' \otimes y'$ svarer til matricen $(I - M)(x_0 y^\top) + (x' y_0^\top)(I - N)$. Således induceres en homomorfi $\phi: \text{cok}(I - M) \otimes \text{cok}(I - N^\top) \rightarrow \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z}) / \{(I - M)U + V(I - N) \mid U, V \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})\}$. Det indses let, at denne netop er den inverse til homomorfi ovenover.

Anden del: Lad $M, N, X, M', N', X', \delta$ og η være som angivet. Da $G \otimes -$ og $- \otimes G$ er funktorer for alle \mathbb{Z} -moduler G , er det klart, at $\delta \otimes \eta$ er en isomorfi. Af lemma 4.2.3 er det også klart, at der findes U, W, R, S , så $\delta = \delta_U$, $\eta = \eta_S$, $U(I - M) = (I - M')W$ og $R(I - N') = (I - N)S$. Lad $(e_i)_{i=1}^m$, $(f_j)_{j=1}^n$, $(e'_i)_{i'=1}^{m'}$ og $(f'_{j'})_{j'=1}^{n'}$ betegne standardbasen for hhv. \mathbb{Z}^m , \mathbb{Z}^n , $\mathbb{Z}^{m'}$ og $\mathbb{Z}^{n'}$. Da gælder der, at

$$\begin{aligned} (\delta \otimes \eta)([X]) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X(i, j) (\delta \otimes \eta)([e_i] \otimes [f_j]) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X(i, j) (\delta([e_i]) \otimes \eta([f_j])) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X(i, j) ([Ue_i] \otimes [S^\top f_j]) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{i'=1}^{m'} \sum_{j'=1}^{n'} X(i, j) \left([(e'^{\top}_{i'} U e_i) e'_{i'}] \otimes [(f'^{\top}_{j'} S^\top f_j) f'_{j'}] \right) \\ &= \sum_{i'=1}^{m'} \sum_{j'=1}^{n'} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (e'^{\top}_{i'} U e_i) X(i, j) (f_j^\top S f'_{j'}) ([e'_{i'}] \otimes [f'_{j'}]) \\ &= \sum_{i'=1}^{m'} \sum_{j'=1}^{n'} (e'^{\top}_{i'} U X S f'_{j'}) ([e'_{i'}] \otimes [f'_{j'}]) = [U X S] \quad \text{i } \mathcal{C}(M', N'). \end{aligned}$$

■

Lemma 4.2.7 *Antag, at $B = D$ og $B' = D'$ er deres egne Smith normal former. Da gælder*

(a) *Antag, at $UD = D'W$ og $U'D = D'W'$. Da er $\xi_W = \xi_{W'}$, netop hvis de sidste k søjler i W og W' er ens. Endvidere er $\eta_W = \eta_{W'}$, netop hvis der findes en matrix A , således at $W - W' = AW$. Specielt er de sidste k søjler i W og W' ens, hvis $\eta_W = \eta_{W'}$ og der gælder således, at*

$$\eta_W = \eta_{W'} \Rightarrow \xi_W = \xi_{W'}.$$

(b) Antag, at $UD = D'W$ og skriv U og W på følgende blokformer

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix},$$

hvor $U_{11}, W_{11} \in \text{Mat}_{r' \times r}(\mathbb{Z})$ og $U_{22}, W_{22} \in \text{Mat}_{k' \times k}(\mathbb{Z})$. Da er $U_{21} = 0$ og $W_{12} = 0$. Endvidere er ξ_W en isomorfi, netop hvis W_{22} er kvadratisk og invertibel (i $\text{Mat}_k(\mathbb{Z})$) – mao. er ξ_W en isomorfi, netop hvis W_{22} er kvadratisk og $\det W_{22} \in \{-1, 1\}$.

Bevis: (a): Der gælder oplagt, at $\xi_W = \xi_{W'}$, hvis og kun hvis de sidste k søjler i W og W' er ens. Der gælder, at $\eta_W = \eta_{W'}$, netop hvis $\exists A(W^T - W'^T = B^T A)$. Mao. er $\eta_W = \eta_{W'}$, netop hvis der findes A , således at $W - W' = AB$. Bemærk endvidere at de sidste k søjler i AB er nul for enhver matrix A (med n søjler)

(b): Antag, at $UD = D'W$. At U_{21} og W_{12} er nul, ses umiddelbart af, at D_0 og D'_0 er invertible matricer over \mathbb{R} og

$$\begin{pmatrix} U_{11}D_0 & 0 \\ U_{21}D_0 & 0 \end{pmatrix} = UD = D'W = \begin{pmatrix} D'_0W_{11} & D'_0W_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Afbildningen $\xi_W: \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mapsto W \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ er en homomorfi fra $\ker D = \mathbb{Z}^k$ ind i $\ker D' = \mathbb{Z}^{k'}$. En nødvendig betingelse, for at denne er en isomorfi, er, at $k = k'$ – hvilket præcis betyder, at W_{22} er kvadratisk. Fra kendte resultater (se definition 1.2.3) vides så, at ξ_W er en isomorfi, netop hvis $\det W_{22} \in \{-1, 1\}$ – under antagelse af at W_{22} er kvadratisk. ■

Lemma 4.2.8 Antag, at $UB = B'W$ og $U'B' = BW'$. Da gælder:

(a) at δ_U er invertibel med $\delta_{U'}$ som invers, hvis og kun hvis der findes $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{Z})$, så

$$I - U'U = BA \wedge I - UU' = B'A',$$

(b) at η_W er invertibel med $\eta_{W'}$ som invers, hvis og kun hvis der findes $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{Z})$, så

$$I - W'W = AB \wedge I - WW' = A'B'.$$

Der gælder således, at hvis η_W er en isomorfi, da er også ξ_W en isomorfi.

Bevis: Karakteriseringen af hvornår $\delta_U^{-1} = \delta_{U'}$ følger umiddelbart af lemma 4.2.3. Bemærk, at $W^T B'^T = B^T U^T$, $W'^T B^T = B'^T U'^T$ og at η_W faktisk er dss. δ_{W^T} medens $\eta_{W'}$ er dss. $\delta_{W'^T}$. Heraf fås det ønskede ved transponering af det forrige resultat. Antag, at η_W er en isomorfi med $\eta_{W'}$ som invers. Således findes A og A' , så $I - W'W = AB$ og $I - WW' = A'B'$. For $x \in \ker B$ er således $(I - W'W)x = 0$ mens $(I - WW')y = 0$ for $y \in \ker B'$. ■

4.3 Homomorfier fra $\mathcal{E}(B)$ ind i $\mathcal{E}(B')$

Antagelse 4.3.1 Lad der være givet $B_1 \in \text{Mat}_m(\mathbb{Z})$, $B'_1 \in \text{Mat}_{m'}(\mathbb{Z})$, $B_2 \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$, $B'_2 \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{Z})$, $X \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ og $X' \in \text{Mat}_{m' \times n'}(\mathbb{Z})$. Sæt $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ og $B' = \begin{pmatrix} B'_1 & X' \\ 0 & B'_2 \end{pmatrix}$. Vi betragter nu de exakte følger $\mathcal{E}(B)$ og $\mathcal{E}(B')$ fra definition 4.1.3 og betegner afbildningerne, som følger

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha} & \ker B & \xrightarrow{\beta} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_2 & \longrightarrow & 0, \\ 0 & \longrightarrow & \ker B'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B'_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B'_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B'_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Lemma 4.3.2 Givet to $(m' + n') \times (m + n)$ matricer $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$ og $W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix}$. Antag, at $UB = B'W$. Da induceres en homomorfi fra $\mathcal{E}(B)$ til $\mathcal{E}(B')$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha} & \ker B & \xrightarrow{\beta} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \xi_{W_{11}} & & \downarrow \xi_W & & \downarrow \xi_{W_{22}} & & \downarrow \delta_{U_{11}} & & \downarrow \delta_U & & \downarrow \delta_{U_{22}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker B'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B'_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B'_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B'_2 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Bevis: Vi har, at

$$\begin{pmatrix} U_{11}B_1 & U_{11}X + U_{12}B_2 \\ 0 & U_{22}B_2 \end{pmatrix} = UB = B'W = \begin{pmatrix} B'_1W_{11} & B'_1W_{12} + X'W_{22} \\ 0 & B'_2W_{22} \end{pmatrix}.$$

Så afbildningerne $\xi_{W_{11}}, \xi_W, \xi_{W_{22}}, \delta_{U_{11}}, \delta_U$ og $\delta_{U_{22}}$ er lovlige afbildninger. Alle kvadrater i diagrammet på nær det midterste ses nemt kommutere ved diagramjagt:

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xrightarrow{\alpha} & \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \xrightarrow{\beta} & y \\ \downarrow \xi_{W_{11}} & & \downarrow \xi_W & & \downarrow \xi_W & & \downarrow \xi_{W_{22}} \\ W_{11}x & \xrightarrow{\alpha'} & \begin{pmatrix} W_{11}x \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} W_{11}x + W_{12}y \\ W_{22}y \end{pmatrix} & \xrightarrow{\beta'} & W_{22}y \\ \downarrow \delta_{U_{11}} & & \downarrow \delta_U & & \downarrow \delta_U & & \downarrow \delta_{U_{22}} \\ [x] & \xrightarrow{\lambda} & \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} & & [x] & \xrightarrow{\lambda} & \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \\ \downarrow \delta_{U_{11}} & & \downarrow \delta_U & & \downarrow \delta_U & & \downarrow \delta_{U_{22}} \\ [U_{11}x] & \xrightarrow{\lambda'} & \begin{bmatrix} U_{11}x \\ 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} U_{11}x + U_{12}y \\ U_{22}y \end{bmatrix} & \xrightarrow{\mu'} & [U_{22}y] \end{array}$$

for $x \in \ker B_1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker B$, $[x] \in \text{cok } B_1$ hhv. $[x] \in \text{cok } B$. Vi ønsker nu at vise, at det midterste kvadrat i diagrammet kommuterer. Lad således $y \in \ker B_2$. Da gælder der, at $(\Delta' \circ \xi_{W_{22}})(y) = [X'W_{22}y] = [U_{11}Xy] = (\delta_{U_{11}} \circ \Delta)(y)$, thi $(X'W_{22} - U_{11}X)y = (U_{12}B_2 - B'_1W_{12})y = -B'_1W_{12}y \in B'_1\mathbb{Z}^{m'}$ (da $y \in \ker B_2$). ■

Lemma 4.3.3 *Lad der være givet isomorfier ξ_2, δ_1 og δ , således at diagrammet*

$$\begin{array}{ccccc} \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B \\ \cong \downarrow \xi_2 & & \cong \downarrow \delta_1 & & \cong \downarrow \delta \\ \ker B'_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B'_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' \end{array}$$

kommuterer. Da findes netop en homomorfi $\delta_2: \text{cok } B_2 \rightarrow \text{cok } B'_2$, så $\delta_2 \circ \mu = \mu' \circ \delta$ – og δ_2 er endda en isomorfi. Endvidere er $\ker B_1 \cong \ker B'_1$, og for hver isomorfi $\xi_1: \ker B_1 \rightarrow \ker B'_1$ findes netop en homomorfi $\xi: \ker B \rightarrow \ker B'$, så følgende diagram kommuterer

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha} & \ker B & \xrightarrow{\beta} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_2 \\ \cong \downarrow \xi_1 & & \cong \downarrow \xi & & \cong \downarrow \xi_2 & & \cong \downarrow \delta_1 & & \cong \downarrow \delta & & \cong \downarrow \delta_2 \\ \ker B'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B'_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B'_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B'_2 \end{array}$$

og ξ er endda en isomorfi. Specielt er således $\mathcal{E}(B) \cong \mathcal{E}(B')$.

Bevis: Bemærk, at kernen for $\mu' \circ \delta$ er $\lambda(\text{cok } B_1)$, hvilket præcis er kernen for μ . Da μ er surjektiv, følger af homomorfisætningen (se [Tho98, GRP.5.6]), at der findes en og kun en homomorfi $\delta_2: \text{cok } B_2 \rightarrow \text{cok } B'_2$ opfyldende $\delta_2([y]) = (\mu' \circ \delta)(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix})$ for alle $y \in \mathbb{Z}^n$. Denne er endda en isomorfi (følger af isomorfisætningen eller 5-lemmaet).

Da $\text{cok } B_1 \cong \text{cok } B'_1$, er $\ker B_1 \cong \ker B'_1$ (se bemærkning 1.2.7). Lad der nu være givet en isomorfi $\xi_1: \ker B_1 \rightarrow \ker B'_1$.

Der gælder, at $\alpha(B_1)$ er en direkte summand i $\ker B$ og $\alpha'(B'_1)$ er en direkte summand i $\ker B'$.² Vi viser det kun for B – beviset for B' er fuldstændig analogt. Da $\beta(\ker B) \subseteq \ker B_2$ og $\ker B_2$ er torsionsfri, er $\beta(\ker B)$ torsionsfri og dermed isomorf med \mathbb{Z}^l for et $l \in \mathbb{N}_0$. Da $\beta(\ker B)$ således er projektiv (endda fri), følger af [Fox02, lem.3.2(3)], at vi har en split-exakt følge

$$0 \longrightarrow \ker B_1 \xrightarrow{\alpha} \ker B \xrightarrow{\beta} \beta(\ker B) \longrightarrow 0.$$

For $y \in \ker B_2$ er

$$y \in \beta(\ker B) \Leftrightarrow \Delta(y) = 0 \Leftrightarrow (\delta_1 \circ \Delta)(y) = 0 \Leftrightarrow (\Delta' \circ \xi_2)(y) = 0 \Leftrightarrow \xi_2(y) \in \beta'(\ker B'),$$

så $\xi_2|_{\beta(\ker B)}$ er en isomorfi fra $\beta(\ker B)$ på $\beta'(\ker B')$. Altså haves split-exakte følger og isomorfier, som følger

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker B_1 & \xrightleftharpoons[\tilde{\alpha}]{\alpha} & \ker B & \xrightleftharpoons[\tilde{\beta}]{\beta} & \beta(\ker B) \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \xi_1 & & & & \cong \downarrow \xi_2|_{\beta(\ker B)} \\ 0 & \longrightarrow & \ker B'_1 & \xrightleftharpoons[\tilde{\alpha}']{\alpha'} & \ker B' & \xrightleftharpoons[\tilde{\beta}']{\beta'} & \beta'(\ker B') \longrightarrow 0. \end{array} \quad (4.3)$$

²Der står (implicit) i tredje linje i beviset for prop. 3.9 i [Hua01b], at enhver undergruppe af en torsionsfri gruppe er en direkte summand. Men $2\mathbb{Z}$ er en undergruppe – endda torsionsfri – af \mathbb{Z} , som er torsionsfri; men denne er klart ikke en direkte summand i \mathbb{Z} .

Definér $\xi: \ker B \rightarrow \ker B'$ ved, at $\xi = \alpha' \circ \xi_1 \circ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}' \circ \xi_2 \circ \beta$. Denne er således klart en homomorfi. Det er endvidere oplagt, at diagrammet nu kommuterer. Af 5-lemmaet (se [Fox02, 2.25(1)]) følger, at ξ er en isomorfi. Det er i øvrigt nemt at eftervise, at $\alpha \circ \xi_1^{-1} \circ \tilde{\alpha}' + \tilde{\beta} \circ \xi_2^{-1} \circ \beta'$ er den inverse til ξ .

Det er også klart af diagrammet med de split-exakte følger, (4.3), at der højst findes een homomorfi $\xi: \ker B \rightarrow \ker B'$, så $\xi \circ \alpha = \alpha' \circ \xi_1$ og $\beta' \circ \xi = \xi_2 \circ \beta$. ■

4.4 $GL_{\mathcal{P}}$ - og $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens

Som antydnet i bevisskitserne i forrige kapitel, så spiller klassifikationen af SFT op til FE en væsentlige rolle i alle de klassifikationsbeviser, som jeg her i specialet har koncentreret mig om. Så det var klart et af de store problemer ved at udvide de eksisterende beviser, at vi ikke generelt havde en brugbar klassifikation af SFT op til FE. Jeg gik en gang ind på MathSciNet for at søge efter en artikel. Jeg søgte på titler indeholdende „flow equivalence“ og den første artikel, [Boy02], som kom frem, så ret interessant ud. I „reviewet“ stod, at denne artikel sammen med en – på det tidspunkt – endnu ikke udgivet artikel (se [BH03]), klassificerer SFT op til FE. Efter dette begyndte jeg at arbejde mere målrettet med disse to artikler. Følgende to afsnit er direkte inspireret af disse to artikler.

Definition 4.4.1 Lad $N \in \mathbb{N}$ være givet. Lad $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N$ og sæt $k = n_1 + \dots + n_N$. Bemærk, at enhver matrix $B \in \text{Mat}_k(\mathbb{Z})$ kan (på entydig vis) skrives på blokform

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N1} & \dots & B_{NN} \end{pmatrix},$$

hvor $B_{ij} \in \text{Mat}_{n_i \times n_j}(\mathbb{Z})$ for alle $i, j = 1, \dots, N$. Vi lader $\mathfrak{Mat}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ betegne mængden $\text{Mat}_k(\mathbb{Z})$, hvor vi også husker ovennævnte blokstruktur. Når vi således har givet en matrix $B \in \mathfrak{Mat}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, vil vi med B_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$, betegne disse blokmatricer. Bemærk iøvrigt, at dette ikke skulle give anledning til forvirring, da $B(l, m)$ betegner tallet, som står i l 'te række og m 'te søjle i B . Vi siger også, at B er en \mathbf{n} -blokmatrix.

Det er en vigtig observation, at addition og multiplikation af elementer i $\mathfrak{Mat}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ netop svarer til gøre de tilsvarende operationer blokvis.

Antagelse 4.4.2 I resten af kapitlet lader vi \succeq være en ordensrelation på $\mathcal{P} := \{1, \dots, N\}$, hvor $N \in \mathbb{N}$, som opfylder, at

$$i \succeq j \Rightarrow i \leq j$$

for alle $i, j \in \mathcal{P}$, hvor \leq betegner den sædvanlige ordning på \mathbb{Z} .

Definition 4.4.3 For hvert $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$ lader vi $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ betegne mængden af matricer $B \in \mathfrak{Mat}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, som opfylder, at der for alle $i, j \in \mathcal{P}$ gælder, at $i \succeq j$, hvis $B_{ij} \neq 0$. For hvert $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ er således specielt $B_{ij} = 0$, hvis $i > j$ – mao. er B en blok-øvre trekantsmatrix.

Vi definerer delmængderne $GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ af $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ ved, at

$$B \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det B_{11}, \dots, \det B_{NN} \in \{-1, 1\},$$

$$B \in SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det B_{11} = \dots = \det B_{NN} = 1$$

for $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$.

Definition 4.4.4 Lad $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N), \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{N}^N$. Vi skriver $\mathbf{n} \leq \mathbf{r}$, netop hvis $n_i \leq r_i$ for alle $i = 1, \dots, N$. For $\mathbf{n} \leq \mathbf{r}$ defineres en indlejring $\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}: \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \mathbb{Z})$, som følger. Lad $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$. Den ij 'te blok i $\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(B)$ har da B_{ij} som øvre venstre hjørne. Uden for dette hjørne er den ij 'te blok i $\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(B)$ lig nul, hvis $i \neq j$, og lig identitetsmatricen, hvis $i = j$.

Bemærkning 4.4.5 Bemærk, at \leq er en opadfiltrerende ordning på \mathbb{N}^N . Da \succeq er transitiv, er $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ en monoide – under matrixmultiplikation – for ethvert $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$ (dvs. en semigruppe med neutralt element).

Givet $U \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $U' \in \mathfrak{Mat}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, så $UU' = U'U = I$. Klart er U' en blok øvre trekantsmatrix. Antag, at $U'_{ij} \neq 0$ for $i < j$. Matrixblokken U_{ii} er invertibel, så $U_{ii}U'_{ij} \neq 0$ og

$$(UU')_{ij} = \sum_{k=i}^j U_{ik}U'_{kj} = 0.$$

Således findes et $k \in \mathcal{P}$, så $i < k \leq j$, $i \succeq k$ og $U'_{kj} \neq 0$. Ved induktion er derfor $i \succeq j$ – og altså er $U^{-1} \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ for alle $U \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$. Således er $GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ grupper for ethvert $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$.

Det eftervises forholdsvis nemt, at $\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}$ er en injektiv homomorfi, at $\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})) \subseteq GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \mathbb{Z})$ og at $\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})) \subseteq SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \mathbb{Z})$ for alle $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{N}^N$ med $\mathbf{n} \leq \mathbf{r}$. For alle $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{N}^N$ med $\mathbf{m} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{r}$ gælder oplagt, at $\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{m}} = \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}} \circ \iota_{\mathbf{n}, \mathbf{m}}$.

Altså er $(\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z}), \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}})$, $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{N}^N$, $\mathbf{n} \leq \mathbf{r}$ et induktivt system i kategorien af monoider medens $(GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z}), \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}})$, $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{N}^N$, $\mathbf{n} \leq \mathbf{r}$ og $(SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z}), \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}})$, $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{N}^N$, $\mathbf{n} \leq \mathbf{r}$ er induktive systemer i kategorien af grupper (se tillæg A for generaliseret induktiv limes). Vi lader $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$, $GL_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ hhv. $SL_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ betegne den induktive grænse af disse tre. Med lidt misbrug af notation, betegner vi alle indlejringerne $(\cdot)_{\infty}$. Det er en vigtig observation, at ethvert element i $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ (hhv. $GL_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ og $SL_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$) kan fås som B_{∞} , hvor $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ (hhv. $GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$) for et passende $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$. Det er nemt at se, at vi på kanonisk vis kan betragte $SL_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ som en undergruppe af $GL_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$, og at vi også på kanonisk vis kan betragte $GL_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ som en undermonoide af $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$.

Bemærkning 4.4.6 Man kan også få en forholdsvis pæn beskrivelse af disse induktive grænser ved at repræsentere matricerne som $N \times N$ -blokmatricer – hvor hver blok er en $\aleph_0 \times \aleph_0$ -matrix (en uendelig matrix indiceret over \mathbb{N}). Dette er gjort i [Boy02]. Jeg kan dog bedre lide induktiv limes formuleringen, da den bl.a. virker mere naturlig for mig som C^* -algebraer.

Definition 4.4.7 Givet $\underline{B} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ og $\underline{B}' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$. Vi siger da, at \underline{B} og \underline{B}' er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente (hhv. $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente), netop hvis der findes $\underline{U}, \underline{V} \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ (hhv. $SL_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$), således at $\underline{U} \underline{B} \underline{V} = \underline{B}'$. Det eftervises nemt, at disse er ækvivalensrelationer.

Lad nu $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$. Da er B_{∞} og B'_{∞} $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente (hhv. $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente), hvis og kun hvis der findes $\mathbf{r} \geq \mathbf{n}, \mathbf{n}'$ og $U, V \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \mathbb{Z})$ (hhv. $SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \mathbb{Z})$), således at $U \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(B) V = \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}'}(B')$. Vi vil også tillade os at sige, at B og B' er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente (hhv. $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente), i betydningen B_{∞} og B'_{∞} er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente (hhv. $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente).

4.5 K -vævet

Definition 4.5.1 Vi siger, at en delmængde S af \mathcal{P} er **konveks**, netop hvis $S \neq \emptyset$ og

$$\forall i, j, k \in \mathcal{P} ((i, j \in S \wedge i \succeq k \succeq j) \Rightarrow k \in S).$$

Vi kalder en delmængde \check{H} af \mathcal{P} **koarvelig**, netop hvis der for alle $i, j \in \mathcal{P}$ gælder, at $j \succeq i \wedge i \in \check{H} \Rightarrow j \in \check{H}$. Bemærk, at en delmængde af \mathcal{P} er koarvelig, netop hvis den er arvelig mht. den omvendte ordning (hvor *arvelig* defineres analogt til Γ_A). For hvert $i \in \mathcal{P}$ sættes

$$\begin{aligned} \check{H}(i) &:= \{j \in \mathcal{P} \mid j \succeq i\}, \\ \check{H}_-(i) &:= \{j \in \mathcal{P} \mid j \succeq i \wedge i \neq j\}, \\ \text{Imm}(i) &:= \{j \in \mathcal{P} \mid j \succeq i \wedge i \neq j \wedge \forall k \in \mathcal{P} (j \succeq k \succeq i \Rightarrow k = i \vee k = j)\}. \end{aligned}$$

Givet $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$. For en ikke-tom delmængde S af \mathcal{P} lader vi B_S betegne den principale underblokmatrix $(B_{ij})_{i, j \in S}$ af B . For hver konveks mængde $S \subseteq \mathcal{P}$ sættes

$$C_S(B) := \text{cok } B_S$$

og for hvert $i \in \mathcal{P}$ sættes

$$K_i(B) := \ker B_{ii}.$$

Bemærk i øvrigt, at disse grupper er de samme for $\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(B)$ for alle $\mathbf{r} \geq \mathbf{n}$ (se bemærkning 4.6.4 senere).

For hvert $i \in \mathcal{P}$ med $\check{H}_-(i) \neq \emptyset$ har vi en exakt følge (jf. lemma 4.1.2)

$$K_i(B) \rightarrow C_{\check{H}_-(i)}(B) \rightarrow C_{\check{H}(i)}(B) \rightarrow C_{\{i\}}(B) \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

Og for hvert par $(i, j) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ opfyldende $j \in \text{Imm}(i) \wedge \text{Imm}(i) \setminus \{j\} \neq \emptyset$ er $\check{H}(j) \subsetneq \check{H}_-(i)$ – og følgelig har vi en homomorfi

$$C_{\check{H}(j)}(B) \rightarrow C_{\check{H}_-(i)}(B) \quad (4.5)$$

stammende fra den exakte følge (jf. lemma 4.1.2)

$$\ker B_{\check{H}_-(i) \setminus \check{H}(j)} \rightarrow C_{\check{H}(j)}(B) \rightarrow C_{\check{H}_-(i)}(B) \rightarrow C_{\check{H}_-(i) \setminus \check{H}(j)}(B) \rightarrow 0.$$

Sæt

$$J_{\mathcal{P}} := \{\{i\} \mid i \in \mathcal{P}\} \cup \{\check{H}(i) \mid i \in \mathcal{P}\} \cup \{\check{H}_-(i) \mid i \in \mathcal{P} \wedge \check{H}_-(i) \neq \emptyset\}.$$

Ved K -vævet for B , $K(B)$, forstås familierne $(C_S(B))_{S \in J_{\mathcal{P}}}$ og $(K_i(B))_{i \in \mathcal{P}}$ sammen med alle homomorfierne fra følgerne (4.4) og (4.5).

Lad nu også $B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$ og $B'' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}'', \mathbb{Z})$. Ved en (K -væv) **homomorfi**, $\kappa: K(B) \rightarrow K(B')$, forstås familier $(\kappa_S^{\text{cok}}: C_S(B) \rightarrow C_S(B'))_{S \in J_{\mathcal{P}}}$ og $(\kappa_i^{\text{ker}}: K_i(B) \rightarrow K_i(B'))_{i \in \mathcal{P}}$ af homomorfier, som opfylder, at stigerne kommende fra følgerne i $K(B)$ og $K(B')$ kommuterer. Sættningen, $\kappa' \circ \kappa$, af to homomorfier $\kappa: K(B) \rightarrow K(B')$ og $\kappa': K(B') \rightarrow K(B'')$, defineres ved, at $(\kappa' \circ \kappa)_S^{\text{cok}} = \kappa'_S{}^{\text{cok}} \circ \kappa_S^{\text{cok}}$ for $S \in J_{\mathcal{P}}$ og $(\kappa' \circ \kappa)_i^{\text{ker}} = \kappa'_i{}^{\text{ker}} \circ \kappa_i^{\text{ker}}$ for $i \in \mathcal{P}$. Det vises let, at K -vævene udgør en kategori. Endvidere ses let, at en (K -væv) homomorfi, $\kappa: K(B) \rightarrow K(B')$, er en (K -væv) **isomorfi**, netop hvis alle homomorfierne $(\kappa_S^{\text{cok}}: C_S(B) \rightarrow C_S(B'))_{S \in J_{\mathcal{P}}}$ og $(\kappa_i^{\text{ker}}: K_i(B) \rightarrow K_i(B'))_{i \in \mathcal{P}}$ er isomorfier.

Bemærkning 4.5.2 Bemærk, at K -væv isomorfi er stærkere end at sige, at alle følgerne er isomorfe (som eksakte følger). De forskellige følger kan overlape i den forstand, at grupper i forskellige følger kan stamme fra samme konvekse delmængde af \mathcal{P} . Hvis man visualiserer dette i et diagram (som f.eks. i [BH03, ex.3.6]), så får man også en fornemmelse af, hvorfor dette kaldes for K -vævet.

Sætning 4.5.3 Lad $m, n \in \mathbb{N}$ være givet. Antag, at der yderligere er givet $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ 0 & B'_{22} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m+n}(\mathbb{Z})$ og $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ 0 & V_{22} \end{pmatrix} \in GL_{m+n}(\mathbb{Z})$, således at $UBV = B'$ (blokstrukturen passer sammen). Da induceres en isomorfi af eksakte følger ved fastsættelsen

$$\begin{array}{ccccccccc} \ker B_{11} & \xrightarrow{\alpha} & \ker B & \xrightarrow{\beta} & \ker B_{22} & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_{11} & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_{22} \\ \cong \downarrow \xi_{V_{11}^{-1}} & & \cong \downarrow \xi_{V^{-1}} & & \cong \downarrow \xi_{V_{22}^{-1}} & & \cong \downarrow \delta_{U_{11}} & & \cong \downarrow \delta_U & & \cong \downarrow \delta_{U_{22}} \\ \ker B'_{11} & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B'_{22} & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B'_{11} & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B'_{22}. \end{array}$$

Bevis: Da U og V er invertible, følger det umiddelbart af lemma 4.3.2. ■

Definition 4.5.4 Givet $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$. Antag, at B og B' er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente. Altså findes $\mathbf{r} \geq \mathbf{n}, \mathbf{n}'$ og $U, V \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \mathbb{Z})$, således at $UB_0V = B'_0$ for $B_0 = \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(B)$ og $B'_0 = \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}'}(B')$.

Af foregående sætning ses, at parret (U, V) inducerer en K -væv isomorfi mellem $K(B_0)$ og $K(B'_0)$. Denne **inducerede K -væv isomorfi** betegner vi $\kappa_{(U, V)}$.

Det kan virke lidt underligt, at der også medtages homomorfierne kommende fra (4.5). Men der er en grund til dette, som vi skal se i følgende sætning.

Sætning 4.5.5 Givet $B, B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og en K -væv isomorfi $\kappa: K(B) \rightarrow K(B')$. Antag at vi har givet $i \in \mathcal{P}$, så $\text{Imm}(i) \neq \emptyset$, $B_{\check{H}_-(i)} = B'_{\check{H}_-(i)}$ og $\kappa_{\check{H}(j)}^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B_{\check{H}(j)}}$ for alle $j \in \text{Imm}(i)$. Da er $\kappa_{\check{H}_-(i)}^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B_{\check{H}_-(i)}}$.

Bevis: Bemærk, at vi har, at

$$\check{H}_-(i) = \bigcup_{j \in \text{Imm}(i)} \check{H}(j).$$

Hvis $\text{Imm}(i) = \{j\}$, så er $\check{H}_-(i) = \check{H}(j)$ og følgelig fås det ønskede umiddelbart. Antag derfor, at $\text{Imm}(i)$ har mindst to elementer. Da har vi for hvert $j \in \text{Imm}(i)$ følgende kommutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \text{cok } B_{\check{H}(j)} & \xrightarrow{\lambda_j} & \text{cok } B_{\check{H}_-(i)} \\ \cong \downarrow \kappa_{\check{H}(j)}^{\text{cok}} = id & & \cong \downarrow \kappa_{\check{H}_-(i)}^{\text{cok}} \\ \text{cok } B_{\check{H}(j)} & \xrightarrow{\lambda_j} & \text{cok } B_{\check{H}_-(i)}. \end{array}$$

Lad $k \in \mathbb{N}$ betegne størrelsen af $B_{\check{H}_-(i)} = B'_{\check{H}_-(i)}$ og lad $(e_l)_{l=1}^k$ være standard basen for \mathbb{Z}^k . Givet $l \in \{1, \dots, k\}$, findes således et $j \in \text{Imm}(i)$, så $[e_l] \in \lambda_j(\text{cok } B_{\check{H}(j)})$, og således er $\kappa_{\check{H}_-(i)}^{\text{cok}}([e_l]) = [e_l]$ ifølge ovenstående kommutative diagram. Da elementerne $[e_1], \dots, [e_k]$ frembringer $\text{cok } B_{\check{H}_-(i)}$, følger det umiddelbart, at $\kappa_{\check{H}_-(i)}^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B_{\check{H}_-(i)}}$. ■

4.6 K -vævet er en fuldstændig invariant af $\{-1, 0, 1\}$ -matricer op til $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens

Antagelse 4.6.1 Antag endvidere, at der er givet en ordning \succeq på $\mathcal{P}_2 = \{1, 2\}$, så $2 \not\succeq 1$.

Bemærkning 4.6.2 Givet $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$. Sæt $B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{Z})$ for et $n' \geq n$. Ved en direkte udregning ses, at homomorfien $\varphi: \mathbb{Z}^n \ni x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n'}$ inducerer isomorfier

$$\begin{aligned} \ker B \ni x &\mapsto \varphi(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker B', \\ \text{cok } B \ni [x] &\mapsto [\varphi(x)] = \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right] \in \text{cok } B'. \end{aligned}$$

Lemma 4.6.3 Lad der være givet en matrix $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}_2}((m, n), \mathbb{Z})$ og $(m', n') \geq (m, n)$. Sæt

$$B' = \iota_{(m', n'), (m, n)}(B) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I_{m'-m} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_{n'-n} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Da er $\mathcal{E}(B)$ og $\mathcal{E}(B')$ kanonisk isomorfe. Der gælder nemlig, at følgende diagram kommuterer

$$\begin{array}{ccccccccc} \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha} & \ker B & \xrightarrow{\beta} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_2 \\ \cong \downarrow \xi_{W_{11}} & & \cong \downarrow \xi_W & & \cong \downarrow \xi_{W_{22}} & & \cong \downarrow \delta_{U_{11}} & & \cong \downarrow \delta_U & & \cong \downarrow \delta_{U_{22}} \\ \ker B'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B'_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B'_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B'_2, \end{array}$$

hvor $U = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix}$, $U_{11} = W_{11} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m' \times m}(\mathbb{Z})$ og $U_{22} = W_{22} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$.

Bevis: Det eftervises umiddelbart, at $UB = B'W$. Så homomorfierne er veldefinerede og diagrammet kommuterer (jf. lemma 4.3.2). Af bemærkning 4.6.2 følger, at $\xi_{W_{11}}, \xi_{W_{22}}, \delta_{U_{11}}$ og $\delta_{U_{22}}$ er isomorfier. Af 5-lemmaet (se [Fox02, 2.25(1)]) følger således, at ξ_W og δ_U er isomorfier. ■

Bemærkning 4.6.4 Hvis $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, så følger det nemt af ovenstående, at $K(B)$ og $K(\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(B))$ er kanonisk isomorfe for ethvert $\mathbf{r} \geq \mathbf{n}$. Således er K -vævet en invariant af $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ op til $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens.

Det er oplagt at spørge, om enhver K -væv isomorfi er induceret af en $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens – men svaret er klart nej, thi hvis $B = B' = (5)$, så er isomorfien $\text{cok } B \ni [x] \mapsto [2x] \in \text{cok } B'$ ikke induceret af nogen GL -ækvivalens.

Et naturligt spørgsmål er nu, hvorvidt K -vævet er en fuldstændig invariant af $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$ op til $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens. Dette kan man også forholdsvis nemt afvise – her skitserer jeg en del af [BH03, example 7.1]. Sæt $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ og $\mathcal{P}_2 = \{1, 2\}, 1 \succeq 2$. Det indses let, at der ikke findes nogen $GL_{\mathcal{P}_2}$ -ækvivalens fra B til B' . Der gælder, at $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = B' \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, og det vises let, at de afbildninger, som heraf induceres, er isomorfier.

Lemma 4.6.5 Givet $B, B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og antag, at $\text{cok } B_{ii} \cong \text{cok } B'_{ii}$ for alle $i \in \mathcal{P}$. Da findes blok diagonalmatrixer $U = \text{diag}(U_{11}, U_{22}, \dots, U_{NN})$, $V = \text{diag}(V_{11}, V_{22}, \dots, V_{NN}) \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, så $U_{ii}B'_{ii}V_{ii} = B_{ii}$ for alle $i \in \mathcal{P}$. Følgelig inducerer (U, V) en isomorfi af $K(B')$ på $K(UB'V)$ og der gælder, at $UB'V$ har præcis samme diagonalblokke som B .

Bevis: For hvert $i \in \mathcal{P}$ kan vi skrive $B_{ii} = P_i D_i Q_i$, $B'_{ii} = P'_i D'_i Q'_i$, hvor $P_i, Q_i, P'_i, Q'_i \in GL_{n_i}(\mathbb{Z})$ og D_i og D'_i er Smith normal formen for hhv. B_{ii} og B'_{ii} . Da $\text{cok } B_{ii} \cong \text{cok } B'_{ii}$ og B_{ii} og B'_{ii} har samme størrelse, er $D_i = D'_i$ for alle $i \in \mathcal{P}$. Følgelig er $U_{ii}B'_{ii}V_{ii} = B_{ii}$, hvor $U_{ii} = P_i P'^{-1}$, $V_{ii} = Q_i'^{-1} Q_i$ for $i \in \mathcal{P}$. Heraf følger resten af lemmaet nemt. ■

Sætning 4.6.6 Lad $B \in \text{Mat}_n(\{-1, 0, 1\})$. For hver automorfi $\delta: \text{cok } B \rightarrow \text{cok } B$ findes $U, W \in GL_n(\mathbb{Z})$, så $UB = BW$ og $\delta = \delta_U$.

Bevis: Beviset for lemmaet er ikke helt nemt, og det er også ret teknisk. Da dette er et ret isoleret resultat og beviset egentlig ikke gør, at man får bedre forståelse for K -vævet, har jeg valgt at udelade beviset. Se beviset for [BH03, thm.4.4], som findes i §5 i [BH03]. ■

Korollar 4.6.7 Givet $B, B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, hvor diagonalblokkene i B og B' er ens og har indgange fra $\{-1, 0, 1\}$. Antag, at vi for hvert $i \in \mathcal{P}$ har givet en automorfi $\delta_i: \text{cok } B_{ii} \rightarrow \text{cok } B_{ii}$. Da findes blok diagonalmatrixer $U = \text{diag}(U_{11}, U_{22}, \dots, U_{NN})$, $V = \text{diag}(V_{11}, V_{22}, \dots, V_{NN}) \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, så $U_{ii}B_{ii}V_{ii} = B_{ii}$ og $\delta_i^{-1} = \delta_{U_{ii}}: \text{cok } B_{ii} \rightarrow \text{cok } B_{ii}$ for alle $i \in \mathcal{P}$. Sæt $B'' = UB'V$. Der gælder mao., at B'' har samme diagonalblokke som B (og B') og vi har en K -væv isomorfi $\kappa_{(U, V)}: K(B') \rightarrow K(B'')$, som opfylder, at $(\kappa_{(U, V)})_{\{i\}}^{\text{cok}} = \delta_i^{-1}$ for alle $i \in \mathcal{P}$.

Bevis: Ifølge sætning 4.6.6 findes for hvert $i \in \mathcal{P}$ matricer $U_{ii}, V_{ii} \in GL_{n_i}(\mathbb{Z})$, så $U_{ii}B_{ii}V_{ii} = B_{ii}$ og $\delta_{U_{ii}} = \delta_i^{-1}$. Nu følger resten af korollaret nemt. ■

Lemma 4.6.8 Givet $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$ og en automorfi $\xi: \ker B \rightarrow \ker B$ af $\ker B$. Da findes $W \in GL_n(\mathbb{Z})$, så $B = BW$ og $\xi = \xi_W$.

Bevis: Vi kan pga. korollar 4.2.5 w.l.o.g. antage, at B er lig sin Smith normal form, D . Skriv $D = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, så $\det D_0 \neq 0$. Da kan automorfien ξ ifølge lemma 4.2.7 fås som $\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix}$, hvor $|\det W_{22}| = 1$. Med $W = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix}$ fås således det ønskede. ■

Korollar 4.6.9 Lad der være givet $B, B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, hvor diagonalblokkene i B og B' er ens. Antag, at vi for hvert $i \in \mathcal{P}$ har givet en automorfi $\xi_i: \ker B_{ii} \rightarrow \ker B_{ii}$. Da findes en blok diagonalmatrix $V = \text{diag}(V_{11}, V_{22}, \dots, V_{NN}) \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, så $B_{ii}V_{ii} = B_{ii}$ og $\xi_i^{-1} = \xi_{V_{ii}^{-1}}: \ker B_{ii} \rightarrow \ker B_{ii}$ for alle $i \in \mathcal{P}$. Sæt $B'' = B'V$. Der gælder mao., at B'' har samme diagonalblokke som B (og B') og vi har en K -væv isomorfi $\kappa_{(I,V)}: K(B') \rightarrow K(B'')$, som opfylder, at $(\kappa_{(I,V)})_i^{\ker} = \xi_i^{-1}$ for alle $i \in \mathcal{P}$.

Bevis: Ifølge lemma 4.6.8 findes for hvert $i \in \mathcal{P}$ en matrix $V_{ii} \in GL_{n_i}(\mathbb{Z})$, så $B_{ii}V_{ii} = B_{ii}$ og $\xi_{V_{ii}^{-1}} = \xi_i^{-1}$. Nu følger resten af korollaret nemt. ■

Korollar 4.6.10 Givet $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} B_1 & X' \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}_2}((m, n), \mathbb{Z})$.

Antag, at der er givet en isomorfi $\xi_1: \ker B_1 \rightarrow \ker B_1$. Da findes $W_{11} \in GL_m(\mathbb{Z})$, så $B' = B'W$, hvor $W = \begin{pmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}_2}((m, n), \mathbb{Z})$, og så disse inducerer en isomorfi af exakte følger

$$\begin{array}{ccccccccc} \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B_2 \\ \cong \downarrow \xi_{W_{11}} = \xi_1^{-1} & & \cong \downarrow \xi_W & & \cong \downarrow \xi_I = id & & \cong \downarrow id & & \cong \downarrow id & & \cong \downarrow id \\ \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B_2. \end{array}$$

Bevis: Find $W_{11} \in GL_m(\mathbb{Z})$, så $\xi_1^{-1} = \xi_{W_{11}}$, $B_1 = B_1W_{11}$ ifølge lemma 4.6.8. Resten ses nu ved at gange de angivne matricer sammen og bruge sætning 4.5.3. ■

Lemma 4.6.11 Givet $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} B_1 & X' \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}_2}((m, n), \mathbb{Z})$ og en isomorfi $\delta: \text{cok } B \rightarrow \text{cok } B'$, så følgende diagram kommuterer

$$\begin{array}{ccccccc} \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_2 \\ \cong \downarrow id & & \cong \downarrow id & & \cong \downarrow \delta & & \cong \downarrow id \\ \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B_2. \end{array}$$

Da findes $U_{12}, V_{12} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$ og $V_{22} \in GL_n(\mathbb{Z})$ med $UBV = B'$, hvor $U = \begin{pmatrix} I & U_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ og $V = \begin{pmatrix} I & V_{12} \\ 0 & V_{22} \end{pmatrix}$, således at disse inducerer en isomorfi af exakte følger

$$\begin{array}{ccccccccc} \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha} & \ker B & \xrightarrow{\beta} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_2 \\ \cong \downarrow \xi_I = id & & \cong \downarrow \xi_{V^{-1}} & & \cong \downarrow \xi_{V_{22}^{-1}} = id & & \cong \downarrow \delta_I = id & & \cong \downarrow \delta_U = \delta & & \cong \downarrow \delta_I = id \\ \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B_2. \end{array}$$

Bevis: Der findes en matrix $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{Mat}((m, n), \mathbb{Z})$, således at $\delta = \delta_R$. Det følger af kommutativiteten af diagrammet, at

$$\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & X' \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{pmatrix}$$

for et par $P_{11} \in \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{Z})$ og $P_{21} \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{Z})$ af heltalsmatricer og

$$R_{22} = I + B_2P_{22}$$

for en heltalsmatrix $P_{22} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z})$.

Definér $U_{12} = R_{12} - X'P_{22}$ og

$$U = \begin{pmatrix} I & U_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Da er

$$R - U = \begin{pmatrix} B_1 & X' \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix},$$

så $\delta = \delta_R = \delta_U$.

Antag nu, at B_2 er lig dens Smith normal form D_2 . Lad D_0 betegne den maksimale regulære principale delmatrix af D_2 . Vi kan således skrive B og B' på formen

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & X_1 & X_2 \\ 0 & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} B_1 & X'_1 & X'_2 \\ 0 & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ifølge kommutativiteten i første kvadrat, findes en matrix W' , så $X_2 = X'_2 + B_1 W'$. Således er

$$B' \begin{pmatrix} I & 0 & W' \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & X'_1 & X_2 \\ 0 & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Derfor kan vi for at vise lemmaet w.l.o.g. antage, at $X_2 = X'_2$. Ifølge det lige viste findes en matrix

$$U = \begin{pmatrix} I & U_{12} & U_{13} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

så $\delta = \delta_U$ (og blokke matcher den nye inddeling af B og B'). Bemærk, at

$$UB = \begin{pmatrix} B_1 & X_1 + U_{12}D_0 & X_2 \\ 0 & D_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da U^{-1} repræsenterer δ^{-1} , inducerer $U^{-1}B'$ nulafbildningen fra $\text{cok } B'$ til $\text{cok } B$. Følgelig findes V_{12}, V_{22} og V_{32} , så

$$U^{-1}B' \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix}.$$

Sæt

$$V = \begin{pmatrix} I & V_{12} & 0 \\ 0 & V_{22} & 0 \\ 0 & V_{32} & I \end{pmatrix},$$

da er $UBV = B'$. Bemærk, at således er $D_0 = D_0 V_{22}$. Da D_0 er en invertibel matrix over \mathbb{R} , er $V_{22} = I$. Klart er $\xi_{\begin{pmatrix} I & 0 \\ V_{32} & I \end{pmatrix}^{-1}} = id$.

Nu til det generelle tilfælde. Lad D_2 være Smith normal formen for B_2 og lad P_2 og Q_2 være invertible heltalsmatricer, som opfylder, at $B_2 = P_2 D_2 Q_2$. Sæt $U' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}$, $V' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = U' B V' = \begin{pmatrix} B_1 & X Q_2^{-1} \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ og $\tilde{B}' = U' B' V' = \begin{pmatrix} B_1 & X' Q_2^{-1} \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$. Da har vi inducerede isomorfier, som vist i diagrammet

$$\begin{array}{ccccccc} \ker D_2 & \xrightarrow{\tilde{\Delta}} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & \text{cok } \tilde{B} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \text{cok } D_2 \\ \cong \downarrow \xi_{Q_2^{-1}} & & \cong \downarrow id & & \cong \downarrow \delta_{U'^{-1}} & & \cong \downarrow \delta_{P_2} \\ \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_2 \\ \cong \downarrow id & & \cong \downarrow id & & \cong \downarrow \delta & & \cong \downarrow id \\ \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B_2 \\ \cong \downarrow \xi_{Q_2} & & \cong \downarrow id & & \cong \downarrow \delta_{U'} & & \cong \downarrow \delta_{P_2^{-1}} \\ \ker D_2 & \xrightarrow{\tilde{\Delta}'} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\tilde{\lambda}'} & \text{cok } \tilde{B}' & \xrightarrow{\tilde{\mu}'} & \text{cok } D_2. \end{array}$$

Således findes ifølge ovenstående $U = \begin{pmatrix} I & U_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ og $V = \begin{pmatrix} I & V_{12} \\ 0 & V_{22} \end{pmatrix}$, så $U \tilde{B} V = \tilde{B}'$, $\delta_U = \delta_{U'} \circ \delta \circ \delta_{U'^{-1}}$ og $\xi_{V_{22}^{-1}} = id$. Således er

$$B' = U'^{-1} \tilde{B}' V'^{-1} = U'^{-1} U \tilde{B} V V'^{-1} = U'^{-1} U U' B V' V V'^{-1} = \begin{pmatrix} I & U_{12} P_2^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} I & V_{12} Q_2 \\ 0 & Q_2^{-1} V_{22} Q_2 \end{pmatrix}.$$

Og vi har $\delta_{U'^{-1} U U'} = \delta_{U'^{-1}} \circ \delta_U \circ \delta_{U'} = \delta$ og $\xi_{(Q_2^{-1} V_{22} Q_2)^{-1}} = \xi_{Q_2^{-1}} \circ \xi_{V_{22}^{-1}} \circ \xi_{Q_2} = id$. ■

Fra [BH03, cor.4.7] har vi følgende (specialtilfælde)

Teorem 4.6.12 (Boyle-Huang) *Givet matricer $B, B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$, hvis diagonalblokke er $\{-1, 0, 1\}$ -matricer. Da er enhver K -væv isomorfi fra $K(B)$ til $K(B')$ induceret af en $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens fra B til B' . Matricerne B og B' er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente, netop hvis K -vævene $K(B)$ og $K(B')$ er (K -væv) isomorfe.*

Bevis: Pga. bemærkning 4.6.4 kan vi antage, at $B, B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$. Lad der være givet en K -væv isomorfi $\kappa: K(B) \rightarrow K(B')$. Da findes ifølge lemma 4.6.5 blokdiagonalmatricer $U, V \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, så $UB'V$ har samme diagonalblokke som B . Det er således nok at vise, at K -væv isomorfien $\kappa_{(U,V)} \circ \kappa: K(B) \rightarrow K(UB'V)$ er induceret af en $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens.

Vi kan således w.l.o.g. antage, at B og B' har samme diagonalblokke. Ifølge korollar 4.6.7 findes blokdiagonalmatricer $U, V \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, så $UB'V$ har samme diagonalblokke som B (og B') og så $(\kappa_{(U,V)})_{\{i\}}^{\text{cok}} = \delta_{U_{ii}} = (\kappa_{\{i\}}^{\text{cok}})^{-1}$ for alle $i \in \mathcal{P}$. Det er således nok at vise, at K -væv isomorfien $\kappa_{(U,V)} \circ \kappa: K(B) \rightarrow K(UB'V)$ er induceret af en $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens – og bemærk, at $(\kappa_{(U,V)} \circ \kappa)_{\{i\}}^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B_{ii}}$, $i \in \mathcal{P}$.

Vi kan således w.l.o.g. antage, at B og B' har samme diagonalblokke og at $\kappa_{\{i\}}^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B_{ii}}$ for alle $i \in \mathcal{P}$. Ifølge korollar 4.6.9 findes en blokdiagonalmatrix $V \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, så $B'V$ har samme diagonalblokke som B (og B') og så $(\kappa_{(I,V)})_i^{\text{ker}} = \xi_{V_{ii}^{-1}} = (\kappa_i^{\text{ker}})^{-1}$ og $(\kappa_{(I,V)})_{\{i\}}^{\text{cok}} = \delta_I = id_{\text{cok } B_{ii}}$ for alle $i \in \mathcal{P}$. Det er således nok at vise, at K -væv isomorfien $\kappa_{(I,V)} \circ \kappa: K(B) \rightarrow K(B'V)$ er induceret af en $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens – og bemærk, at $(\kappa_{(I,V)} \circ \kappa)_{\{i\}}^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B_{ii}}$ og $(\kappa_{(I,V)} \circ \kappa)_i^{\text{ker}} = id_{\text{ker } B_{ii}}$ for alle $i \in \mathcal{P}$.

Vi kan således w.l.o.g. antage, at B og B' har samme diagonalblokke og at $\kappa_{\{i\}}^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B_{ii}}$ og $\kappa_i^{\text{ker}} = id_{\text{ker } B_{ii}}$ for alle $i \in \mathcal{P}$. Hvis vi har en række matricer $B = B^0, B^1, \dots, B^{N-1}, B^N = B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, hvor alle matricerne har samme diagonalblokke som B (og B') og der for alle $i = 1, \dots, N$ gælder, at $U^i B^{i-1} V^i = B^i$ med $U^i, V^i \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$. Sæt så $\kappa^{<i>} := \kappa_{(U_i, V_i)} \circ \dots \circ \kappa_{(U_1, V_1)}: K(B) \rightarrow K(B^i)$ og betragt følgende udsagn for hvert $i \in \mathcal{P}$:

$$\left. \begin{aligned} B_{\{1, \dots, i\}}^i &= B'_{\{1, \dots, i\}}, \\ (\kappa \circ (\kappa^{<i>})^{-1})_S^{\text{cok}} &= id_{\text{cok } B'_S} \quad \text{for alle } S \in \{\check{H}(j), \check{H}_-(j) \mid j \leq i\} \setminus \emptyset, \\ (\kappa^{<i>})_{\{j\}}^{\text{cok}} &= id_{\text{cok } B_{jj}} \quad \text{for alle } j = 1, \dots, N, \\ (\kappa^{<i>})_j^{\text{ker}} &= id_{\text{ker } B_{jj}} \quad \text{for alle } j = 1, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Hvis vi kan vise, at sådanne matricer B_i, U_i, V_i , $i \in \mathcal{P}$ findes, så $(*)$ er opfyldt for alle $i \in \mathcal{P}$, så er vi færdige (thi så er $\kappa^{<N>}: K(B) \rightarrow K(B')$ induceret af $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalenser og $\kappa \circ (\kappa^{<N>})^{-1}$ er identiteten på $K(B')$).

Vi viser ved induktion, at disse matricer findes. *Induktionsbasis*, $i = 1$: Vi har allerede, at $B_{\{1\}} = B_{11} = B'_{\{1\}}$. Sæt $B^1 = B$, $U^1 = V^1 = I$. Da $\kappa_1^{\text{ker}} = id_{\text{ker } B_{11}}$ og $\kappa_{\{1\}}^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B_{11}}$, følger, at B^1, U^1, V^1 opfylder $(*)$ for $i = 1$.

Induktionsskridtet: Antag, at vi har givet $k \in \mathcal{P}$ med $1 \leq k < N$, at vi har givet matricer $B^0, B^1, \dots, B^k \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og matricer $U^1, V^1, \dots, U^k, V^k \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, så $U^1 B^0 V^1 = B^1, \dots, U^k B^{k-1} V^k = B^k$ og at disse opfylder betingelsen $(*)$ for alle $i = 1, \dots, k$. Vi ønsker så at finde B^{k+1}, U^{k+1} og V^{k+1} , så $(*)$ er opfyldt også for $i = k + 1$.

Hvis $j \not\leq k + 1$ for alle $j < k + 1$, så kan vi sætte $B^{k+1} = B^k$ og $U^{k+1} = V^{k+1} = I$. Thi betingelsen $j \not\leq k + 1$ for alle $j < k + 1$ bevirker, at $B_{j, k+1}^{k+1} = B'_{j, k+1} = 0$ for alle $j \neq k + 1$, så $B_{\{1, \dots, k+1\}}^{k+1} = B'_{\{1, \dots, k+1\}}$. Klart er $U^{k+1} B^k V^{k+1} = B^{k+1}$. Da det eneste nye element i $\{\check{H}(j), \check{H}_-(j) \mid j \leq k + 1\} \setminus \emptyset$ er $\{k + 1\}$, er det klart, at $(*)$ er opfyldt for $i = k + 1$ i dette tilfælde.

Antag nu i stedet, at $\check{H}_-(k + 1) \neq \emptyset$. Vi kan således skrive $B_{\check{H}(k+1)}^k$ og $B'_{\check{H}(k+1)}$ på følgende form

$$B_{\check{H}(k+1)}^k = \begin{pmatrix} R & X \\ 0 & B_{k+1, k+1} \end{pmatrix}, \quad B'_{\check{H}(k+1)} = \begin{pmatrix} R & X' \\ 0 & B_{k+1, k+1} \end{pmatrix},$$

hvor $R = B_{\check{H}_-(k+1)}^k = B'_{\check{H}_-(k+1)}$. Sæt $\kappa' := (\kappa \circ (\kappa^{<k>})^{-1})$. Af sætning 4.5.5 følger nu, at κ' virker på følgen stammende fra $\check{H}_-(k + 1) \subsetneq \check{H}(k + 1)$ på følgende måde

$$\begin{array}{ccccccc} \ker B_{k+1, k+1} & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } R & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_{\check{H}(k+1)}^k & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B_{k+1, k+1} \\ \cong \downarrow id & & \cong \downarrow id & & \cong \downarrow (\kappa')_{\check{H}(k+1)}^{\text{cok}} & & \cong \downarrow id \\ \ker B_{k+1, k+1} & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } R & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B'_{\check{H}(k+1)} & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B_{k+1, k+1}. \end{array}$$

Ifølge lemma 4.6.11 findes invertible heltalsmatricer $U' = \begin{pmatrix} I & U'_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $V' = \begin{pmatrix} I & V'_{12} \\ 0 & V'_{22} \end{pmatrix}$, hvis blokstørrelser matcher dem for $B_{\check{H}(k+1)}^k$ og $B'_{\check{H}(k+1)}$, så $U' B_{\check{H}(k+1)}^k V' = B'_{\check{H}(k+1)}$ og så denne GL -ækvivalens inducerer netop

isomorfien mellem de exakte følger ovenover (bemærk, at således er $\xi_{V_{22}^{-1}} = id_{\ker B_{k+1, k+1}}$). Lad nu U^{k+1} og V^{k+1} være de matricer, som er lig hhv. U' og V' for alle index $i \in \check{H}(k+1)$ og lig identitetsmatricen udenfor dette. Der gælder klart, at $U^{k+1}, V^{k+1} \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ (thi $(U^{k+1})_{ij} \neq 0 \wedge i < j \Rightarrow i \in \check{H}_-(k+1) \wedge j = k+1$). Sæt $B^{k+1} = U^{k+1} B^k V^{k+1}$. Det er klart fra konstruktionen af U' og V' , at $B_{\{1, \dots, k+1\}}^{k+1} = B'_{\{1, \dots, k+1\}}$. Bemærk, at $(\kappa_{(U^{k+1}, V^{k+1})})_S^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B'_S}$ for alle $S \in (\{\{j\} | j \in \mathcal{P}\} \cup \{\check{H}(j) | j \leq k\} \cup \{\check{H}_-(j) | j \leq k+1\}) \setminus \emptyset$ og $(\kappa_{(U^{k+1}, V^{k+1})})_{\check{H}(k+1)}^{\text{cok}} = \delta_{U'} = (\kappa')_{\check{H}(k+1)}^{\text{cok}}$. Endvidere er $(\kappa_{(U^{k+1}, V^{k+1})})_j^{\text{ker}} = id_{\ker B_{jj}}$ for alle $j \in \mathcal{P}$. Følgelig er det klart, at $(\kappa \circ (\kappa^{<k+1>})^{-1})_S^{\text{cok}} = (\kappa \circ (\kappa^{<k>})^{-1})_S^{\text{cok}} \circ (\kappa_{(U^{k+1}, V^{k+1})}^{-1})_S^{\text{cok}} = id_{\text{cok } B'_S}$ for alle $S \in (\{\{1\}, \dots, \{N\}\} \cup \{\check{H}(j), \check{H}_-(j) | j \leq k+1\}) \setminus \emptyset$. Klart er $(\kappa \circ (\kappa^{<k+1>})^{-1})_j^{\text{ker}} = id_{\ker B_{jj}}$ for $j = 1, \dots, N$. Altså er (\star) også opfyldt for $i = k+1$.

Ved induktion har vi således vist, at κ er induceret af en $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens. Den sidste del af teoremet følger nu umiddelbart, da K -vævet er en invariant op til $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens. ■

Korollar 4.6.13 *Lad der være givet matricer $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} B'_1 & X' \\ 0 & B'_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}_2}((m, n), \mathbb{Z})$ med $\{-1, 0, 1\}$ -indgange. Da er $\mathcal{E}(B) \cong \mathcal{E}(B')$, hvis og kun hvis B og B' er $GL_{\mathcal{P}_2}$ -ækvivalente. Og endvidere er enhver isomorfi fra $\mathcal{E}(B)$ til $\mathcal{E}(B')$ induceret af en $GL_{\mathcal{P}_2}$ -ækvivalens.*

Bevis: Den første del følger umiddelbart af foregående teorem. Lad der nu være givet en isomorfi $(\xi_1, \xi, \xi_2, \delta_1, \delta, \delta_2)$ fra $\mathcal{E}(B)$ til $\mathcal{E}(B')$. Da findes ifølge foregående teorem en $GL_{\mathcal{P}_2}$ -ækvivalens, fra B til B' , som inducerer en isomorfi fra $\mathcal{E}(B)$ til $\mathcal{E}(B')$, således at $(\xi_2, \delta_1, \delta, \delta_2)$ er $(\xi_{V_{22}^{-1}}, \delta_{U_{11}}, \delta_U, \delta_{U_{22}})$. Vi kan imidlertid ikke være sikre på, at $\xi_1 = \xi_{V_{11}^{-1}}$ og $\xi = \xi_{V^{-1}}$. Ved at bruge korollar 4.6.10 to gange, ses, at vi kan sammensætte ækvivalenser, så vi kan antage, at $\xi_1 = \xi_{V_{11}^{-1}}$ (og at $(\xi_2, \delta_1, \delta, \delta_2)$ er $(\xi_{V_{22}^{-1}}, \delta_{U_{11}}, \delta_U, \delta_{U_{22}})$). Af lemma 4.3.3 følger, at ξ og $\xi_{V^{-1}}$ er entydigt bestemt ved de øvrige afbildninger, så $\xi = \xi_{V^{-1}}$. ■

4.7 Om sammenhængen mellem Rørdams og Huangs invarianter

Følgende lemma svarer i en vis grad til [Hua95, lem.3.2]. Lemmaet i artiklen er lidt mere generelt end følgende lemma – derimod er beviset ikke så enkelt. Hvorvidt D. Huang i artiklen egentlig bruger, at hans version er mere generel end min, har jeg ikke undersøgt.

Lemma 4.7.1 *Lad $UB = B'W$ og antag, at $\ker B \cong \ker B' \cong \{0\}$. Da er δ_U en isomorfi, hvis og kun hvis η_W en isomorfi.*

Bevis: Antag, at δ_U er en isomorfi. Vi vil så vise, at η_W er en isomorfi. Ifølge lemma 4.2.8 findes U', W', A og A' , således at $U'B' = BW'$ og

$$I - U'U = BA, \quad I - UU' = B'A'.$$

Bemærk, at da $\ker B \cong \ker B' \cong \{0\}$, er B og B' invertible som matricer over \mathbb{R} . Således er

$$U = B'WB^{-1}, \quad W = B'^{-1}UB, \quad U' = BW'B'^{-1}, \quad W' = B^{-1}U'B'.$$

Substitueres U og U' i ovenstående ligninger, fås

$$BA = I - U'U = I - BW'WB^{-1}, \quad B'A' = I - UU' = I - B'WW'B'^{-1},$$

hvoraf der umiddelbart fås

$$I - W'W = B^{-1}(BA)B = AB, \quad I - WW' = B'^{-1}(B'A')B' = A'B',$$

hvilket betyder, at η_W er invertibel med $\eta_{W'}$ som invers (se også lemma 4.2.8).

At δ_U er en isomorfi, hvis η_W er en isomorfi, følger heraf, da δ_U er dss. η_{U^\top} og η_W er dss. δ_{W^\top} . ■

Korollar 4.7.2 Givet ligningen $UB = B'W$, så η_W er en isomorfi. Da findes U' , så $U'B = B'W$ og $\delta_{U'}$ er en isomorfi.

Bevis: Pga. korollar 4.2.5 kan vi w.l.o.g. antage, at B og B' er lig deres Smith normal former. Så lad $D = B$ og $D' = B'$ og skriv dem på formen

$$D = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} D'_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hvor $\det D_0, \det D'_0 \neq 0$. Lad k betegne dimensionen af $\ker D$ (som er lig dimensionen for $\ker D'$, da der gælder, at $\text{cok } D \cong \text{cok } D'$). Skriv U og W på tilsvarende blokform. Da er $U_{21} = 0$ og $W_{12} = 0$ ifølge lemma 4.2.7. Da $\text{cok } D_0$ og $\text{cok } D'_0$ er endelige grupper og afbildningen $\text{cok } D_0^{\text{T}} \ni [x] \mapsto [W_{11}^{\text{T}}x] \in \text{cok } D_0^{\text{T}}$ er injektiv, er $\eta_{W_{11}}: \text{cok } D_0^{\text{T}} \rightarrow \text{cok } D_0^{\text{T}}$ en isomorfi. Ifølge foregående lemma er således $\delta_{U_{11}}: \text{cok } D_0 \rightarrow \text{cok } D'_0$ også en isomorfi. Da $\text{cok } D = \text{cok } D_0 \oplus \mathbb{Z}^k$ og $\text{cok } D' = \text{cok } D'_0 \oplus \mathbb{Z}^k$, definerer $U' = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ klart en isomorfi $\delta_{U'}: \text{cok } D \rightarrow \text{cok } D'$ og der gælder oplagt, at $U'B = UB = B'W$. ■

Sætning 4.7.3 Lad $\mathcal{P}_2 = \{1, 2\}$ med $2 \not\equiv 1$ og lad der være givet matricer $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}_2}((m, n), \mathbb{Z})$ og $B' = \begin{pmatrix} B'_1 & X' \\ 0 & B'_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}_2}((m', n'), \mathbb{Z})$. Antag, at der er givet isomorfier $\delta_1: \text{cok } B_1 \rightarrow \text{cok } B'_1$ og $\eta: \text{cok } B_2^{\text{T}} \rightarrow \text{cok } B_2'^{\text{T}}$, således at $(\delta_1 \otimes \eta)([X]) = [X']$ i $\mathcal{C}(I - B'_1, I - B'_2)$. Da induceres en isomorfi fra $\mathcal{E}(B)$ til $\mathcal{E}(B')$. Mere specifikt findes isomorfier ξ_2 og δ , så vi har et kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccc} \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B \\ \cong \downarrow \xi_2 & & \cong \downarrow \delta_1 & & \cong \downarrow \delta \\ \ker B'_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B'_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B', \end{array}$$

hvor $\xi_2 = \xi_W$ for ethvert $W \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$ opfyldende $\eta_W = \eta^{-1}$ og $UB_2 = B'_2W$ for et $U \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$.

Bevis: Ifølge lemma 4.2.3(a) findes der $U_{11}, W_{11} \in \text{Mat}_{m' \times m}(\mathbb{Z})$, $U_{22}, W_{22} \in \text{Mat}_{n' \times n}(\mathbb{Z})$ og $R_{22}, V_{22} \in \text{Mat}_{n \times n'}(\mathbb{Z})$, således at

$$U_{11}B_1 = B'_1W_{11}, \quad U_{22}B_2 = B'_2W_{22}, \quad R_{22}B'_2 = B_2V_{22}, \quad \delta_{U_{11}} = \delta_1, \quad \eta_{W_{22}} = \eta^{-1}, \quad \eta_{V_{22}} = \eta.$$

Ifølge korollar 4.7.2 kan vi uden indskrænkelse antage, at $\delta_{U_{22}}$ er en isomorfi. Ifølge lemma 4.2.8 findes et $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{Z})$, så

$$I - V_{22}W_{22} = AB_2.$$

Og ifølge lemma 4.2.6 findes $C_1, C_2 \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{Z})$, så

$$X' - U_{11}XV_{22} = B'_1C_1 + C_2B'_2.$$

Ved at bruge ovenstående ligninger ses, at

$$X'W_{22} - U_{11}X(I - AB_2) = X'W_{22} - U_{11}XV_{22}W_{22} = B'_1C_1W_{22} + C_2B'_2W_{22} = B'_1C_1W_{22} + C_2U_{22}B_2.$$

Sæt

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & C_2U_{22} - U_{11}XA \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} W_{11} & -C_1W_{22} \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix},$$

da ses nemt af ovenstående, at

$$UB = \begin{pmatrix} U_{11}B_1 & U_{11}X + C_2U_{22}B_2 - U_{11}XAB_2 \\ 0 & U_{22}B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'_1W_{11} & X'W_{22} - B'_1C_1W_{22} \\ 0 & B'_2W_{22} \end{pmatrix} = B'W.$$

Ifølge lemma 4.3.2 induceres således en homomorfi fra $\mathcal{E}(B)$ til $\mathcal{E}(B')$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ker B_1 & \xrightarrow{\alpha} & \ker B & \xrightarrow{\beta} & \ker B_2 & \xrightarrow{\Delta} & \text{cok } B_1 & \xrightarrow{\lambda} & \text{cok } B & \xrightarrow{\mu} & \text{cok } B_2 \\ \downarrow \xi_{W_{11}} & & \downarrow \xi_W & & \cong \downarrow \xi_{W_{22}} & & \cong \downarrow \delta_{U_{11}=\delta_1} & & \cong \downarrow \delta_U & & \cong \downarrow \delta_{U_{22}} \\ \ker B'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \ker B' & \xrightarrow{\beta'} & \ker B'_2 & \xrightarrow{\Delta'} & \text{cok } B'_1 & \xrightarrow{\lambda'} & \text{cok } B' & \xrightarrow{\mu'} & \text{cok } B'_2, \end{array}$$

thi per antagelse er δ_1 og $\delta_{U_{22}}$ isomorfier, af lemma 4.2.8 følger, at $\xi_{W_{22}}$ er en isomorfi, da $\eta^{-1} = \eta_{W_{22}}$ er det, og af 5-lemmaet (se f.eks. [Fox02, 2.25(1)]) følger nu, at δ_U er en isomorfi. At $\xi_{W_{22}}$ ikke afhænger af valget af W_{22} følger af lemma 4.2.7. Vi mangler nu kun at vise, at $\mathcal{E}(B) \cong \mathcal{E}(B')$. Men dette følger umiddelbart af det lige viste samt lemma 4.3.3. ■

Bemærkning 4.7.4 Lad $\mathcal{P}_2 = \{1, 2\}$ med $2 \not\prec 1$ og lad $B = \begin{pmatrix} B_1 & X \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} B'_1 & X' \\ 0 & B'_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}_2}((m, n), \mathbb{Z})$ være givne matricer. Antag, at vi har $U, V \in GL_{\mathcal{P}_2}((m, n), \mathbb{Z})$, så $UBV = B'$. Da er

$$UBV = \begin{pmatrix} U_{11}B_1V_{11} & U_{11}B_1V_{12} + U_{11}XV_{22} + U_{12}B_2V_{22} \\ 0 & U_{22}B_2V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'_1 & X' \\ 0 & B'_2 \end{pmatrix} = B'.$$

Dvs. at $U_{11}B_1 = B'_1V_{11}^{-1}$ og $U_{22}^{-1}B'_2 = B_2V_{22}$. Således induceres isomorfier $\delta_{U_{11}}: \text{cok } B_1 \rightarrow \text{cok } B'_1$ og $\eta_{V_{22}}: \text{cok } B_2^{\top} \rightarrow \text{cok } B'_2{}^{\top}$, således at

$$X' - U_{11}XV_{22} = U_{11}B_1V_{12} + U_{12}B_2V_{22} = B'_1V_{11}^{-1}V_{12} + U_{12}U_{22}^{-1}B'_2.$$

Det følger således af lemma 4.2.6, at $[U_{11}XV_{22}] = [X']$ i $\mathcal{C}(I - B'_1, I - B'_2)$ – og dermed er $(\delta_{U_{11}} \otimes \eta_{V_{22}})([X]) = [X']$ i $\mathcal{C}(I - B'_1, I - B'_2)$.

Vi har således vist, at $GL_{\mathcal{P}_2}$ -ækvivalens mellem B og B' medfører isomorfi mellem $([X], \text{cok } B_1, \text{cok } B_2^{\top})$ og $([X'], \text{cok } B'_1, \text{cok } B'_2{}^{\top})$. Vi har i foregående sætning set, at hvis $([X], \text{cok } B_1, \text{cok } B_2^{\top})$ og $([X'], \text{cok } B'_1, \text{cok } B'_2{}^{\top})$ er isomorfe, så er $\mathcal{E}(B)$ og $\mathcal{E}(B')$ også isomorfe (og dermed er også K -vævene $K(B)$ og $K(B')$ isomorfe). Det følger i øvrigt af teorem 4.6.12, at disse tre falder sammen, hvis B og B' har indgange fra $\{-1, 0, 1\}$. Et naturligt spørgsmål er derfor: gælder nogen af de omvendte implikationer generelt? Det er klart, at ikke begge de omvendte implikationer gælder.

Sæt $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ og $\mathcal{P}_2 = \{1, 2\}$, $1 \succeq 2$. Det indses let, at der ikke findes nogen $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens fra B til B' (jf. bemærkning 4.6.4 samt [BH03, example 7.1]). Bemærk, at vi har isomorfier $\delta: \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \ni [x] \mapsto [2x] \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ og $\eta: \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \ni [x] \mapsto [x] \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, at $\mathcal{C}(I - 5, I - 5) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ og at $\delta \otimes \eta$ afbilder klassen $[1]$ over i klassen $[2]$. Således er det klart, at isomorfi af $([X], \text{cok } B_1, \text{cok } B_2^{\top})$ og $([X'], \text{cok } B'_1, \text{cok } B'_2{}^{\top})$ ikke generelt medfører $GL_{\mathcal{P}_2}$ -ækvivalens. Den anden implikation har jeg endnu hverken bevist eller modbevist, men hvis der findes et modeksempel, så skal dette findes blandt de matricer, hvis diagonalblokke har indgange ikke kun fra $\{-1, 0, 1\}$ og hvis determinant er nul (pga. [Hua95, lem.3.4]).

4.8 Bemærkninger

Afsnit 4.1: Lemma 4.1.2 er fra [Hua01b, thm.2.1].

Afsnit 4.2: Lemma 4.2.3 og definition 4.2.4 er omtrent [Hua01a, lem.2.1 og def.2.2]. Lemma 4.2.6 stammer fra nogle – ikke beviste – observationer på s. 189–190 i [Hua95].

Afsnit 4.3: Lemma 4.3.3 er fra [Hua01b, prop.3.9].

Afsnit 4.4 er faktisk bare en lang definition. Dette er essentielt det samme som i [Boy02] og [BH03]³, men jeg har selv fundet på at definere dette ved hjælp af induktive grænser.

Afsnit 4.5: Definitionen af K -vævet er taget fra [BH03]. Sætning 4.5.3 og 4.5.5 svarer til hhv. [BH03, prop.3.2 og 3.8].

Afsnit 4.6 svarer i det store hele til [BH03, §§4–6] – dog med mange flere detaljer. Mere konkret svarer lem. 4.6.5, sætn. 4.6.6, lem. 4.6.11 og teorem 4.6.12 til [BH03, prop.4.1(1), thm.4.4, lem.6.1 hhv. cor.4.7].

Det øvrige i kapitlet er mere og mindre mit.

³Der er dog det beklagelige problem med definitionen heri, at den er forkert. Af en eller anden grund har forfatterne glemt at medtage kravet, om at *alle* diagonalblokkene skal have determinant 1 i definitionen af $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens.

Kapitel 5

To isomorfisætninger for $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K}$

Her i kapitlet vises to isomorfisætninger. Dette gøres vha. et klassifikationsresultat af Mike Boyle for SFT op til FE. Der vises, at for $\{0, 1\}$ -matricer A og A' , som opfylder betingelse (II) og har en „tilstrækkelig pæn blokstruktur“ (mere præcis $A \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(II)}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $A' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(II)}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$), gælder at $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$, hvis $(I - A)$ er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent med $(I - A')$. Ved hjælp af hovedresultatet fra foregående kapitel, teorem 4.6.12, formuleres denne isomorfisætning også vha. K -vævet.

5.1 Indledning

Antagelse 5.1.1 I indeværende kapitel lader vi \succeq være en ordensrelation på $\mathcal{P} := \{1, \dots, N\}$, hvor $N \in \mathbb{N}$, som opfylder, at

$$i \succeq j \Rightarrow i \leq j$$

for alle $i, j \in \mathcal{P}$, hvor \leq betegner den sædvanlige ordning på \mathbb{Z} .

Bemærkning 5.1.2 Antag først, at $N = 1$. Lad $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(n, \mathbb{Z})$ og $B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(n', \mathbb{Z})$. Af eksistensen af Smith normal formen ses umiddelbart, at B er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent med B' , netop hvis $\text{cok } B \cong \text{cok } B'$ samt at B er $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent med B' , netop hvis $\text{cok } B \cong \text{cok } B'$ og $\det B = \det B'$.

Antag nu, at $N \in \mathbb{N}$ er vilkårlig. Lad endvidere $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^N$, $B \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$. Da følger umiddelbart af ovenstående observation, at en nødvendig betingelse, for at B er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent (hhv. $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent) med B' , er, at $\text{cok } B_{ii} \cong \text{cok } B'_{ii}$, $i \in \mathcal{P}$ (hhv. $\det B_{ii} = \det B'_{ii}$ og $\text{cok } B_{ii} \cong \text{cok } B'_{ii}$ for $i \in \mathcal{P}$).

Lad os nu betragte tilfældet, hvor $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ kan skrives på blokformen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2N} \\ 0 & 0 & A_{33} & \cdots & A_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix},$$

hvor hver af diagonalblokkene A_{11}, \dots, A_{NN} er irreducible ikke-permutationsmatricer og $\Gamma_A \cong \mathcal{P}$ via identiteten (og tilsvarende for A'). Da er ovenstående en god motivation for at undersøge, hvorvidt $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens mellem $(I - A)$ og $(I - A')$ klassificerer disse matricer op til FE. Og analogt, hvorvidt $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens mellem $(I - A)$ og $(I - A')$ klassificerer de tilhørende Cuntz-Krieger algebraer op til stabil isomorfi. Og det ser faktisk ud til at være tilfældet – modulo en permutation af $\Gamma_{A'}$. Dette leder frem til følgende definition.

Definition 5.1.3 Lad der være givet et $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$. Vi lader da $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(II)}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ betegne mængden af matricer $A \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, som opfylder, at

- Alle indgange i A er ikke-negative,
- Hver diagonalblok, A_{ii} , $i \in \mathcal{P}$, er essentielt irreducibel,
- A opfylder betingelse (II) (dvs. at for hvert $i \in \mathcal{P}$ er den maksimale irreducible principale undermatrix af A_{ii} ikke en permutationsmatrix),
- For alle $i, j \in \mathcal{P}$ med $i \succeq j$ findes et index i' , som forekommer på en løkke i A_{ii} , og et index j' , som forekommer på en løkke i A_{jj} , og et $k \in \mathbb{N}$, så $A^k(i', j') > 0$ (og således er Γ_A ordensisomorf med \mathcal{P} via identiteten).

Bemærk, at $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(II)}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ er en delmængde af mængden $\mathfrak{M}_{\mathcal{P},+}^{\circ}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ defineret i [Boy02, def.2.2].

Bemærkning 5.1.4 Det har i lang tid været min opfattelse, at der for enhver matrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$, som opfylder betingelse (II), findes en permutationsmatrix $P \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$, således at $PAP^{-1} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ for et passende $N \in \mathbb{N}$, en passende ordning \succeq på \mathcal{P} og et passende $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$. Mike Boyles og Danrun Huang's artikler har givet mig indtryk af dette (uden at de konkret har skrevet det).

Det er imidlertid nemt at finde et eksempel, hvor dette ikke kan lade sig gøre: Antag, at vi har fire irreducibilitetskomponenter, hvilke vi vil benævne $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ samt en overgangstilstand, som vi benævner t . Antag, at de tilladte overgange er fra γ_1 til t , fra γ_2 til t , fra t til γ_3 samt fra t til γ_4 (og ikke andre). Da ses nemt, at vi ikke kan blokke nabomatricen, således at blokstrukturen præcis afspejler ordningen \succeq på Γ_A .

M. Boyle har dog gjort mig opmærksom på, at hvis $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylder betingelse (II), så kan vi dog altid finde en matrix tilhørende $\mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ for passende \mathbf{n} og \mathcal{P} , hvis tilhørende SFT er topologisk konjugeret med det til A hørende (vha. blokrepræsentationer af skiftrummet). Af flere forskellige grunde har jeg valgt, ikke at gøre mere ud af dette. En god grund er selvfølgelig, at omfanget af specialerapporten allerede er ret stort, en anden grund er, at der kun er kort tid tilbage. Men selv synes jeg egentlig, at den bedste grund skal findes i næste kapitel, hvor klassifikationsresultatet præsenteres. Der vælger jeg, kun at klassificere de Cuntz-Krieger algebraer, som fremkommer fra en $\{0, 1\}$ -nabomatrix, som opfylder betingelse (II) og ingen overgangstilstande har. For selv om resultatet bliver lidt mindre generelt, synes jeg, at det nu er blevet betydeligt nemmere at forstå. Dette hænger sammen med, at hvis der findes overgangstilstande, så skal vi medtage forskellige måtninger, når vi skal beskrive idealstrukturen og de afbildninger den inducerer i K -teori. Disse måtninger kan blive ret overlappende og være ret tekniske at arbejde med, således at det overskygger hele idéen med det, vi foretager os.

Da nabomatricerne for de irreducible komponenter antages at være ikke-permutationsmatricer, følger af [Boy02, thm.3.1], at

Teorem 5.1.5 (Boyle) *Givet to matricer $A \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $A' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$. Da gælder der, at $A \sim_{FE} A'$, hvis og kun hvis der findes en permutationsmatrix P' (med samme størrelse som A'), således at $P'A'P'^{-1} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$ og så $(I - A)$ og $(I - P'A'P'^{-1})$ er $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente.*

Heraf fås umiddelbart følgende korollar:

Korollar 5.1.6 *Givet $A \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $A' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$ med indgange fra $\{0, 1\}$. Hvis der findes en $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens fra $(I - A)$ til $(I - A')$, så er $A \sim_{FE} A'$.*

5.2 Isomorfisætningerne

Vi minder om, at vi i definition 3.1.1 har defineret to matricer $A_- \in \text{Mat}_{n+2}(\{0, 1\})$ og $A_{\sim} \in \text{Mat}_{n+3}(\{0, 1\})$ for hver given matrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$. Ved at bruge, at $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_{2_-}$ (se lemma 3.1.1), har Mikael Rørdam – i beviset for thm. 7.2 i appendixet i [Rør95] – vist følgende

Lemma 5.2.1 *Der findes en separabel C^* -algebra \mathfrak{E} med enhed $\mathbb{1}_{\mathfrak{E}}$, en projektion $e \in \mathfrak{E}$ og partielle isometrier s_1, s_2, t_1, t_2, t_3 og t_4 i \mathfrak{E} – alle forskellige fra nul – således at $\mathfrak{E} = C^*(s_1, s_2, e) = C^*(t_1, t_2, t_3, t_4, e)$ og*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathfrak{E}} &= t_1 t_1^* + t_2 t_2^* + t_3 t_3^* + t_4 t_4^*, \\ t_1^* t_1 &= t_1 t_1^* + t_2 t_2^*, \\ t_2^* t_2 &= t_1 t_1^* + t_2 t_2^* + t_3 t_3^*, \\ t_3^* t_3 &= t_2 t_2^* + t_3 t_3^* + t_4 t_4^*, \\ t_4^* t_4 &= t_3 t_3^* + t_4 t_4^*, \\ \mathbb{1}_{\mathfrak{E}} &= s_1 s_1^* + s_2 s_2^*, \\ \mathbb{1}_{\mathfrak{E}} &= s_1^* s_1 = s_2^* s_2, \\ e &= e s_1 = s_1 e, \\ e &= e t_1 = t_1 e. \end{aligned}$$

Bemærk, at s_1 og s_2 er frembringerne for \mathcal{O}_2 og t_1, t_2, t_3 og t_4 er frembringerne for \mathcal{O}_{2_-} . Der gælder, at $s_2 s_2^$ er (Murray-von Neumann) ækvivalent med $t_2 t_2^*$ i \mathfrak{E} . Endvidere er $(e, s_1 s_1^* - e, s_2 s_2^*)$ og $(e, t_1 t_1^* - e, t_2 t_2^*, t_3 t_3^*, t_4 t_4^*)$ to sæt bestående af indbyrdes ortogonale projektioner – således er disse specielt lineært uafhængige sæt.*

Bevis: *Første del:* Lad s_1, s_2 hhv. t_1, t_2, t_3, t_4 betegne de kanoniske frembringere for \mathcal{O}_2 hhv. \mathcal{O}_{2_-} . Lad τ og τ_- være rene tilstande på hhv. \mathcal{O}_2 og \mathcal{O}_{2_-} , som opfylder, at $\tau(s_1) = 1$ og $\tau_-(t_1) = 1$. Sådanne findes ifølge lemma B.7 (da $1 \in \text{Sp}(s_1)$ og $1 \in \text{Sp}(t_1)$), hvilket nemt kan indses f.eks. ved at lave konkrete (tro) repræsentationer af \mathcal{O}_2 og \mathcal{O}_{2_-} , i hvilke s_1 og t_1 har 1 som egenverdi. Lad π og π_- være de tilsvarende GNS-repræsentationer på Hilbert rummet ℓ_2 (hvilket vi w.l.o.g. kan antage pga. lemma B.11 og lemma

B.9, da $s_1^*s_1$ og $t_1^*t_1$ er uendelige – se nedenunder). Det er klart, at $\pi(\mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}) = \pi_-(\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2_-}}) = \mathbb{1}_{\mathbb{B}(\ell_2)}$, da $(\mathbb{1}_{\mathbb{B}(\ell_2)} - \pi(\mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}))\pi(a) = 0$ for alle $a \in \mathcal{O}_2$, $(\mathbb{1}_{\mathbb{B}(\ell_2)} - \pi_-(\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2_-}}))\pi_-(a) = 0$ for alle $a \in \mathcal{O}_{2_-}$ og GNS-repræsentationer er cykliske.

Desuden kan vi uden indskrænkelse antage, at τ og τ_- kan repræsenteres som vektor tilstande på den samme vektor. Lad e betegne den 1-dimensionale projektion på det lineære underrum frembragt af denne vektor. Følgelig er $e\pi(s_1) = \pi(s_1)e = e$ og $e\pi_-(t_1) = \pi_-(t_1)e = e$. Vi viser kun den ene lighed – de andre vises tilsvarende. Lad $h_\tau \in \ell_2$ betegne den kanoniske (enheds)-vektor for repræsentationen (ℓ_2, π) . Af [Mur90, thm.3.3.2] følger umiddelbart, at $1 = \tau(s_1) = \tau(s_1^*) = \tau(s_1^*s_1)$. Følgelig er $\tau((\mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} - s_1)^*(\mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} - s_1)) = 0$, og ifølge [Mur90, thm.3.3.7(1)] er således $\tau(a(\mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} - s_1)) = 0$ for alle $a \in \mathcal{O}_2$. Følgelig gælder der for alle $a \in \mathcal{O}_2$, at $\langle (e - \pi(s_1)e)h_\tau, \pi(a)h_\tau \rangle = \tau(a^*(\mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} - s_1)) = 0$. Dvs. $e = \pi(s_1)e$ (da $e - \pi(s_1)e$ er nul på $\{h_\tau\}^\perp$).

Da \mathcal{O}_2 og \mathcal{O}_{2_-} er simple og τ og τ_- er rene tilstande, er (ℓ_2, π) og (ℓ_2, π_-) tro irreducible repræsentationer. Ifølge [Mur90, thm.2.4.9] er således

$$\mathfrak{E} := C^*(\pi(\mathcal{O}_2), \mathbb{K}) = C^*(\pi(s_1), \pi(s_2), e), \quad \mathfrak{E}_- := C^*(\pi_-(\mathcal{O}_{2_-}), \mathbb{K}) = C^*(\pi_-(t_1), \pi_-(t_2), \pi_-(t_3), \pi_-(t_4), e).$$

Bemærk, at $s_1^*s_1 = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}$ og $t_1^*t_1$ er uendelige projektioner, thi $s_1s_1^* \lesssim s_1^*s_1 = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2}$ og $t_1t_1^* \lesssim t_1^*t_1$. Ifølge lemma B.9 og B.10 er derfor hverken $\pi(s_1^*s_1)$ eller $\pi_-(t_1^*t_1)$ kompakte operatorer. Følgelig er hverken $\pi(s_1)$ eller $\pi_-(t_1)$ kompakte.

Det er klart, at \mathbb{K} er et lukket ideal i \mathfrak{E} og i \mathfrak{E}_- . Lad $\kappa: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}/\mathbb{K}$ og $\kappa_-: \mathfrak{E}_- \rightarrow \mathfrak{E}_-/\mathbb{K}$ betegne kvotientafbildningerne. Lad $\varphi: \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathfrak{E}/\mathbb{K}$ betegne *-homomorfien $\kappa \circ \pi$ og lad ligeledes $\varphi_-: \mathcal{O}_{2_-} \rightarrow \mathfrak{E}_-/\mathbb{K}$ betegne *-homomorfien $\kappa_- \circ \pi_-$. Det er klart, at φ og φ_- er surjektive (da der om frembringerne gælder, at $e \in \mathbb{K}$, $s_1, s_2 \in \mathcal{O}_2$ og $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathcal{O}_{2_-}$). Da $s_1 \notin \mathbb{K}$ og $t_1 \notin \mathbb{K}$, er hverken φ ej heller φ_- nulafbildningen. Følgelig er *-homomorfierne φ og φ_- også injektive, da $\ker \varphi$ (hhv. $\ker \varphi_-$) er et lukket ideal i den simple C^* -algebra \mathcal{O}_2 (hhv. \mathcal{O}_{2_-}). Altså er φ og φ_- *-isomorfier. Vi har således følgende kommutative (heloptrukne) diagrammer med exakte rækker

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{E} & \xrightarrow{\kappa} & \mathfrak{E}/\mathbb{K} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & \cong \uparrow \varphi = \kappa \circ \pi & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{E} & \xleftarrow[\varphi^{-1} \circ \kappa]{\pi} & \mathcal{O}_2 \longrightarrow 0, \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{E}_- & \xrightarrow{\kappa_-} & \mathfrak{E}_-/\mathbb{K} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & \cong \uparrow \varphi_- = \kappa_- \circ \pi_- & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{E}_- & \xleftarrow[\varphi_-^{-1} \circ \kappa_-]{\pi_-} & \mathcal{O}_{2_-} \longrightarrow 0, \end{array}$$

hvor de to nederste oplagt er split-exakte. Fra teorem 3.1.3 ved vi, at der findes en *-isomorfi $\phi: \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathcal{O}_{2_-}$. Heraf konstrueres umiddelbart følgende kommutative diagram med (split)-exakte rækker

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{E}_- & \xleftarrow[\varphi_-^{-1} \circ \kappa_-]{\pi_-} & \mathcal{O}_{2_-} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & \cong \uparrow \phi & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{E} & \xleftarrow[\phi^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \kappa_-]{\pi \circ \phi} & \mathcal{O}_2 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Sæt $\rho := \varphi^{-1} \circ \kappa$ og $\rho_- := \varphi_-^{-1} \circ \kappa_-$. Følgelig har vi følgende trivielle udvidelser:

$$0 \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{E} \xrightleftharpoons[\rho]{\pi} \mathcal{O}_2 \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{E}_- \xrightleftharpoons[\phi^{-1} \circ \rho_-]{\pi_- \circ \phi} \mathcal{O}_{2_-} \longrightarrow 0$$

af \mathcal{O}_2 med \mathbb{K} . Voiculescus sætning, teorem B.15, giver nu, at der findes en isomorfi $\psi: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}_-$, således at $\psi(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ og vi har følgende kommutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{E} & \xleftarrow[\rho]{\pi} & \mathcal{O}_2 \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \psi|_{\mathbb{K}} & & \cong \downarrow \psi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{E}_- & \xleftarrow[\phi^{-1} \circ \rho_-]{\pi_- \circ \phi} & \mathcal{O}_{2_-} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Desværre er det ikke sikkert, at $\psi(e) = e$. Vi har dog klart, at $\psi(e)$ er en rang et projektion i \mathbb{K} . Lad $h, h' \in \ell_2$ være enhedsvektorer, som opfylder, at $e(\ell_2) = \mathbb{C}h$ og $\psi(e)(\ell_2) = \mathbb{C}h'$. Sæt $\mathfrak{H}_0 := \text{span}\{h, h'\}$, da er \mathfrak{H}_0 et et- eller todimensionalt lukket underrum af ℓ_2 . Klart findes en partiel isometri $V: \ell_2 \rightarrow \ell_2$, således at $VV^*(\ell_2) = \mathfrak{H}_0 = V^*V(\ell_2)$ og $V(h') = h$. Sæt $U = \mathbb{1}_{\mathbb{B}(\ell_2)} - V^*V + V = \mathbb{1}_{\mathbb{B}(\ell_2)} - VV^* + V$. Da er ret oplagt, at U er en unitær operator og at denne tilhører $\mathbb{K} + \mathbb{C}\mathbb{1}_{\mathbb{B}(\ell_2)}$. Da $U\psi(e)(h') = h = eU(h')$ og $U\psi(e)(k) = 0 = eU(k)$ for alle $k \in \{h'\}^\perp$, er

$$(\text{Ad } U)(\psi(e)) = U\psi(e)U^* = e.$$

Af lemma B.17 følger således, at $\psi' := (\text{Ad } U)|_{\mathfrak{E}_-}: \mathfrak{E}_- \rightarrow \mathfrak{E}_-$ er en isomorfi, som opfylder, at $\psi'(\psi(e)) = e$. Således er $\psi' \circ \psi$ en isomorfi af \mathfrak{E} på \mathfrak{E}_- , som afbilder e på e .

Anden del: Sæt $v := t_2(t_1^* + t_3)s_2^*$. Da er ifølge lemma 2.2.4

$$\begin{aligned} vv^* &= t_2(t_1^* + t_3)(t_1 + t_3^*)t_2^* = t_2(t_1^*t_1 + t_3t_3^*)t_2^* = t_2(t_1t_1^* + t_2t_2^* + t_3t_3^*)t_2^* = t_2(\mathbb{1}_{\mathfrak{e}} - t_4t_4^*)t_2^* \\ &= t_2t_2^* \\ v^*v &= s_2(t_1 + t_3^*)(t_1t_1^* + t_2t_2^* + t_3t_3^*)(t_1^* + t_3)s_2^* = s_2(t_1 + t_3^*)(t_1^*t_1 + t_3t_3^*)(t_1^* + t_3)s_2^* \\ &= s_2(t_1t_1^*t_1^* + t_3^*t_3t_3^*)s_2^* = s_2(t_1t_1^* + t_3^*t_3)s_2^* = s_2(t_1t_1^* + t_2t_2^* + t_3t_3^* + t_4t_4^*)s_2^* = s_2\mathbb{1}_{\mathfrak{e}}s_2^* \end{aligned}$$

Det verificeres let, at de to sæt består af indbyrdes ortogonale projektioner ved at bruge ligningen $es_1 = s_1e = et_1 = t_1e = e$ (det er klart, at e er forskellig fra både $s_1s_1^*$ og $t_1t_1^*$). ■

Følgende lemma er ret direkte inspireret af D. Huang's blok-skift lemmaer i [Hua95], som igen bærer præg af M. Rørdams udførelse af en ide af J. Cuntz i appendixet i [Rør95]. Det udslagsgørende skridt, som gjorde, at jeg blev i stand til at udvide klassifikationen og benytte M. Boyles og D. Huang's resultater, var, at jeg beviste (c) og (d) i følgende lemma.

Lemma 5.2.2 *Givet $A \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ med indgange fra $\{0, 1\}$. Skriv A på blokformen*

$$A = \begin{pmatrix} M & X & Y \\ 0 & Q & Z \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix},$$

hvor Q er diagonalblokken $A_{i_0i_0}$, $i_0 \in \mathcal{P}$ – og således specielt essentielt irreducibel. Sæt

$$A_* = \begin{pmatrix} M & X_* & Y \\ 0 & Q_* & Z_* \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} \text{ og } A_{**} = \begin{pmatrix} M & X_{**} & Y \\ 0 & Q_{**} & Z_{**} \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix},$$

hvor $Q_* = Q_{\sim}$, $X_* = (X \ 0)$, $Z_* = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q_{**} = (Q_*)_- = (Q_{\sim})_-$, $X_{**} = (X_* \ 0) = (X \ 0)$ og $Z_{**} = \begin{pmatrix} Z_* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$ (der tilføjes et „passende antal nuller“). Mao. er

$$A_* = \begin{pmatrix} M & X & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & Y \\ 0 & Q & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & Z \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}, \quad A_{**} = \begin{pmatrix} M & X & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & Y \\ 0 & Q & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & Z \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}.$$

Da gælder der:

(a) $A_* \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}_*, \mathbb{Z})$ og $A_{**} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}_{**}, \mathbb{Z})$, hvor $\mathbf{n}_* = (n_1, \dots, n_{i_0-1}, n_{i_0} + 3, n_{i_0+1}, \dots, n_N)$ og $\mathbf{n}_{**} = (n_1, \dots, n_{i_0-1}, n_{i_0} + 5, n_{i_0+1}, \dots, n_N)$.

(b) $\mathcal{O}_{A_*} \cong \mathcal{O}_{A_{**}}$.

(c) $(I - A)$ er $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent med $(I - A_{**})$.

(d) Der findes invertible matricer $U_1, V_1 \in \text{Mat}_{n_{i_0}+3}(\mathbb{Z})$ med $\det U_1 = 1$ og $\det V_1 = -1$, således at

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} (I - A_*) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & V_1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - M & -X & 0 & -Y \\ 0 & I - Q & 0 & -Z \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I - N \end{pmatrix}.$$

Så $(I - A)$ er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent med $(I - A_*)$ med disse specielle matricer, som inducerer denne ækvivalens.

(e) $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A_*} \otimes \mathbb{K}$.

Tilsvarende resultater gælder også hvis M eller N antages „tom“.

Bevis: (a): Dette indses nemt.

(b): Denne del af lemmaet – at $\mathcal{O}_{A_*} \cong \mathcal{O}_{A_{**}}$ – er bevist i [Hua95, lem.4.3]. Jeg gentager beviset her:

Find \mathfrak{E} , $s_1, s_2, t_1, t_2, t_3, t_4$ og e i hht. lemma 5.2.1. Lad m, q og n betegne størrelsen af hhv. M, Q og N og sæt $k := m + q + n$. Sæt $\mathfrak{A} := \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \oplus \mathfrak{E}$ (med k kopier af \mathbb{C}) og lad f_1, \dots, f_k betegne projektionerne på hvert af disse k kopier af \mathbb{C} . Da er f_1, \dots, f_k indbyrdes ortogonale projektioner.

Repræsenter \mathfrak{A} på et uendeligdimensionalt, separabelt Hilbert rum, \mathfrak{H} , således at alle projektioner i \mathfrak{A} på nær nulprojektion er uendeligdimensionale (se lemma B.13). Således er alle projektioner i \mathfrak{A} , som er forskellige fra nulprojektion, (Murray-von Neumann) ækvivalente i $\mathbb{B}(\mathfrak{H})$.

Definér

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \vec{s}_* = \begin{pmatrix} f_{m+1} \\ \vdots \\ f_{m+q} \\ e \\ s_1 s_1^* - e \\ s_2 s_2^* \end{pmatrix}, \vec{s}_{**} = \begin{pmatrix} f_{m+1} \\ \vdots \\ f_{m+q} \\ t_1 t_1^* - e \\ t_2 t_2^* \\ t_3 t_3^* \\ t_4 t_4^* \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} f_{m+q+1} \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}.$$

Ifølge lemma 5.2.1 er $(f_1, \dots, f_k, e, s_1 s_1^* - e, s_2 s_2^*)$ og $(f_1, \dots, f_k, e, t_1 t_1^* - e, t_2 t_2^*, t_3 t_3^*, t_4 t_4^*)$ to sæt af indbyrdes ortogonale projektioner, som specielt er to lineært uafhængige sæt. Således findes der partielle isometrier $x_1, \dots, x_{k+3} \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ (da A og dermed A_* og A_{**} er ikke-degenererede), således at

$$\begin{pmatrix} x_1^* x_1 \\ \vdots \\ x_{k+3}^* x_{k+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & X_* & Y \\ 0 & Q_* & Z_* \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{s}_* \\ \vec{t} \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} x_1 x_1^* \\ \vdots \\ x_{k+3} x_{k+3}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{s}_* \\ \vec{t} \end{pmatrix}$$

og ligeledes findes partielle isometrier $y_1, \dots, y_{k+5} \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$, således at

$$\begin{pmatrix} y_1^* y_1 \\ \vdots \\ y_{k+5}^* y_{k+5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & X_{**} & Y \\ 0 & Q_{**} & Z_{**} \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{s}_{**} \\ \vec{t} \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} y_1 y_1^* \\ \vdots \\ y_{k+5} y_{k+5}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{s}_{**} \\ \vec{t} \end{pmatrix}.$$

Bemærk, at $\mathbb{1}_{\mathfrak{A}} = x_1 x_1^* + \cdots + x_{k+3} x_{k+3}^* = y_1 y_1^* + \cdots + y_{k+5} y_{k+5}^*$. Ifølge (a) opfylder A_* og A_{**} (II) og dermed også (I). Af teorem 2.5.8 følger således, at $\mathfrak{B}_1 := C^*(x_1, \dots, x_{k+3}) \cong \mathcal{O}_{A_*}$ og $\mathfrak{B}_2 := C^*(y_1, \dots, y_{k+5}) \cong \mathcal{O}_{A_{**}}$ for ethvert sådant valg af x_1, \dots, x_{k+3} og y_1, \dots, y_{k+5} , som opfylder ovenstående.

Det er således nok at vise, at vi kan vælge x_i 'erne og y_i 'erne, således at $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$.

Vha. relationerne for s_1, s_2 og e vises nemt, at vi kan vælge $x_{m+q+2} = s_1 - e$ og $x_{m+q+3} = s_2$. Således er $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_1$ (da elementerne $x_i x_i^* = f_i, i = 1, \dots, m+q, x_{i+3} x_{i+3}^* = f_i, i = m+q+1, \dots, k, x_{m+q+1} x_{m+q+1}^* = e, x_{m+q+2} = s_1 - e, x_{m+q+3} = s_2$ tilsammen frembringer \mathfrak{A}).

Vha. relationerne for t_1, t_2, t_3, t_4 og e vises nemt, at vi kan vælge $y_{m+q+2} = t_1 - e, y_{m+q+3} = t_2, y_{m+q+4} = t_3$ og $y_{m+q+5} = t_4$. Således er $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_2$ (da elementerne $y_i y_i^* = f_i, i = 1, \dots, m+q, y_{i+5} y_{i+5}^* = f_i, i = m+q+1, \dots, k, y_{m+q+1} y_{m+q+1}^* = e, y_{m+q+2} = t_1 - e, y_{m+q+3} = t_2, y_{m+q+4} = t_3, y_{m+q+5} = t_4$ tilsammen frembringer \mathfrak{A}). Endvidere kan vi uden indskrænkelse vælge $y_i = x_i$ for $i = 1, \dots, m$ og $y_{m+q+5+i} = x_{m+q+3+i}$ for $i = 1, \dots, n$. Nu mangler vi kun at gøre valg for de resterende $q+1$ y_i 'er for at sikre, at $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$.

Ifølge lemma 5.2.1 er $s_2 s_2^*$ (Murray-von Neumann) ækvivalent med $t_2 t_2^*$. Ifølge lemma B.12 findes således partielle isometrier $u_{m+1}, \dots, u_{m+q+1}$ i \mathfrak{A} , så $u_i u_i^* = x_i^* x_i$ for $i = m+1, \dots, m+q+1$ og

$$u_i^* u_i = t_2 t_2^* + \sum_{j=1}^q Q(i-m, j) f_{m+j} + \sum_{j=1}^n Z(i-m, j) f_{m+q+j} \text{ for } i = m+1, \dots, m+q,$$

$$u_{m+q+1}^* u_{m+q+1} = t_2 t_2^* + f_{m+1} + \cdots + f_{m+q}.$$

Sæt $y_i = x_i u_i$ for $i = m+1, \dots, m+q+1$ (da er $y_i y_i^* = x_i u_i u_i^* x_i^* = x_i x_i^* x_i x_i^* = x_i x_i^*$ og $y_i^* y_i = u_i^* x_i^* x_i u_i = u_i^* u_i u_i^* u_i = u_i^* u_i$, så y_i 'erne opfylder, det de skal). Da $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$, er $y_i = x_i u_i \in \mathfrak{B}_1$ og $x_i = x_i x_i^* x_i = x_i u_i u_i^* = y_i u_i^* \in \mathfrak{B}_2$ for $i = m+1, \dots, m+q+1$. Således er $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$, da

$$x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m,$$

$$x_{m+1}, y_{m+1}, \dots, x_{m+q+1}, y_{m+q+1} \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2,$$

$$x_{m+q+2}, x_{m+q+3}, y_{m+q+2}, y_{m+q+3}, y_{m+q+4}, y_{m+q+5} \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2,$$

$$x_{m+q+4} = y_{m+q+6}, x_{m+q+5} = y_{m+q+7}, \dots, x_{k+3} = y_{k+5}.$$

(c): Definér A_0 , således at $I - A_0 = \begin{pmatrix} I-M & -X & 0 & -Y \\ 0 & I-Q & 0 & -Z \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I-N \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ og $V_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$.

Da er

$$U_0(I - A_0)V_0 = \begin{pmatrix} I - M & -X & 0 & -Y \\ 0 & I - Q & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & -Z \\ 0 & \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I - N \end{pmatrix} = I - A_{**}.$$

Der gælder klart, at $U_0, V_0 \in SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}_{**}, \mathbb{Z})$.

(d): Definér $U_1, V_1 \in \text{Mat}_{q+3}(\mathbb{Z})$ ved, at

$$U_1 = \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ og } V_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Da er

$$U_1(I - Q_*)V_1 = \begin{pmatrix} I - Q & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad U_1Z_* = Z_*, \quad X_*V_1 = X_*.$$

Det ønskede indses nu nemt ved at gange matricerne sammen.

(e): Der er i (c) vist, at $(I - A)$ er $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent med $(I - A_{**})$. Ifølge korollar 5.1.6 er således $A \sim_{FE} A_{**}$. Da den stabiliserede Cuntz-Krieger algebra er en invariant af SFT op til FE, er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A_{**}} \otimes \mathbb{K}$. Da der i del (b) er vist, at $\mathcal{O}_{A_*} \cong \mathcal{O}_{A_{**}}$, følger det ønskede umiddelbart.

Den sidste påstand ses nemt ved at gå gennem beviset en gang til. ■

Følgende er et hovedresultat i specialet. Bevis-idéen ligner en del den, som D. Huang har brugt for andre Cuntz-Krieger algebraer.

Teorem 5.2.3 Givet $A \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(II)}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $A' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(II)}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$ med indgange fra $\{0, 1\}$. Hvis $B = I - A$ er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent med $B' = I - A'$, så er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$.

Bevis: Antag, at $B = I - A$ er $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent med $B' = I - A'$. Altså findes $\mathbf{r} \geq \mathbf{n}, \mathbf{n}'$ og $U, V \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, \mathbb{Z})$, så $U\iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(B)V = \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}'}(B')$. Sæt $B_0 = \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}}(B)$ og $B'_0 = \iota_{\mathbf{r}, \mathbf{n}'}(B')$. Da er $UB_0V = B'_0$. Vi ønsker først at vise, at vi w.l.o.g. kan antage, at alle diagonalblokke i U og V har determinant 1. Af korollar 5.1.6 fås så, at $A \sim_{FE} A'$. Dette gøres ved induktion. Givet $i \in \{1, \dots, N\}$ og antag, at $\det(U_{jj}) = \det(V_{jj}) = 1$ for alle $j \in \mathbb{N}$ med $j < i$. Vi vil så vise, at der findes en matrix $A'' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(II)}(\mathbf{n}'', \mathbb{Z})$, således at $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A''} \otimes \mathbb{K}$ og så der findes en $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens fra $(I - A'')$ til $(I - A')$, hvor determinanten af de første i diagonalblokke i hver af $GL_{\mathcal{P}}$ -matricerne, som inducerer ækvivalensen, er 1. Vi betragter diagonalblok i og deler op i 3 tilfælde:

Tilfælde 1: Antag, at $\det U_{ii} = \det V_{ii} = 1$. Det er jo det, vi ønsker.

Tilfælde 2: Antag, at $\det U_{ii} = 1$ og $\det V_{ii} = -1$. Sæt $\mathbf{m} := (n_1, \dots, n_{i-1}, n_i + 3, n_{i+1}, \dots, n_N)$. Ifølge lemma 5.2.2(d) findes $U' \in SL_{\mathcal{P}}(\mathbf{m}, \mathbb{Z})$ og $V' \in GL_{\mathcal{P}}(\mathbf{m}, \mathbb{Z})$, således at $\det V'_{ii} = -1$, $\det V'_{jj} = 1$ for alle $j \neq i$ og $U'\iota_{\mathbf{m}, \mathbf{n}}(I - A)V' = I - A_*$. Find vha. den opadfiltrerende egenskab et $\mathbf{r}_0 \geq \mathbf{r}, \mathbf{m}$. Da er

$$\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{m}}(U')\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{n}}(I - A)\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{m}}(V') = \iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{m}}(I - A_*) \quad \text{og} \quad \iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}}(U^{-1})\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{n}'}(I - A')\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}}(V^{-1}) = \iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{n}}(I - A).$$

Således har vi, at

$$\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{m}}(U')\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}}(U^{-1})\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{n}'}(I - A')\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}}(V^{-1})\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{m}}(V') = \iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{m}}(I - A_*)$$

og at $\det(\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{m}}(U')\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}}(U^{-1}))_{jj} = \det U_{jj}$ for alle $j = 1, \dots, N$, $\det(\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}}(V^{-1})\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{m}}(V'))_{jj} = \det V_{jj}$ for alle $j \neq i$ og $\det(\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}}(V^{-1})\iota_{\mathbf{r}_0, \mathbf{m}}(V'))_{ii} = 1$. Således har vi en $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalens mellem $(I - A_*)$ og $(I - A')$, som opfylder, at determinanterne af diagonalblokkene i de $GL_{\mathcal{P}}$ -matricer, som inducerer ækvivalensen, er de samme som for hhv. U og V – på nær, at determinanten af de i 'te diagonalblokke er 1. Fra lemma 5.2.2(e) haves, at $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A_*} \otimes \mathbb{K}$. Således kan vi w.l.o.g. også antage, at $\det U_{ii} = \det V_{ii} = 1$.

Tilfælde 3: Antag, at $\det U_{ii} = -1$. Dette kan løst sagt klares, ved at gå langt nok ud i U_{ii} og V_{ii} og bytte to nabo søjler i både U_{ii} og V_{ii} – og siden gå til tilfælde 1 eller 2. Mere præcis, så sættes $\mathbf{r}' := (r_1, \dots, r_{i-1}, r_i + 2, r_{i+1}, \dots, r_N)$ og vi betragter matricerne $\iota_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}(U)$, $\iota_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}(V)$, $\iota_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}(B_0)$ og $\iota_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}(B'_0)$. Lad U_0 (hhv. V_0) være lig $\iota_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}(U)$ (hhv. $\iota_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}(V)$) bortset fra at den $(r_1 + \dots + r_i + 1)$ 'te og den $(r_1 + \dots + r_i + 2)$ 'te søjle er ombyttet. Da gælder, at $U_0 \iota_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}(B_0) V_0 = \iota_{\mathbf{r}', \mathbf{r}}(B'_0)$, $\det(U_0)_{ii} = 1$ og $\det(V_0)_{ii} = -\det V_{ii}$; siden gås videre til tilfælde 1 eller 2, afhængigt af determinanten af $(V_0)_{ii}$.

Således er der ved induktion efter i vist, at vi w.l.o.g. kan antage, at $B = I - A$ er $SL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalent med $B' = I - A'$. Men ifølge korollar 5.1.6 er således $A \sim_{FE} A'$, og da den stabiliserede Cuntz-Krieger algebra er en FE-invariant for SFT, er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$. ■

Korollar 5.2.4 *Givet $A \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(II)}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$ og $A' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(II)}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$ med indgange fra $\{0, 1\}$. Hvis der findes en K -væv isomorfi fra $K(I - A)$ til $K(I - A')$, så er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$.*

Bevis: Dette følger umiddelbart af teorem 5.2.3 og teorem 4.6.12. ■

Eksempel 5.2.5 (fortsat fra eksempel 2.8.14) Modulo konjugering med en permutationsmatrix, kan nabomatricen i eksempel 2.8.14 skrives på formen

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & X \\ 0 & A_2 & Y \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

hvor A_1, A_2 og A_3 er irreducible ikke-permutationsmatricer og $X, Y \neq 0$. Idealstrukturen i \mathcal{O}_A er præcis den samme, vi har bare „byttet om på betegnelserne af de irreducible komponenter“. Lad $U = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$ og $V = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & V_{13} \\ 0 & V_{22} & V_{23} \\ 0 & 0 & V_{33} \end{pmatrix}$ være givet med tilsvarende blokstørrelser. Da er

$$B' := U(I - A)V = \begin{pmatrix} U_{11}(I - A_1)V_{11} & 0 & U_{11}(I - A_1)V_{13} - U_{11}XV_{33} + U_{13}(I - A_3)V_{33} \\ 0 & U_{22}(I - A_2)V_{22} & U_{22}(I - A_2)V_{23} - U_{22}YV_{33} + U_{23}(I - A_3)V_{33} \\ 0 & 0 & U_{33}(I - A_3)V_{33} \end{pmatrix}.$$

Sæt $A' = I - B'$. Så hvis $U_{11}, U_{22}, U_{33}, V_{11}, V_{22}$ og V_{33} er invertible, de to ikke-diagonalblokke er forskellige fra nul, diagonalblokkene i A' er irreducible ikke-permutationsmatricer og matricen A' er en $\{0, 1\}$ -matrix, så er $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$.

5.3 Bemærkninger

Der er ikke så mange henvisninger at tilføje her. De nye hovedresultater i specialet er teorem 5.2.3 samt korollar 5.2.4, som M. Boyle og D. Huang havde sørget for allerede lå klart og ventede på et teorem at være korollar til... Idéen til beviset for isomorfisætningen (teorem 5.2.3) er i bund og grund den samme, som D. Huang har brugt, som igen var direkte inspireret af M. Rørdams udførelse af nogle af J. Cuntz' idéer.

Vi mangler dog at vise, at dette faktisk kan betragtes som en invariant (og dermed en fuldstændig invariant). I næste kapitel vises dette i tilfældet, hvor der ikke er nogle overgangstilstande og matricerne er $\{0, 1\}$ -matricer opfyldende betingelse (II) – men jeg er ret overbevist om, at dette gælder mere generelt!

Kapitel 6

Klassifikationsresultatet

Her i kapitlet formuleres og bevises et klassifikationsresultat for $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K}$, hvor A er en $\{0, 1\}$ -matrix, som opfylder betingelse (II) og hvis tilhørende graf G_A ingen overgangstilstande har.

6.1 Indledning

Antagelse 6.1.1 I det følgende lader vi \succeq være en ordensrelation på $\mathcal{P} := \{1, \dots, N\}$, hvor $N \in \mathbb{N}$, som opfylder, at

$$i \succeq j \Rightarrow i \leq j$$

for alle $i, j \in \mathcal{P}$, hvor \leq betegner den sædvanlige ordning på \mathbb{Z} . Sæt $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da er $J^2 = I$. Lad \mathcal{P}_J^\top

betegne mængden \mathcal{P} udstyret med ordningen \succeq_J^\top , givet ved, at $i \succeq_J^\top j$, hvis og kun hvis $N - j + 1 \succeq N - i + 1$. Klart opfylder også \mathcal{P}_J^\top , at

$$i \succeq_J^\top j \Rightarrow i \leq j$$

for alle $i, j \in \mathcal{P}_J^\top$. Vi kan tænke på \mathcal{P}_J^\top , som \mathcal{P} udstyret med den omvendte ordning, og siden er der lavet permutationen $i \mapsto N - i + 1$ af elementerne i \mathcal{P} , for at den omvendte ordning skal opfylde det tilsvarende krav om, at blokmatrixerne skal være blok øvre trekantsmatrixer.

Bemærkning 6.1.2 Lad der være givet $B, B' \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$. Sæt $\mathbf{n}_J^\top = (n_N, n_{N-1}, \dots, n_1) \in \mathbb{N}^N$ og bemærk at $(JB^\top)^\top, (JB'^\top)^\top \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P}_J^\top}(\mathbf{n}_J^\top, \mathbb{Z})$ med blokstrukturen bevaret. Da er B og B' $GL_{\mathcal{P}}$ -ækvivalente, hvis og kun hvis $(JB^\top)^\top$ og $(JB'^\top)^\top$ er $GL_{\mathcal{P}_J^\top}$ -ækvivalente. Der gælder nemlig, at $UBV = B'$, hvis og kun hvis

$$(JVJ)^\top (JB^\top)^\top (JUJ)^\top = (JB'^\top)^\top.$$

Definition 6.1.3 Vi siger, at en matrix $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ opfylder **betingelse (III)**, netop hvis A opfylder betingelse (II) og grafen G_A ikke har nogle overgangstilstande. Dvs. A opfylder betingelse (III), hvis og kun hvis der findes en permutationsmatrix $P \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$, således at

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{NN} \end{pmatrix},$$

hvor alle diagonalblokkene, A_{11}, \dots, A_{NN} , er irreducible ikke-permutationsmatrixer.

Sætning 6.1.4 Lad der være givet matrixer $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\{0, 1\})$, som opfylder betingelse (III). Antag, at $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$. Da findes et $N \in \mathbb{N}$, permutationsmatrixer $P \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$, $P' \in \text{Mat}_{n'}(\{0, 1\})$, en ordning \succeq på $\mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$ samt $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^N$, så

$$PAP^{-1} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}, \mathbb{Z}), \quad P'A'P'^{-1} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}', \mathbb{Z}) \quad \text{og} \quad K(I - PAP^{-1}) \cong K(I - P'A'P'^{-1}).$$

Bevis: Antag, at vi har en isomorfi $\varphi: \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$. Ifølge sætning 2.9.2 findes en ordensisomorfi $\delta: \Gamma_A \rightarrow \Gamma_{A'}$, så $\varphi(\mathcal{J}_{H(\gamma)} \otimes \mathbb{K}) = \mathcal{J}_{H(\delta(\gamma))} \otimes \mathbb{K}$. Specielt har Γ_A og $\Gamma_{A'}$ samme antal elementer; lad $N \in \mathbb{N}$ betegne dette antal. Da kan vi skrive $\Gamma_A = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$, således at $\gamma_i \succeq \gamma_j \Rightarrow i \geq j$. Find permutationsmatrixer $P \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ og $P' \in \text{Mat}_{n'}(\{0, 1\})$, så

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}, \quad P'A'P'^{-1} = \begin{pmatrix} A'_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A'_{21} & A'_{22} & 0 & \dots & 0 \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_{N1} & A'_{N2} & A'_{N3} & \dots & A'_{NN} \end{pmatrix},$$

hvor knuderne svarende til A_{ii} er γ_i og knuderne svarende til A'_{ii} er $\delta(\gamma_i)$ for $i = 1, \dots, N$. Definér $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^N$, så de afspejler disse blokstrukturer. Sæt $\mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$, hvor $i \succeq j$, hvis og kun hvis $\gamma_j \succeq \gamma_i$. Da er $(PAP^{-1})^\top \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}, \mathbb{Z})$, $(P'A'P'^{-1})^\top \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}', \mathbb{Z})$. Vi vil nu vise, at $K(I - (PAP^{-1})^\top)$ er K -væv isomorf med $K(I - (P'A'P'^{-1})^\top)$.

Antag for nemheds skyld, at A og A' allerede er skrevet på denne form (altså at $P = I$ og $P' = I$) og sæt $B = I - A^\top$ og $B' = I - A'^\top$. Således er $B_{ii} = I - A_{ii}^\top$ og $B_{ij} = -A_{ji}^\top$ for alle $i, j \in \mathcal{P}$ med $i \neq j$ og tilsvarende for B' . For at lette notationen, vil vi også lade overstregning betegne tensorering med de kompakte operatorer, således betegner f.eks. $\overline{\mathcal{J}}_H$ idealet $\mathcal{J}_H \otimes \mathbb{K}$.

For hvert $i \in \mathcal{P}$ haves et kommutativt diagram med exakte rækker

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{H_-(\gamma_i)} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)} & \twoheadrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)}/\overline{\mathcal{J}}_{H_-(\gamma_i)} \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \varphi|_{\overline{\mathcal{J}}_{H_-(\gamma_i)}} & & \cong \downarrow \varphi|_{\overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)}} & & \cong \downarrow \varphi_i \\ 0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{H_-(\delta(\gamma_i))} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{H(\delta(\gamma_i))} & \twoheadrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{H(\delta(\gamma_i))}/\overline{\mathcal{J}}_{H_-(\delta(\gamma_i))} \longrightarrow 0, \end{array}$$

hvor φ_i er den entydige inducerede *-homomorfi, som får diagrammet til at kommutere; og denne er endda en isomorfi (alt dette kan forholdsvis nemt ses ved diagramjagt).

Bemærk, at da der er antaget, at der ingen overgangstilstande er, er $\overline{\Sigma(H(\gamma_i))} = \Sigma(H(\gamma_i)) = \bigcup H(\gamma_i)$ og $\overline{\Sigma(H(\delta(\gamma_i)))} = \Sigma(H(\delta(\gamma_i))) = \bigcup H(\delta(\gamma_i))$ for alle $i = 1, \dots, N$. Således er $B_{\check{H}(i)} = (I - A^\top)_{\bigcup H(\gamma_i)}$ og $B_{\check{H}_-(i)} = (I - A^\top)_{\bigcup H_-(\gamma_i)}$ for $i = 1, \dots, N$ og tilsvarende for B' . Vi ser nu umiddelbart, at $\text{cok } B_{\check{H}(i)}$ og $\text{cok } B_{\check{H}_-(i)}$ er kanonisk isomorfe med hhv. $K_0(\overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)})$ og $K_0(\overline{\mathcal{J}}_{H_-(\gamma_i)})$ medens $\text{cok } B_{\{i\}}$ og $\text{ker } B_{\{i\}}$ er kanonisk isomorfe med hhv. $K_0(\overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)}/\overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)})$ og $K_1(\overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)}/\overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)})$ – og tilsvarende for B' .

Sæt $\kappa_{\check{H}(i)}^{\text{cok}} = K_0(\varphi|_{\overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)}})$, $\kappa_{\check{H}_-(i)}^{\text{cok}} = K_0(\varphi|_{\overline{\mathcal{J}}_{H_-(\gamma_i)}})$ og $\kappa_{\{i\}}^{\text{cok}} = K_0(\varphi_i)$ og $\kappa_i^{\text{ker}} = K_1(\varphi_i)$ (hvor vi selvfølgelig kun medtager de $\check{H}_-(i)$, som er ikke-tomme).

Vi skal selvfølgelig vise, at disse afbildninger er veldefinerede. At $\check{H}_-(i) = \check{H}_-(j)$ eller $\check{H}(j) = \check{H}_-(i)$ for forskellige i og j , har ingen indflydelse (thi idealerne er jo fastsatte ud fra den arvelig mængde, og ikke efter frembringeren for mængden). Man kan hurtigt overbevise sig selv om, at den eneste måde, hvorpå vi kunne tænkes at komme i problemer, er, hvis $\{i\}$ er koarvelig for et $i \in \mathcal{P}$. Antag derfor dette. Altså er $\check{H}(i) = \{i\}$ og $\check{H}_-(i) = \emptyset$. Dette svarer til diagrammet

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_\emptyset = \{0\} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{\{\gamma_i\}} & \twoheadrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{\{\gamma_i\}}/\overline{\mathcal{J}}_\emptyset = \overline{\mathcal{J}}_{\{\gamma_i\}}/\{0\} \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \varphi|_{\{0\}} & & \cong \downarrow \varphi|_{\overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)}} & & \cong \downarrow \varphi_i \\ 0 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_\emptyset = \{0\} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{\{\delta(\gamma_i)\}} & \twoheadrightarrow & \overline{\mathcal{J}}_{\{\delta(\gamma_i)\}}/\overline{\mathcal{J}}_\emptyset = \overline{\mathcal{J}}_{\{\delta(\gamma_i)\}}/\{0\} \longrightarrow 0, \end{array}$$

hvoraf det er klart, at $K_0(\varphi_i) = K_0(\varphi|_{\overline{\mathcal{J}}_{H(\gamma_i)}})$.

Da funktorerne K_0 og K_1 er stabile og den forbindende homomorfi og exponentialafbildningen er funktorielle, følger nu af sætning 4.1.5, at vi har en K -væv isomorfi $\kappa: K(B) \rightarrow K(B')$, thi alt kommuterer automatisk. Således er K -vævene $K(B)$ og $K(B')$ isomorfe.

Nu følger det ønskede af foregående bemærkning. ■

6.2 Hovedresultatet

Teorem 6.2.1 *Givet matricer $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\{0, 1\})$, som opfylder betingelse (III). Da er følgende ækvivalente*

(a) $\mathcal{O}_A \otimes \mathbb{K} \cong \mathcal{O}_{A'} \otimes \mathbb{K}$,

(b) *Der findes et $N \in \mathbb{N}$, en ordning \succeq på $\mathcal{P} = \{1, \dots, N\}$ opfyldende betingelsen i antagelse 6.1.1, permutationsmatricer $P \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$, $P' \in \text{Mat}_{n'}(\{0, 1\})$ samt $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{N}^N$, således at*

$$PAP^{-1} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}, \mathbb{Z}), \quad P'A'P'^{-1} \in \mathfrak{Mat}_{\mathcal{P},+}^{(\text{II})}(\mathbf{n}', \mathbb{Z}), \quad \text{og} \quad K(I - PAP^{-1}) \cong K(I - P'A'P'^{-1}).$$

Bevis: Dette følger umiddelbart af korollar 5.2.4, observationen i definition 6.1.3 samt af sætning 6.1.4. ■

Eksempel 6.2.2 (fortsat fra eksempel 2.8.14 og 5.2.5) Lad $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ – som i eksempel 2.8.14 – være en given matrix på formen

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ X & A_2 & 0 \\ Y & 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

hvor A_1, A_2 og A_3 er irreducible ikke-permutationsmatricer og $X, Y \neq 0$. Definér idealer $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ og \mathcal{J}_3 som i eksempel 2.8.14. I $\overline{\mathcal{O}}_A$ har vi altså følgende idealstruktur

$$\begin{array}{ccccc} & & & \overline{\mathcal{J}}_2 & \\ & & \swarrow \iota_{12} & & \searrow \iota_2 \\ \{0\} = \overline{\mathcal{J}}_0 & \xrightarrow{\iota_0} & \overline{\mathcal{J}}_1 = \overline{\mathcal{J}}_2 \cap \overline{\mathcal{J}}_3 & & \overline{\mathcal{J}}_2 + \overline{\mathcal{J}}_3 = \overline{\mathcal{O}}_A \\ & & \searrow \iota_{13} & & \swarrow \iota_3 \\ & & & \overline{\mathcal{J}}_3 & \end{array}$$

hvor overstregning betegner tensorering med de kompakte operatorer, \mathbb{K} . Lad A' være en anden matrix på samme blokform, hvor vi bruger de tilsvarende betegnelser tilføjet et „mærke“. Af teorem 6.2.1, bemærkning 6.1.2 samt bevist for sætning 6.1.4 fremgår, at $\overline{\mathcal{O}}_A \cong \overline{\mathcal{O}}_{A'}$, hvis og kun hvis enten

i. der findes isomorfier

$$\begin{aligned} \delta_1 &: K_0(\overline{\mathcal{J}}_1) \rightarrow K_0(\overline{\mathcal{J}}'_1), & \xi_1 &: K_1(\overline{\mathcal{J}}_1) \rightarrow K_1(\overline{\mathcal{J}}'_1), \\ \delta_2 &: K_0(\overline{\mathcal{J}}_2) \rightarrow K_0(\overline{\mathcal{J}}'_2), \\ \delta_3 &: K_0(\overline{\mathcal{J}}_3) \rightarrow K_0(\overline{\mathcal{J}}'_3), \\ \delta_4 &: K_0(\overline{\mathcal{J}}_2/\overline{\mathcal{J}}_1) \rightarrow K_0(\overline{\mathcal{J}}'_2/\overline{\mathcal{J}}'_1), & \xi_4 &: K_1(\overline{\mathcal{J}}_2/\overline{\mathcal{J}}_1) \rightarrow K_1(\overline{\mathcal{J}}'_2/\overline{\mathcal{J}}'_1), \\ \delta_5 &: K_0(\overline{\mathcal{J}}_3/\overline{\mathcal{J}}_1) \rightarrow K_0(\overline{\mathcal{J}}'_3/\overline{\mathcal{J}}'_1), & \xi_5 &: K_1(\overline{\mathcal{J}}_3/\overline{\mathcal{J}}_1) \rightarrow K_1(\overline{\mathcal{J}}'_3/\overline{\mathcal{J}}'_1), \end{aligned}$$

således at vi har følgende kommutative diagrammer stammende fra de cykliske seks-leddede exakte følger i K -teori:

$$\begin{array}{ccccccc} K_1(\overline{\mathcal{J}}_2/\overline{\mathcal{J}}_1) & \longrightarrow & K_0(\overline{\mathcal{J}}_1) & \xrightarrow{K_0(\iota_{12})} & K_0(\overline{\mathcal{J}}_2) & \longrightarrow & K_0(\overline{\mathcal{J}}_2/\overline{\mathcal{J}}_1) \longrightarrow 0 \\ \cong \downarrow \xi_4 & & \cong \downarrow \delta_1 & & \cong \downarrow \delta_2 & & \cong \downarrow \delta_4 \\ K_1(\overline{\mathcal{J}}'_2/\overline{\mathcal{J}}'_1) & \longrightarrow & K_0(\overline{\mathcal{J}}'_1) & \xrightarrow{K_0(\iota'_{12})} & K_0(\overline{\mathcal{J}}'_2) & \longrightarrow & K_0(\overline{\mathcal{J}}'_2/\overline{\mathcal{J}}'_1) \longrightarrow 0, \\ \\ K_1(\overline{\mathcal{J}}_3/\overline{\mathcal{J}}_1) & \longrightarrow & K_0(\overline{\mathcal{J}}_1) & \xrightarrow{K_0(\iota_{13})} & K_0(\overline{\mathcal{J}}_3) & \longrightarrow & K_0(\overline{\mathcal{J}}_3/\overline{\mathcal{J}}_1) \longrightarrow 0 \\ \cong \downarrow \xi_5 & & \cong \downarrow \delta_1 & & \cong \downarrow \delta_3 & & \cong \downarrow \delta_5 \\ K_1(\overline{\mathcal{J}}'_3/\overline{\mathcal{J}}'_1) & \longrightarrow & K_0(\overline{\mathcal{J}}'_1) & \xrightarrow{K_0(\iota'_{13})} & K_0(\overline{\mathcal{J}}'_3) & \longrightarrow & K_0(\overline{\mathcal{J}}'_3/\overline{\mathcal{J}}'_1) \longrightarrow 0, \end{array}$$

eller

ii. det tilsvarende til i., hvor $\overline{\mathcal{J}}'_2$ og $\overline{\mathcal{J}}'_3$ byttes overalt (og afbildningerne ændres tilsvarende).

Det er klart, at i dette „forholdsvis ukomplekse tilfælde“ er eksistensen af en del af isomorfierne automatisk (så kommutativiteten også er opfyldt). Det er nok – i dette tilfælde – at kræve, at $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \xi_4$ og ξ_5 findes, således at de fire kvadrater kommuterer. Man behøver selvfølgelig heller ikke tage højtideligt, at vi har anført de stabiliserede idealer.

Bemærkning 6.2.3 Ved gennemlæsning af bevist for sætning 6.1.4 kan man finde på at spørge sig selv: „Mon ikke dette kan gøres funktorielt“ – svaret kommer inde fra: „nej, lad hellere være – for ellers bli’r du aldrig kandidat...“.

Men jeg har dog ikke kunnet lade være med at tænke lidt over det. Jeg synes, at det virker ikke helt umuligt, at man kan gøre dette (for matricer opfyldende betingelse (III), hvor vi vælger en fast komponentstruktur), men det er ikke helt oplagt, hvordan idealerne skal parres nu.

I givet fald vil den beskrevne klassifikationssætning skulle formuleres vha. kontravariant funktor (det fremgår nogenlunde af bevist for sætning 6.1.4 samt bemærkning 6.1.2). Hvis vi ønsker en kovariant funktor så skal vi formulere det som i eksemplet ovenover. Hvis dette kan lade sig gøre, så er det naturligt at spørge, om enhver homomorfi (eller enhver isomorfi) af de konstruerede objekter er induceret af en *-homomorfi (eller en isomorfi) af de tilhørende stabiliserede Cuntz-Krieger algebraer. – Men som sagt, er dette kun nogle løse tanker, jeg har gjort mig.

6.3 Bemærkninger

Der er ikke mange kommentarer at tilføje til dette afsnit. Man kan godt sige, at hele dette kapitel er forfattet af mig selv (jeg har selvfølgelig importeret resultater fra de foregående kapitler i specialet).

Konklusion

Jeg må tilstå, at jeg er rimelig tilfreds med forløbet af specialet. Jeg har været heldig, at to artikler, [BH03] og [Boy02], lå og ventede på at blive anvendt; jeg har også været heldig overhovedet at bemærke disse to (hverken Toke Meier Carlsen eller Søren Eilers kendte til disse to artikler).

Jeg må tilmed tilstå, at det har været en større opgave, end jeg havde forventet, at sætte mig ind i alle de forskellige områder, som mødes her i specialet. Forud for specialet havde jeg fulgt eet introducerende kursus i operatoralgebra-teori samt skrevet et fagprojekt om tensorprodukter af C^* -algebraer. F.eks. K -teori og skiftrum var et fremmed land for mig – og dertil kommer så alle de forskellige artikler, jeg gennem processen har læst i.

Jeg er også ret tilfreds med resultaterne i specialet. – En ting er, at jeg har fået klassificeret Cuntz-Krieger algebraerne – det er sådan set en fin ting – men jeg er specielt glad for at have formuleret denne på K -teoretisk måde. Thi vha. af dette er det rimelig nemt at give bud på nogle nye invarianter til at klassificere en større klasse af C^* -algebraer med (noget helt andet er så, hvorvidt man er i stand til at vise eller modbevise, at disse er fuldstændige).

Jeg har en helt klar fornemmelse af, at grunden, til at det har været så svært at klassificere SFT op til FE, er, at man har fokuseret for meget på K -teoretiske invarianter (med nogle ekstra fortegn). Dette har efter min mening været en forkert strategi – fordi det er klart, at jo mere den stabiliserede Cuntz-Krieger algebra mangler i at være en fuldstændig invariant for SFT op til FE, desto værre er det at supplere en K -teoretisk invariant op til at være en fuldstændig invariant for SFT op til FE.

Her synes jeg, at det virker helt rigtigt, at lave en klassifikation baseret på matrixidentiteter, således som M. Boyle har gjort i [Boy02]. Dette virker også mere naturligt, hvis man sammenligner med R.F. Williams karakterisering af topologisk konjugation af SFT og B. Parry og D. Sullivans karakterisering af FE af SFT. Den basale observation er at indse, at for irreducible ikke-permutationsmatricer A og A' kan J. Franks klassifikation omformuleres, som følger. For to irreducible ikke-permutationsmatricer $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{N}_0)$ og $A' \in \text{Mat}_{n'}(\mathbb{N}_0)$ er følgende udagn ækvivalente

- (a) $A \sim_{FE} A'$,
- (b) $\text{cok}(I - A) \cong \text{cok}(I - A') \wedge \text{sgn det}(I - A) = \text{sgn det}(I - A')$,
- (c) $K_0(\mathcal{O}_A) \cong K_0(\mathcal{O}_{A'}) \wedge \text{sgn det}(I - A) = \text{sgn det}(I - A')$,
- (d) der findes $U, V \in SL_{\max(n, n')}(\mathbb{Z})$, således at $U(I - A_0)V = (I - A'_0)$, hvor det øvre venstre hjørne af $A_0, A'_0 \in \text{Mat}_{\max(n, n')}(\mathbb{N}_0)$ er lig hhv. A og A' , og er nul uden for dette.

Jeg kunne godt tænke mig at forsøge at udvide de givne resultater. Der er imidlertid mange ting, man kan begynde at undersøge. I flæng nævner jeg: prøve at komme af med overgangstilstandene, prøve at lave en funktoriel fuldstændig invariant, prøve at slække på kravet om, at $A \in \text{Mat}_n(\{0, 1\})$ skal opfylde betingelse (II) (kravet kunne være, at A og A^T opfylder (I), at A opfylder (I) eller kun at A er ikke-degenereret), prøve at klassificere Cuntz-Krieger algebraerne op til (unital) isomorfi (f.eks. vha. af resultater om hvilke automorfier kan induceres af en FE, se mere i [Hua01a]), undersøge om lignende klassifikationsresultater kan opnås for en større klasse af C^* -algebraer, undersøge om noget af dette kan bruges for generaliseringer af Cuntz-Krieger algebraer, undersøge sammenhængen med resultater fra KK -teori samt at undersøge hvorvidt udviklingen inden for Cuntz-Krieger algebraer kan gøre gengæld til teorien om symbolske dynamiske systemer.

Tillæg A

Induktiv limes

Definition A.1 Vi vil her definere den induktive grænse, hvor vi tillader mere generelle indeksemængder end \mathbb{N} (som i [RLL00, §6.2]). Et **induktivt system** i en kategori \mathcal{C} består af en indexmængde I med en opadfiltrerende ordning \leq , af en familie $(A_i)_{i \in I}$ af objekter i \mathcal{C} og for alle $i, j \in I$ med $j \leq i$ en morfi $\Phi_{ij}: A_j \rightarrow A_i$ i \mathcal{C} , således at $\Phi_{ii} = id_{A_i}$, $i \in I$ og at der for alle $i, j, k \in I$ med $j \leq k \leq i$ gælder, at $\Phi_{ij} = \Phi_{ik} \circ \Phi_{kj}$.

En **induktiv grænse** af et induktivt system $(A_i, \Phi_{ij}), i, j \in I, j \leq i$ er et system $(A, (\Phi_i)_{i \in I})$, hvor A er et objekt i \mathcal{C} og $\Phi_i: A_i \rightarrow A$, $i \in I$ er morfier i \mathcal{C} , som opfylder følgende to betingelser

(i) Diagrammet

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{\Phi_j} & A \\ & \searrow \Phi_{ij} & \nearrow \Phi_i \\ & A_i & \end{array}$$

kommuterer for alle $i, j \in I$ med $j < i$ (den kohærente betingelse).

(ii) Hvis $(A', (\Phi'_i)_{i \in I})$ er et andet sådant system, som opfylder den kohærente betingelse (tilsvarende til (i)), så findes en og kun en morfi $\Phi: A \rightarrow A'$, således at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\Phi'_i} & A' \\ & \searrow \Phi_i & \nearrow \Phi \\ & A & \end{array}$$

kommuterer for hvert $i \in I$.

Sætning A.2 I kategorierne af monoider og grupper har ethvert induktivt system en induktiv grænse (og denne er entydig op til kanonisk isomorfi).

Lad $(A_i, \Phi_{ij}), i, j \in I, j \leq i$ være et induktivt system i en af disse kategorier og lad $(A, (\Phi_i)_{i \in I})$ være en induktiv grænse af dette. Da gælder, at $A = \bigcup_{i \in I} \Phi_i(A_i)$. Hvis alle Φ_{ij} 'erne er injektive, så er alle Φ_i 'erne også injektive.

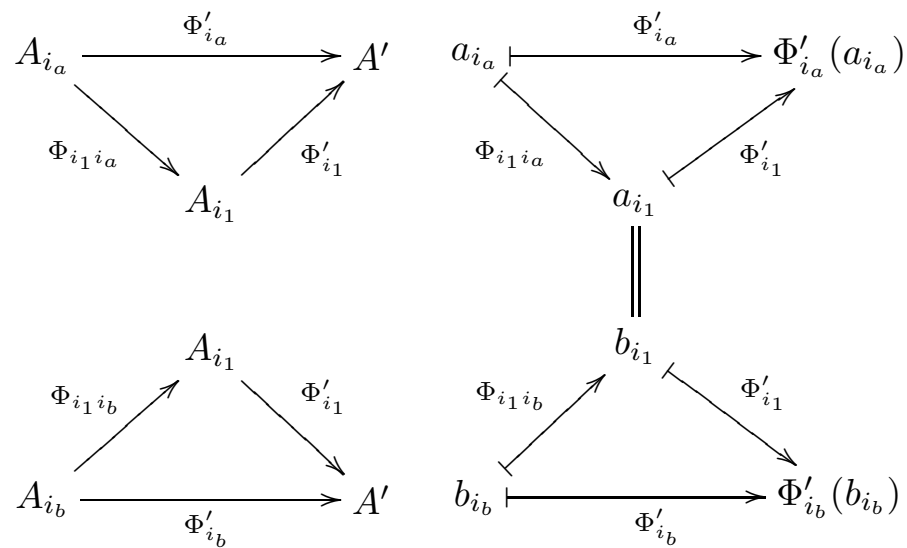
Bevis: Lad $(A_i, \Phi_{ij}), i, j \in I, j \leq i$ være et induktivt system i en af kategorierne. Vi bruger multiplikativ notation og lader 1 betegne de neutrale elementer. Sæt

$$A_0 := \{(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid \exists i_0 \in I \forall i \in I : i_0 < i \Rightarrow a_i = \Phi_{ii_0}(a_{i_0})\},$$

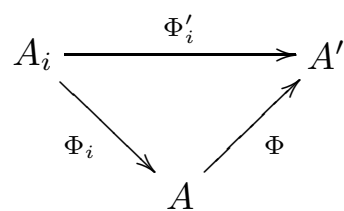
hvor $\prod_{i \in I} A_i$ er det direkte produkt i kategorien (dvs. det kartesiske produkt, hvor operationerne er definerede punktvis). Definér en ækvivalensrelation \sim på A_0 , ved at $(a_i)_{i \in I} \sim (a'_i)_{i \in I}$, netop hvis der findes et $i_0 \in I$, således at $a_i = a'_i$ for alle $i \geq i_0$. Sæt $A := A_0 / \sim$. Da \sim respekterer multiplikationen, eftervises umiddelbart, at multiplikationen kan defineres vha. repræsentanter for ækvivalensklasserne og det vises også let, at A hermed tilhører den aktuelle kategori. For hvert $j \in I$ defineres $\Phi_j: A_j \rightarrow A$ ved, at $\Phi_j(x) = [(a_i)_{i \in I}]$, hvor $a_i = 1$, hvis $j \not\leq i$ og $a_i = \Phi_{ij}(x)$, hvis $j \leq i$. Det er klart, at disse afbildninger er homomorfier og at de opfylder den kohærente betingelse (i) ovenover. Antag, at $(a_i)_{i \in I} \in A_0$. Find $i_0 \in I$, så $a_i = \Phi_{ii_0}(a_{i_0})$ for alle $i > i_0$. Da er $\Phi_{i_0}(a_{i_0}) \sim (a_i)_{i \in I}$. Følgelig er $A = \bigcup_{i \in I} \Phi_i(A_i)$.

Lad nu $(A', (\Phi'_i)_{i \in I})$ være et andet sådant system, som opfylder den kohærente betingelse. Vi skal nu definere $\Phi: A \rightarrow A'$. Givet $(a_i)_{i \in I} \in A_0$, find $i_0 \in I$, så $a_i = \Phi_{ii_0}(a_{i_0})$ for alle $i > i_0$ og sæt $\Phi([(a_i)_{i \in I}]) := \Phi'_{i_0}(a_{i_0})$. Vi skal selvfølgelig vise, at Φ er veldefineret. Givet $(a_i)_{i \in I} \in A_0$ og $(b_i)_{i \in I} \in A_0$, således at $(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I}$. Antag, at $a_i = \Phi_{ii_a}(a_{i_a})$ for alle $i > i_a$ og at $b_i = \Phi_{ii_b}(b_{i_b})$ for alle $i > i_b$. Find et $i_0 \in I$,

så $a_i = b_i$ for alle $i \geq i_0$. Find vha. den opadfiltrerende egenskab et $i_1 \geq i_a, i_b, i_0$. Af følgende kommutative diagrammer



ses, at Φ veldefineret. Det ses nemt, at Φ er en homomorfi. At Φ er entydigt bestemt, følger af, at $A = \bigcup_{i \in I} \Phi_i(A_i)$ og at Φ skal opfylde



og dermed er fastlagt på $\Phi_i(A_i)$ for hvert $i \in I$.

Antag nu, at $(A', (\Phi'_i)_{i \in I})$ også er en induktiv grænse. Da findes homomorfier $\Phi: A \rightarrow A'$ og $\Psi: A' \rightarrow A$, således at $\Phi'_i = \Phi \circ \Phi_i$ og $\Phi_i = \Psi \circ \Phi'_i$. Følgelig er $\Phi'_i = \Phi \circ \Psi \circ \Phi'_i$ og $\Phi_i = \Psi \circ \Phi \circ \Phi_i$. Pga. entydighed må således $\Psi \circ \Phi = id_A$ og $\Phi \circ \Psi = id_{A'}$. ■

Bemærkning A.3 Disse generaliserede induktive grænser findes også i rigtig mange andre kategorier – og eksistensbeviserne ligner meget eksistensbeviserne for den sædvanlige induktive grænse. Vi får her i specialet kun brug for generaliserede induktive grænser af monoider og grupper, hvilket er årsagen til, at kun disse er medtaget i sætningen ovenover. Desuden gælder rigtig ofte, at den generaliserede induktive grænse er isomorf med en sædvanlig induktiv grænse. Men i vores tilfælde afspejler den induktive struktur meget præcis nogle vigtige egenskaber ved de involverede objekter – hvilket er årsag til, at vi ikke ønsker at omformulere disse generaliserede induktive grænser til sædvanlige induktive grænser. Materialet i dette appendix er taget fra §L.1 i appendix L i [WO93].¹

¹Jeg mener dog, at N.E. Wegge-Olsen glemmer at lave en identifikation af de elementer, som er ens fra et vist trin – han gør det kun, hvis de algebraiske strukturer ikke har neutrale elementer, se s. 299₁₂–300¹³ i [WO93].

Tillæg B

Nogle resultater fra C^* -algebrateori

Her i tillægget har jeg lagt nogle resultater fra C^* -algebrateori, som bruges i løbet af specialet. De ligger her af forskellige grunde. Nogle resultater bruges gentagne gange, og således har det været naturligt at placere dem udenfor den aktuelle sammenhæng. I andre tilfælde har jeg syntes, at det virkede distraherende at komme med flere lemmaer, midt mens man foretager sig noget helt andet. Først nogle lemmaer, som jeg har fået brug for og derfor har bevist.

Lemma B.1 *Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra med enhed og lad $S \subseteq \mathfrak{A}$ være ikke-tom. Da er*

$$\text{span}\{aib \mid a, b \in \mathfrak{A} \wedge i \in S \cup S^*\}$$

idealet frembragt af S (dette er ikke nødvendigvis lukket). Afslutningen af dette ideal er det lukkede ideal frembragt af S .

Bevis: Sæt

$$\mathcal{I}_0 := \text{span}\{aib \mid a, b \in \mathfrak{A} \wedge i \in S \cup S^*\}$$

og lad \mathcal{I} betegne idealet frembragt af S . Det er klart, at $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}$, at \mathcal{I}_0 er et underrum og at $S \subseteq \mathcal{I}_0$, da \mathfrak{A} har enhed. Ved en direkte udregning ses, at \mathcal{I}_0 er et ideal i \mathfrak{A} . Lemmaet er nu klart, da afslutningen af et ideal også er et ideal. ■

Lemma B.2 *Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra og lad $S \subseteq \mathfrak{A}$ være ikke-tom. Lad*

$$\mathcal{P} = \text{span}\{a_1 a_2 \cdots a_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge a_1, \dots, a_k \in S \cup S^*\}.$$

Da er \mathcal{P} del- $$ -algebraen af \mathfrak{A} frembragt af S , og $C^*(S)$ er afslutningen af \mathcal{P} i \mathfrak{A} .*

Bevis: Det er klart, at $*$ -algebraen frembragt af S indeholder \mathcal{P} . På den anden side eftervises let, at \mathcal{P} er stabil mht. operationerne i \mathfrak{A} – og altså er \mathcal{P} en $*$ -algebra. Den sidste påstand følger nu umiddelbart af, at afslutningen af en del- $*$ -algebra er en $*$ -algebra. ■

Lemma B.3 *Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra og lad der være givet en ikke-tom, tællelig delmængde $S \subseteq \mathfrak{A}$. Da er $C^*(S)$ en separabel C^* -algebra.*

Bevis: Lad $P = \{a_1 a_2 \cdots a_k \mid k \in \mathbb{N} \wedge a_1, \dots, a_k \in S \cup S^*\}$. Da er det klart, at P er tællelig og af lemma B.2 følger, at $\text{span } P$ er tæt i $C^*(S)$. Endvidere er det klart, at $\text{span}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}} P$ er tæt i $\text{span } P$. ■

Lemma B.4 *Lad (\mathfrak{H}, φ) hhv. (\mathfrak{K}, ψ) være en ikke-degenereret repræsentation af C^* -algebraen \mathfrak{A} hhv. \mathfrak{B} . Da er repræsentationen $(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}, \varphi \hat{\otimes} \psi)$ af $\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}$ ikke-degenereret.*

Bevis: Sæt

$$\mathfrak{L}_0 = \overline{\text{span}}\{(\varphi \hat{\otimes} \psi)(t)(l) \mid t \in \mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}, l \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}\}.$$

Vi skal så vise, at $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$. Lad $h \in \mathfrak{H}$ og $k \in \mathfrak{K}$ være givet. Givet $\varepsilon > 0$. Da findes $a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{A}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{B}$, $h_1, \dots, h_m \in \mathfrak{H}$ og $k_1, \dots, k_n \in \mathfrak{K}$, så $\|h - h'\| < \varepsilon_0$ og $\|k - k'\| < \varepsilon_0$, hvor $h' = \sum_{i=1}^m \varphi(a_i)h_i$, $k' = \sum_{j=1}^n \psi(b_j)k_j$ og $\varepsilon_0 = \min\{\frac{\varepsilon}{2\|h\|+2}, \frac{\varepsilon}{2\|k\|+2}, 1\}$. Således er

$$\begin{aligned} \|h \otimes k - h' \otimes k'\| &\leq \|(h - h') \otimes k\| + \|h' \otimes (k - k')\| = \|h - h'\| \|k\| + \|h'\| \|k - k'\| \\ &\leq \|k\| \frac{\varepsilon}{2\|k\|+2} + \|h'\| \frac{\varepsilon}{2\|h\|+2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + (\|h' - h\| + \|h\|) \frac{\varepsilon}{2(\|h\|+1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + (1 + \|h\|) \frac{\varepsilon}{2(\|h\|+1)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Følgelig er $h \otimes k \in \mathfrak{L}_0$. Da \mathfrak{L}_0 er et underrum af $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$, er $\mathfrak{H} \odot \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L}_0$. Da $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$ er afslutningen af $\mathfrak{H} \odot \mathfrak{K}$ og \mathfrak{L}_0 er afsluttet, følger, at $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{L}_0$, som ønsket. ■

Gert K. Pedersen har været så venlig, at henlede min opmærksomhed på et bevis for følgende lemma i [Ped99, lem.11.12]. Se også korollar 2.6.4 til dette lemma, samt fodnoten der.

Lemma B.5 *Lad \mathcal{I} hhv. \mathcal{J} være et lukket ideal i C^* -algebraen \mathfrak{A} hhv. \mathfrak{B} . Da betragtes $\mathcal{I} \otimes_* \mathcal{J}$ som et lukket ideal i $\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}$. Hvis \mathcal{I} og \mathcal{J} er essentielle idealer (i hhv. \mathfrak{A} og \mathfrak{B}), så er $\mathcal{I} \otimes_* \mathcal{J}$ et essentielt ideal i $\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}$.*

Bevis: På sædvanlig vis betragtes $\mathcal{I} \odot \mathcal{J}$ som en del- $*$ -algebra af $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$. Det er ligetil at vise, at $\mathcal{I} \odot \mathcal{J}$ er et ideal i $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{B}$. Da $\mathcal{I} \otimes_* \mathcal{J}$ er afslutningen af $\mathcal{I} \odot \mathcal{J}$ i $\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}$, er det et lukket ideal (vises nemt).

Antag nu, at \mathcal{I} og \mathcal{J} er essentielle idealer (i hhv. \mathfrak{A} og \mathfrak{B}). Lad (\mathfrak{H}, φ) og (\mathfrak{K}, ψ) være ikke-degenererede, tro repræsentationer af hhv. \mathcal{I} og \mathcal{J} . Ifølge [Ped79, §3.12.4 samt prop.3.12.8] findes entydige udvidelser $\tilde{\varphi}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ og $\tilde{\psi}: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{B}(\mathfrak{K})$ af hhv. φ og ψ – og disse er tilmed tro ifølge samme proposition. Således har vi ifølge [Mur90, thm.6.4.19] en tro repræsentation $(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}, \tilde{\varphi} \hat{\otimes} \tilde{\psi})$ af $\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B}$. Da $\varphi \hat{\otimes} \psi$ er lig $\tilde{\varphi} \hat{\otimes} \tilde{\psi}$ på alle elementære tensorer i $\mathcal{I} \odot \mathcal{J}$, følger, at $\varphi \hat{\otimes} \psi = (\tilde{\varphi} \hat{\otimes} \tilde{\psi})|_{\mathcal{I} \odot \mathcal{J}}$. Så af foregående lemma B.4 følger, at $(\tilde{\varphi} \hat{\otimes} \tilde{\psi})(\mathcal{I} \otimes_* \mathcal{J})$ virker ikke-degenereret på $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$. Givet en operator $T \in \mathbb{B}(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K})$, som opfylder, at $T(\tilde{\varphi} \hat{\otimes} \tilde{\psi})(\mathcal{I} \otimes_* \mathcal{J}) = 0$. Givet $z \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$ og $\varepsilon > 0$. Da findes $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{I} \otimes_* \mathcal{J}$ og $z_1, \dots, z_n \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$, så $\|z - z_0\| < \frac{\varepsilon}{1 + \|T\|}$, hvor $z_0 = \sum_{i=1}^n (\varphi \hat{\otimes} \psi)(t_i)(z_i)$. Følgelig er $Tz_0 = \sum_{i=1}^n T(\varphi \hat{\otimes} \psi)(t_i)(z_i) = 0$. Således er

$$\|Tz\| \leq \|Tz - Tz_0\| + \|Tz_0\| \leq \|T\| \|z - z_0\| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ var vilkårligt, er $Tz = 0$. Og da $z \in \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{K}$ var vilkårligt, er $T = 0$. Følgelig er $(\tilde{\varphi} \hat{\otimes} \tilde{\psi})(\mathcal{I} \otimes_* \mathcal{J})$ et essentielt ideal i $(\tilde{\varphi} \hat{\otimes} \tilde{\psi})(\mathfrak{A} \otimes_* \mathfrak{B})$, og da repræsentationen er tro, følger det ønskede. ■

I [KR97, prop.4.3.3] finder man følgende generalisering af [Mur90, thm.3.3.6].

Lemma B.6 *Lad $\mathfrak{A} \neq \{0\}$ være en C^* -algebra med enhed $\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$. For hvert $a \in \mathfrak{A}$ og hvert $\lambda \in \text{Sp}(a)$ findes en tilstand τ på \mathfrak{A} , som opfylder, at $\tau(a) = \lambda$.*

Bevis: Lad $a \in \mathfrak{A}$ og $\lambda \in \text{Sp}(a)$ være givne. For alle komplekse tal $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ er $z_0\lambda + z_1 \in \text{Sp}(z_0a + z_1\mathbb{1}_{\mathfrak{A}})$ (se [Mur90, thm.1.2.1]) og således er også $|z_0\lambda + z_1| \leq \|z_0a + z_1\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}\|$. Det ses nemt, at der (vel)-defineres en lineær funktion $\tau_0: \text{span}\{a, \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}\} \rightarrow \mathbb{C}$ ved fastsættelsen $\tau_0(z_0a + z_1\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}) = z_0\lambda + z_1$, $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Denne er pga. det før bemærkede en afstandsformindskende lineær funktional på $\text{span}\{a, \mathbb{1}_{\mathfrak{A}}\}$. Ifølge Hahn-Banachs sætning (f.eks. [MV97, prop.6.9]) findes en afstandsformindskende lineær funktional τ på \mathfrak{A} , som udvider τ_0 . Således er τ kontinuert med $\|\tau\| = 1$, $\tau(\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}) = 1$ og $\tau(a) = \lambda$ – og ifølge [Mur90, cor.3.3.4] er τ derfor en tilstand på \mathfrak{A} . ■

Beviset for følgende lemma, har Mikael Rørdam været så venlig at skitsere for mig i en e-mail.

Lemma B.7 *Lad $\mathfrak{A} \neq \{0\}$ være en C^* -algebra med enhed, lad $a \in \mathfrak{A}$ være et givet element og antag, at $\lambda_0 \in \text{Sp}(a)$ med $|\lambda_0| = \|a\|$. Da findes en ren tilstand τ_0 på \mathfrak{A} med $\tau_0(a) = \lambda_0$.*

Bevis: Lad $C := \{\tau \in \mathcal{S}(\mathfrak{A}) \mid \tau(a) = \lambda_0\}$. Da $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ er en konveks mængde, følger af lemma B.6, at C er en ikke-tom konveks delmængde af $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$. Afbildningen $\mathcal{S}(\mathfrak{A}) \ni \tau \mapsto \tau(a) \in \mathbb{C}$ er en w^* -kontinuert afbildning. Da C er urbilledet af λ_0 under denne funktion, er C således w^* -afsluttet. Da \mathfrak{A} har enhed, er $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ w^* -kompakt – og dermed er C en ikke-tom konveks w^* -kompakt delmængde af $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$. Krein-Milman teorem ([Mur90, Thm.A.14]) giver nu, at mængden af ekstremale punkter i C er ikke-tom. Lad således $\tau_0 \in C$ være et ekstremalt punkt i C . Da er påstanden, at τ_0 er en ren tilstand. De ekstremale punkter i $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$ er præcis de rene tilstande ([Mur90, se beviset for cor.5.1.10]), så vi skal kun vise, at τ_0 er et ekstremalt punkt i $\mathcal{S}(\mathfrak{A})$. Antag, at $\tau_0 = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$, hvor $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{S}(\mathfrak{A})$. Da er $\|a\| = |\tau_0(a)| \leq \frac{1}{2}(|\tau_1(a)| + |\tau_2(a)|) \leq \|a\|$. Følgelig er $|\tau_1(a)| = |\tau_2(a)| = \|a\|$ – og dermed er $\tau_1(a) = \tau_2(a) = \tau_0(a) = \lambda_0$. ■

Definition B.8 En projektion p i en C^* -algebra \mathfrak{A} kaldes **uendelig**, netop hvis der findes en projektion $q \neq p$ i \mathfrak{A} , som opfylder, at $p \sim q \leq p$ (jf. [RLL00, def.5.1.1]).

Lemma B.9 *Lad \mathfrak{H} være et separabelt Hilbert rum, lad $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ være en konkret C^* -algebra og lad p være en projektion i \mathfrak{A} . Hvis p er uendelig, så er p en uendeligdimensional projektion.*

Bevis: Antag, at der findes en projektion $q \neq p$ i \mathfrak{A} , som opfylder, at $p \sim q \leq p$. Da følger af [RLL00, exerc.2.9 og 2.10], at $\dim(p(\mathfrak{H})) = \dim(q(\mathfrak{H}))$. Da $q \leq p$ og $q \neq p$, følger af [Mur90, thm.2.3.2], at $q(\mathfrak{H}) \subsetneq p(\mathfrak{H})$. Følgelig er $\dim(p(\mathfrak{H})) = \dim(q(\mathfrak{H})) = \infty$. ■

Lemma B.10 Hvis P er en uendeligdimensional (ortogonal) projektion i $\mathbb{B}(\ell_2)$, så er P ikke kompakt.

Bevis: Lad P være en uendeligdimensional projektion i $\mathbb{B}(\ell_2)$. Bemærk, at $\ker(I - P) = P(\ell_2)$. Af [MV97, cor.15.6] følger således umiddelbart, at P ikke er kompakt. ■

Lemma B.11 Lad \mathfrak{A} være en separabel C^* -algebra og lad τ være en tilstand på \mathfrak{A} . Lad $(\mathfrak{H}_\tau, \pi_\tau)$ være GNS-repræsentationen af \mathfrak{A} hørende til τ . Da er \mathfrak{H}_τ separabel.

Bevis: Lad h_τ være den kanoniske cykliske (enheds)-vektor for $(\mathfrak{H}_\tau, \pi_\tau)$ (jf. [Mur90, thm.5.1.1]) og lad $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ være en tæt delmængde af \mathfrak{A} . Da er $\pi_\tau(\mathfrak{A})h_\tau$ tæt i \mathfrak{H}_τ . Påstanden er nu, at $\{\pi_\tau(a_i)h_\tau \mid i \in \mathbb{N}\}$ er en tæt delmængde af \mathfrak{H}_τ . Givet $h \in \mathfrak{H}_\tau$ og $\varepsilon > 0$. Da findes $a \in \mathfrak{A}$, så $\|\pi_\tau(a)h_\tau - h\| < \frac{\varepsilon}{2}$ og endvidere findes $i_0 \in \mathbb{N}$, så $\|a - a_{i_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Følgelig er

$$\|\pi_\tau(a_{i_0})h_\tau - h\| \leq \|\pi_\tau(a_{i_0} - a)\| \|h_\tau\| + \|\pi_\tau(a)h_\tau - h\| \leq \|a_{i_0} - a\| + \|\pi_\tau(a)h_\tau - h\| < \varepsilon.$$

Lemma B.12 Lad p_1, p_2, q_1 og q_2 være projektioner i en C^* -algebra \mathfrak{A} . Da gælder

$$p_1 \perp q_1 \wedge p_2 \perp q_2 \wedge p_1 \sim p_2 \wedge q_1 \sim q_2 \Rightarrow p_1 + q_1 \sim p_2 + q_2.$$

Bevis: Antag, at $uu^* = p_1$, $u^*u = p_2$, $vv^* = q_1$, $v^*v = q_2$ og $p_1q_1 = p_2q_2 = 0$ for $u, v \in \mathfrak{A}$ og sæt $t := u + v$. Da er

$$\begin{aligned} tt^* &= uu^* + vv^* + uv^* + vu^* = p_1 + q_1 + up_2q_2v^* + vq_2p_2u^* = p_1 + q_1, \\ t^*t &= u^*u + v^*v + u^*v + v^*u = p_2 + q_2 + u^*p_1q_1v + v^*q_1p_1u = p_2 + q_2. \end{aligned}$$

Når man første gang hører resultatet fra følgende lemma, bliver man lidt forbløffet. Jeg havde plaget min vejleder, Søren Eilers, med nogle irriterende spørgsmål (for han kunne ikke umiddelbart svare på dem med det samme). Når jeg så spurgte om følgende resultat altid gjaldt, smilte han og svarede nogenlunde „Det kan jeg svare på: Ja, det gælder. Og beviset er nemt – eller nærmere ‚sygt‘.“ Beviset stammer, som antydtes, fra denne samtale med Søren Eilers – det bliver op til læseren at vurdere, om han/hun også synes, at beviset er ‚sygt‘.

Lemma B.13 Lad $\mathfrak{A} \neq \{0\}$ være en separabel C^* -algebra. Da findes en tro repræsentation (\mathfrak{H}, π) af \mathfrak{A} , som opfylder, at for alle projektioner $p \in \mathfrak{A} \setminus \{0\}$ er $\pi(p)$ en uendeligdimensional projektion og at \mathfrak{H} er separabel.

Bevis: Lad (\mathfrak{H}_0, π_0) være en tro repræsentation af \mathfrak{A} med \mathfrak{H}_0 separabel (jf. [Ped79, cor. 3.7.5]). Da har vi en familie $((\mathfrak{H}_0, \pi_0))_{k \in \mathbb{N}}$ af repræsentationer af \mathfrak{A} . Lad (\mathfrak{H}, π) betegne den direkte sum af familien $((\mathfrak{H}_0, \pi_0))_{k \in \mathbb{N}}$ af repræsentationer af \mathfrak{A} (se evt. [Res02, def.1.12]). Det er klart, at (\mathfrak{H}, π) er tro og at \mathfrak{H} er separabel.

Lad der være givet en projektion $p \in \mathfrak{A} \setminus \{0\}$. Da er $\pi_0(p)$ mindst 1-dimensional. Følgelig findes en enhedsvektor $h_0 \in \mathfrak{H}_0$, så $\pi_0(p)h_0 = h_0$. Sæt $h_i := (\delta_{i,k}h_0)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{H}$ for hvert $i \in \mathbb{N}$. Bemærk, at $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ er et ortonormalsystem i \mathfrak{H} og at $\pi(p)h_i = h_i$ for alle $i \in \mathbb{N}$. ■

Definition B.14 Lad \mathfrak{A} være en C^* -algebra. Vi siger, at to udvidelser

$$0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{E} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{A} \longrightarrow 0 \quad \text{og} \quad 0 \longrightarrow \mathbb{K} \xrightarrow{\iota'} \mathfrak{E}' \xrightarrow{\rho'} \mathfrak{A} \longrightarrow 0$$

af \mathfrak{A} med \mathbb{K} er **ækvivalente**, netop hvis der findes en isomorfi $\psi: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}'$, således at $\psi(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ og følgende diagram kommuterer (jf. iøvrigt [Dav96, §V.6])

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{K} & \xrightarrow{\iota} & \mathfrak{E} & \xrightarrow{\rho} & \mathfrak{A} \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \psi|_{\mathbb{K}} & & \cong \downarrow \psi & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{K} & \xrightarrow{\iota'} & \mathfrak{E}' & \xrightarrow{\rho'} & \mathfrak{A} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Fra [Dav96, thm.V.6.3] havest (en variant af) Voiculescus sætning:

Teorem B.15 (Voiculescu) Lad \mathfrak{A} være en separabel C^* -algebra. Da er alle trivielle udvidelser af \mathfrak{A} med \mathbb{K} ækvivalente.

Lemma B.16 Lad \mathfrak{H} være et Hilbert rum, lad $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ være en C^* -algebra og lad $U \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ være en unitær afbildning. Da er $(\text{Ad } U)|_{\mathfrak{A}}$ en $*$ -isomorfi af \mathfrak{A} på $(\text{Ad } U)(\mathfrak{A})$.

Bevis: Da $\|UTU^*\| = \|T\|$ for alle $T \in \mathbb{B}(\mathfrak{H})$, følger umiddelbart, at $\text{Ad } U$ er injektiv. ■

Lemma B.17 *Lad \mathfrak{H} være et Hilbert rum, lad $\mathfrak{A} \subseteq \mathbb{B}(\mathfrak{H})$ være en C^* -algebra, som indeholder de kompakte operatorer, $\mathbb{K}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}$. Antag, at $U = \mathbb{1}_{\mathbb{B}(\mathfrak{H})} + K$ er en unitær operator, hvor $K \in \mathbb{K}(\mathfrak{H})$. Da er $(\text{Ad}U)|_{\mathfrak{A}}$ en automorfi af \mathfrak{A} .*

Bevis: Ifølge lemma B.16 er det nok at vise, at $(\text{Ad}U)(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$. Da \mathbb{K} er et (lukket) ideal i $\mathbb{B}(\ell_2)$, følger af lemma B.16, at $(\text{Ad}U)|_{\mathbb{K}}$ er en automorfi af \mathbb{K} .

„ $(\text{Ad}U)(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A}$ “: Givet $A \in \mathfrak{A}$. Da er $(\text{Ad}U)(A) = UAU^* = A + KA + AK^* + KAK^* \in \mathfrak{A}$, da $\mathbb{K} \subseteq \mathfrak{A}$ og $KA + AK^* + KAK^* \in \mathbb{K}$.

„ $(\text{Ad}U)(\mathfrak{A}) \supseteq \mathfrak{A}$ “: Givet $A \in \mathfrak{A}$. Da er $(\text{Ad}U)(A) = UAU^* = A + KA + AK^* + KAK^* = A + K_0$, hvor $K_0 := KA + AK^* + KAK^* \in \mathbb{K}$. Da $(\text{Ad}U)|_{\mathbb{K}}$ er en automorfi, findes et $K_1 \in \mathbb{K} \subseteq \mathfrak{A}$, således at $(\text{Ad}U)(K_1) = K_0$. Følgelig er $(\text{Ad}U)(A - K_1) = (\text{Ad}U)(A) - (\text{Ad}U)(K_1) = A + K_0 - K_0 = A$. ■

Tillæg C

Nogle udeladte beviser

Bevis: (resten af beviset for sætning 2.4.9). „(a) \Rightarrow (b)“: Antag, at $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_A$ er et isoleret punkt. Da findes et $k \in \mathbb{N}$, så $C_A((x_1, \dots, x_k)) = \{x\}$. Følgelig findes kun een (højre)-uendelig sti begyndende i x_k og således kan x_k ikke have nogen sti til et element i Σ_0 .

„(b) \Rightarrow (a)“: Bemærk, at $i \in \Sigma_0$, hvis og kun hvis $C_A(i)$ indeholder mindst to (forskellige) elementer hvori i optræder uendelig ofte. Antag, at A ikke opfylder (I). Da findes et $i_0 \in \Sigma$, således at $\mu_k \notin \Sigma_0$ for ethvert multiindex $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathcal{M}_A$ opfyldende $k \in \mathbb{N}$ og $\mu_1 = i_0$. Lad der være givet $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C_A(i_0)$. Da findes et $k_1 \in \mathbb{N}$, så x_{k_1} optræder uendelig ofte i x og følgelig vil x_{k_1} ikke optræde uendelig ofte i noget andet element i $C_A((x_1, \dots, x_{k_1}))$. Hvis der findes et $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C_A((x_1, \dots, x_{k_1})) \setminus \{x\}$, da findes der et $k_2 > k_1$, så y_{k_2} optræder uendelig ofte i y og $x \notin C_A((y_1, \dots, y_{k_2}))$. Følgelig er x_{k_1} og y_{k_2} forskellige og ingen af elementerne x_{k_1} og y_{k_2} optræder uendelig ofte i noget element i $C_A((y_1, \dots, y_{k_2})) \setminus \{y\}$. Hvis der findes et $z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C_A((y_1, \dots, y_{k_2})) \setminus \{y\}$, da findes der et $k_3 > k_2$, så z_{k_3} optræder uendelig ofte i z og $y \notin C_A((z_1, \dots, z_{k_3}))$. Følgelig er x_{k_1}, y_{k_2} og z_{k_3} indbyrdes forskellige og ingen af elementerne x_{k_1}, y_{k_2} og z_{k_3} optræder uendelig ofte i noget element i $C_A((z_1, \dots, z_{k_3})) \setminus \{z\}$. Men da der kun er endelig mange elementer i Σ , vil denne proces bryde af. Følgelig findes $\mu \in \mathcal{M}_A$, så $C_A(\mu)$ er en singleton.

„(b) \Rightarrow (d)“: Antag, at der er givet $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathcal{M}_A \setminus \emptyset$, så $p_\mu = q_\mu = q_{\mu_k}$. Da $s_{\mu_1}^* p_{\mu_1} = s_{\mu_1}^*$, gælder der, at

$$p_\mu = p_\mu p_{\mu_1} = q_{\mu_k} p_{\mu_1} = \sum_{j \in \Sigma} A(\mu_k, j) p_j p_{\mu_1} = p_{\mu_1},$$

da $p_\mu \neq 0$. Følgelig er $p_\mu = q_\mu = p_{\mu_1} = q_{\mu_k}$ og $A(\mu_k, j) = \delta_{\mu_1, j}$.

Hvis $k = 1$, giver dette trivielt, at $C_A(\mu_1) = \{(\mu_1, \mu_1, \dots)\}$. Antag derfor, at $k \geq 2$. Givet et multiindex $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \in \mathcal{M}_A$, således at $\mu\nu \in \mathcal{M}_A$. Da må nødvendigvis $\nu_1 = \mu_1$. Da

$$0 \neq p_\nu = p_{\mu_1} p_\nu = p_\mu p_\nu,$$

er ifølge korollar 2.2.6 således $\mu = \nu$. Dermed har vi vist, at $C_A(\mu) = \{(\mu_1, \dots, \mu_k, \mu_1, \dots, \mu_k, \dots)\}$.

„(d) \Rightarrow (c)“: Antag negationen af (c). Vi antager altså, at der findes et $\gamma_0 \in \Gamma_A$, så A_{γ_0} er en permutationsmatrix og $\forall \gamma \in \Gamma_A (\gamma_0 \succeq \gamma \Rightarrow \gamma_0 = \gamma)$. Vælg et $i_1 \in \gamma_0$. Da findes præcis et element $x \in C_A(i_1)$ og x kan skrives på formen $(i_1, \dots, i_k, i_1, \dots, i_k, \dots)$ med $k \in \mathbb{N}$ og $i_1, \dots, i_k \in \gamma_0$ indbyrdes forskellige. Sæt $\mu = (i_1, \dots, i_k)$. Da er $q_\mu = q_{i_k} = p_{i_1}$. Da $\mathbb{1}_{\mathcal{O}} = \sum_{\nu \in \mathcal{M}_A^{k-1}} p_\nu$, er $p_{i_1} = \sum_{\nu \in \mathcal{M}_A^{k-1}} s_{i_1} p_\nu s_{i_1}^* = \sum_{\nu \in \mathcal{M}_A^{k-1}} p_{i_1 \nu} = p_\mu$ ■

Beviskitse: (for sætning 4.1.5). Bemærk først, at den nederste følge er præcis den seksleddede exakte følge $\mathcal{E}(I - A^\top)$.

Afbildningen δ (hhv. δ_2) svarer til standard måden vi identificerer $K_0(\mathcal{O}_A)$ (hhv. $K_0(\mathcal{O}_{A_{\Sigma(\Gamma_A \setminus H)}})$) med $\text{cok}(I - A^\top)$ (hhv. $\text{cok}(I - A_{\Sigma(\Gamma_A \setminus H)}^\top)$). Vi har set i sætning 2.8.11, at $\mathcal{O}_A/\mathcal{J}_H$ er kanonisk isomorf med $\mathcal{O}_{A_{\Sigma(\Gamma_A \setminus H)}}$. Vi har således umiddelbart, at δ og δ_2 er isomorfier og $\mu \circ \delta = \delta_2 \circ K_0(\pi)$, da dette gælder på frembringerne $[p_i]_0$, $i = 1, \dots, n$ for $K_0(\mathcal{O}_A)$. Da μ oplagt er surjektiv, er $K_0(\pi)$ også surjektiv. Af den cykliske seks-leddede exakte følge fra K -teori følger, at $K_1(\iota)$ er injektiv.

Alternativt bevis for at exponential afbildningen $\Delta_0 = 0$: Bemærk, at $[\pi(p_i)]_0$, $i \in \Sigma(\Gamma_A \setminus H)$ frembringer $K_0(\mathcal{O}_A/\mathcal{J}_H)$. Og ifølge [RLL00, prop.12.2.2] er $\Delta_0([\pi(p_i)]_0) = -[\mathbb{1}_{\mathcal{J}_H}]_1 = 0$, da $\exp(2\pi ip) = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_A} + p \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi i)^k / k! = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_A} + (\exp(2\pi i) - 1)p = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_A}$ for enhver projektion $p \in \mathcal{O}_A$.

Afbildningen δ_1 er præcis afbildningen givet i sætning 2.8.11(h) sammensat med isomorfien fra lemma 4.1.4 – så denne er en isomorfi og $[p_i]_0$, $i \in \Sigma(H)$ frembringer $K_0(\mathcal{J}_H)$. Da der oplagt gælder, at $(\delta \circ K_0(\iota))([p_i]_0) = (\lambda \circ \delta_1)([p_i]_0)$ for alle $i \in \Sigma(H)$, er også $\delta \circ K_0(\iota) = \lambda \circ \delta_1$.

Jeg vil nu prøve at skitsere et bevis for, at $K_1(\pi) \circ \xi^{-1} = \xi_2^{-1} \circ \beta$. Jeg har dog ikke rigtig sat mig ind i så meget omkring K_1 -grupperne, så det kan sikkert laves nemmere (og lidt mere stringent). Givet $x = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \ker(I - A^\top)$. Sæt $x' = \beta(x) = (x_{k_1+1}, \dots, x_n)^\top \in \ker(I - A_{22}^\top)$. Fra bemærkning 2.6.17 har vi defineret $v_x \in \text{Mat}_{|x|}(\mathcal{O}_A)$ og $v_{x'} \in \text{Mat}_{|x'|}(\mathcal{O}_{A_{22}})$. Bemærk, at for $i \leq k_1$ er $s_i^* s_i = \sum_{j=1}^n A(i, j) s_j s_j^* = \sum_{j=1}^{k_1} A_{11}(i, j) s_j s_j^*$. Således ses umiddelbart, at de første $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{k_1}|$ diagonalelementer i $v_x v_x^*$ og $v_{x'} v_{x'}^*$ udelukkende indeholder linearkombinationer af elementer fra $\{s_i s_i^* \mid i \leq k_1\}$. For hvert $a \in \text{Mat}_{|x|}(\mathcal{O}_A)$

kan vi klart betragte $\pi(a)$ som et element i $\text{Mat}_{|x|}(\mathcal{O}_{A_{22}})$ under identifikationen af $\mathcal{O}_A/\mathcal{J}_H$ med $\mathcal{O}_{A_{22}}$. Således er det nedre højre $|x'| \times |x'|$ hjørne af $\pi(v_x)$ er lig $v_{x'}$.

Vi har, at

$$\text{Mat}_{|x|}(\mathcal{D}_0) \cong \text{Mat}_{|x|}(\mathbb{C}^n) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Mat}_{|x|}(\mathbb{C}),$$

$$\text{Mat}_{|x|}(\mathcal{D}_0(\mathcal{O}_{A_{22}})) \cong \text{Mat}_{|x|}(\mathbb{C}^{n-k_1}) \cong \bigoplus_{i=k_1+1}^n \text{Mat}_{|x|}(\mathbb{C}).$$

Bemærk, at vi således kan vælge w_x , så komponenterne af w_x tilhørende de sidste $n - k_1$ direkte summander, er lig identitetsmatricen udenfor det nedre højre $|x'| \times |x'|$ hjørne. På naturlig vis kan vi også betragte $\pi(w_x)$ og $\pi(u_x)$ som elementer i $\text{Mat}_{|x|}(\mathcal{O}_{A_{22}})$. Lad $w_{x'} \in \text{Mat}_{|x'|}(\mathcal{D}_0(\mathcal{O}_{A_{22}}))$ være det nedre højre $|x'| \times |x'|$ hjørne af $\pi(w_x)$ – og bemærk, at $\pi(w_x) = I_{|x|-|x'|} \oplus w_{x'}$. Da er $w_{x'} w_{x'}^* = I - v_{x'} v_{x'}^*$ og $w_{x'}^* w_{x'} = I - v_{x'}^* v_{x'}$ og endvidere er $\pi(u_x) = \pi(v_x) + \pi(w_x) \sim_1 v_{x'} + w_{x'} =: u_{x'}$.

Bevisskitse for „ $\delta_1 \circ \Delta_1 \circ \xi_2^{-1} = \Delta$ “: Givet $x' \in \ker(I - A_{22}^\top)$. Sæt $x = (x_1, \dots, x_n)^\top = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$ og definér $v_{x'}, w_{x'}, u_{x'} \in \text{Mat}_{|x'|}(\mathcal{D}_0(\mathcal{O}_{A_{22}}))$ som i bemærkning 2.6.17. Bemærk, at $x_1 = \dots = x_{k_1} = 0$. Da vi på oplagt måde kan betragte $\mathcal{D}_0(\mathcal{O}_{A_{22}})$ som $\pi(\mathcal{D}_0)$, kan vi betragte w_x som det oplagte løft af $w_{x'}$ til $\text{Mat}_{|x|}(\mathcal{D}_0)$ (bemærk, at der ikke nødvendigvis gælder, at $x \in \ker(I - A^\top)$). Sæt $u_x = v_x + w_x$, da er $\pi(u_x) = u_{x'}$ og man ser nemt, at $v_x w_x^* = 0$, $w_x v_x^* = 0$, $v_x^* w_x = 0$ og $w_x^* v_x = 0$. Man kan forholdsvis nemt vise, at u_x er en partiel isometri.

Således er ifølge [RLL00, prop.9.2.4]

$$\delta_1(\Delta_1([u_{x'}]_1)) = \delta_1([I_{|x'|} - u_x^* u_x]_0 - [I_{|x'|} - u_x u_x^*]_0),$$

hvor $I_{|x'|}$ betegner identitetsmatricen i $\text{Mat}_{|x'|}(\mathcal{O}_A)$. Bemærk, at $v_x v_x^*$, $v_x^* v_x$, $w_x w_x^*$ og $w_x^* w_x$ er diagonalmatricer, og at antallet af $s_i s_i^*$ 'er i

$$\begin{aligned} v_x v_x^* & \text{ er } x_i \chi_{\mathbb{N}}(x_i) + \sum_{j|x_j < 0} (-x_j) A(j, i) = x_i \chi_{\mathbb{N}}(x_i) + \sum_{j > k_1 | x_j < 0} (-x_j) A(j, i), \\ v_x^* v_x & \text{ er } -x_i \chi_{\mathbb{N}}(-x_i) + \sum_{j|x_j > 0} x_j A(j, i) = -x_i \chi_{\mathbb{N}}(-x_i) + \sum_{j > k_1 | x_j > 0} x_j A(j, i), \\ w_x w_x^* & \text{ er } \begin{cases} |x'| - x_i \chi_{\mathbb{N}}(x_i) - \sum_{j > k_1 | x_j < 0} (-x_j) A(j, i), & \text{hvis } i > k_1, \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \\ w_x^* w_x & \text{ er } \begin{cases} |x'| + x_i \chi_{\mathbb{N}}(-x_i) - \sum_{j > k_1 | x_j > 0} x_j A(j, i), & \text{hvis } i > k_1, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \end{aligned}$$

Lad e_1, \dots, e_n betegne standardbasen for \mathbb{Z}^n . Således er

$$\begin{aligned} \delta_1([I_{|x'|} - u_x u_x^*]_0) &= \left[|x'| (e_1 + \dots + e_n) - \sum_{i=1}^{k_1} \left(0 - \sum_{j > k_1 | x_j < 0} x_j A(j, i) \right) e_i \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=k_1+1}^n \left(x_i \chi_{\mathbb{N}}(x_i) - \sum_{j > k_1 | x_j < 0} x_j A(j, i) + |x'| - x_i \chi_{\mathbb{N}}(x_i) + \sum_{j > k_1 | x_j < 0} x_j A(j, i) \right) e_i \right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{k_1} \left(|x'| + \sum_{j > k_1 | x_j < 0} x_j A(j, i) \right) e_i \right], \end{aligned}$$

da $x_1 = \dots = x_{k_1} = 0$. Endvidere er

$$\begin{aligned} \delta_1([I_{|x'|} - u_x^* u_x]_0) &= \left[|x'| (e_1 + \dots + e_n) - \sum_{i=1}^{k_1} \left(0 + \sum_{j > k_1 | x_j > 0} x_j A(j, i) \right) e_i \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=k_1+1}^n \left(-x_i \chi_{\mathbb{N}}(-x_i) + \sum_{j > k_1 | x_j > 0} x_j A(j, i) + |x'| + x_i \chi_{\mathbb{N}}(-x_i) - \sum_{j > k_1 | x_j > 0} x_j A(j, i) \right) e_i \right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{k_1} \left(|x'| - \sum_{j > k_1 | x_j > 0} x_j A(j, i) \right) e_i \right]. \end{aligned}$$

Således er

$$\begin{aligned}
 \delta_1(\Delta_1([u_{x'}]_1)) &= \delta_1([I_{|x'|} - u_x^* u_x]_0) - \delta_1([I_{|x'|} - u_x u_x^*]_0) \\
 &= \left[\sum_{i=1}^{k_1} \left(|x'| - \sum_{j>k_1|x_j>0} x_j A(j, i) - |x'| - \sum_{j>k_1|x_j<0} x_j A(j, i) \right) e_i \right] \\
 &= \left[- \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=k_1+1}^n x_j A(j, i) e_i \right] = [-A_{21}^T x'].
 \end{aligned}$$

Eksistensen af isomorfien ξ_1 følger nu automatisk, da både $K_1(\iota)$ og α er injektive og vi har verificeret eksistensen af de øvrige isomorfier samt kommutativiteten af diagrammet. ■

Litteraturliste

- [aHR97] Astrid an Huef and Iain Raeburn, *The ideal structure of Cuntz-Krieger algebras*, Ergodic Theory Dynam. Systems **17** (1997), no. 3, 611–624. MR 98k:46098
- [Ber97] Christian Berg, *Matematik 3GT – Topologi*, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, København, 1997.
- [BH03] Mike Boyle and Danrun Huang, *Poset block equivalence of integral matrices*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3861–3886 (electronic). MR 1 990 568
- [Bla98] Bruce Blackadar, *K-theory for operator algebras*, second ed., Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. MR 99g:46104
- [Boy02] Mike Boyle, *Flow equivalence of shifts of finite type via positive factorizations*, Pacific J. Math. **204** (2002), no. 2, 273–317. MR 1 907 894
- [Bro77] Lawrence G. Brown, *Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C^* -algebras*, Pacific J. Math. **71** (1977), no. 2, 335–348. MR 56 #12894
- [Car01] Toke Meier Carlsen, *C^* -algebras associated to general shift spaces*, Master’s thesis, Department of Mathematics, University of Copenhagen, February 2001.
- [CK80] Joachim Cuntz and Wolfgang Krieger, *A class of C^* -algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (1980), no. 3, 251–268. MR 82f:46073a
- [Cun81] Joachim Cuntz, *A class of C^* -algebras and topological Markov chains. II. Reducible chains and the Ext-functor for C^* -algebras*, Invent. Math. **63** (1981), no. 1, 25–40. MR 82f:46073b
- [Cun86] ———, *The classification problem for the C^* -algebras \mathcal{O}_A* , Geometric methods in operator algebras (Kyoto, 1983), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 123, Longman Sci. Tech., Harlow, 1986, pp. 145–151. MR 88a:46081
- [Dav96] Kenneth R. Davidson, *C^* -algebras by example*, Fields Institute Monographs, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. MR 97i:46095
- [Fol95] Gerald B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. MR 98c:43001
- [Fox02] Hans-Bjørn Foxby, *Noter til Matematik 4HA – Homologisk Algebra, e02*, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, København, 2002, Forelæsningsnoter – ikke publiceret.
- [Fra84] John Franks, *Flow equivalence of subshifts of finite type*, Ergodic Theory Dynam. Systems **4** (1984), no. 1, 53–66. MR 86j:58078
- [Hua94] Danrun Huang, *Flow equivalence of reducible shifts of finite type*, Ergodic Theory Dynam. Systems **14** (1994), no. 4, 695–720. MR 95k:46110
- [Hua95] ———, *Flow equivalence of reducible shifts of finite type and Cuntz-Krieger algebras*, J. Reine Angew. Math. **462** (1995), 185–217. MR 96m:46123
- [Hua96] ———, *The classification of two-component Cuntz-Krieger algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), no. 2, 505–512. MR 96d:46078
- [Hua01a] ———, *Automorphisms of Bowen-Franks groups of shifts of finite type*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), no. 4, 1113–1137. MR 2002i:37013
- [Hua01b] ———, *A cyclic six-term exact sequence for block matrices over a PID*, Linear and Multilinear Algebra **49** (2001), no. 2, 91–114. MR 2003a:15009
- [Jen99] Christian U. Jensen, *Matematik 3AL – Klassisk Algebra*, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, København, 1999.

- [Jen02] Ole Lund Jensen, *Symbolic Dynamic Systems and their Invariants*, Master's thesis, Department of Mathematics, University of Copenhagen, July 2002.
- [Kir] Eberhard Kirchberg, *The classification of Purely Infinite C^* -algebras using Kasparov's Theory*, to appear in the Fields Institute Communication series.
- [Kit98] Bruce P. Kitchens, *Symbolic dynamics*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1998, One-sided, two-sided and countable state Markov shifts. MR 98k:58079
- [KR97] Richard V. Kadison and John R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 15, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, Elementary theory, Reprint of the 1983 original. MR 98f:46001a
- [Lan82] E. Christopher Lance, *Tensor products and nuclear C^* -algebras*, Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 379–399. MR 84b:46069
- [LM95] Douglas Lind and Brian Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR 97a:58050
- [Lor97] Terry A. Loring, *Lifting solutions to perturbing problems in C^* -algebras*, Fields Institute Monographs, vol. 8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. MR 98a:46090
- [Mat97] Kengo Matsumoto, *On C^* -algebras associated with subshifts*, Internat. J. Math. **8** (1997), no. 3, 357–374. MR 98h:46077
- [Mat98] ———, *K -theory for C^* -algebras associated with subshifts*, Math. Scand. **82** (1998), no. 2, 237–255. MR 2000e:46087
- [Mes93] H. R. Messer, *Linear Algebra - Gateway to Mathematics*, Harper-Collins, 1993.
- [Mur90] Gerard J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1990. MR 91m:46084
- [MV97] Reinhold Meise and Dietmar Vogt, *Introduction to functional analysis*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1997, Translated from the German by M. S. Ramanujan and revised by the authors. MR 98g:46001
- [New72] Morris Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972, Pure and Applied Mathematics, Vol. 45. MR 49 #5038
- [Ped79] Gert K. Pedersen, *C^* -algebras and their automorphism groups*, London Mathematical Society Monographs, vol. 14, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1979. MR 81e:46037
- [Ped89] ———, *Analysis now*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 118, Springer-Verlag, New York, 1989. MR 90f:46001
- [Ped99] ———, *Pullback and pushout constructions in C^* -algebra theory*, J. Funct. Anal. **167** (1999), no. 2, 243–344. MR 2000j:46105
- [Phi00] N. Christopher Phillips, *A classification theorem for nuclear purely infinite simple C^* -algebras*, Doc. Math. **5** (2000), 49–114 (electronic). MR 2001d:46086b
- [PR96] David Pask and Iain Raeburn, *On the K -theory of Cuntz-Krieger algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **32** (1996), no. 3, 415–443. MR 97m:46111
- [PS75] Bill Parry and Dennis Sullivan, *A topological invariant of flows on 1-dimensional spaces*, Topology **14** (1975), no. 4, 297–299. MR 53 #9179
- [PV80] M. Pimsner and D. Voiculescu, *Exact sequences for K -groups and Ext-groups of certain cross-product C^* -algebras*, J. Operator Theory **4** (1980), no. 1, 93–118. MR 82c:46074
- [Rae88] Iain Raeburn, *On crossed products and Takai duality*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **31** (1988), no. 2, 321–330. MR 90d:46093
- [Res02] Gunnar Restorff, *Tensorprodukter i C^* -algebrateori – et fagprojekt i matematik*, Fagprojekt ved Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, 2002.

- [RLL00] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen, *An introduction to K -theory for C^* -algebras*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. MR 2001g:46001
- [Rør95] Mikael Rørdam, *Classification of Cuntz-Krieger algebras*, *K-Theory* **9** (1995), no. 1, 31–58. MR 96k:46103
- [Rør97] ———, *Classification of extensions of certain C^* -algebras by their six term exact sequences in K -theory*, *Math. Ann.* **308** (1997), no. 1, 93–117. MR 99b:46108
- [Rør02] ———, *Classification of nuclear, simple C^* -algebras*, *Classification of nuclear C^* -algebras. Entropy in operator algebras*, *Encyclopaedia Math. Sci.*, vol. 126, Springer, Berlin, 2002, pp. 1–145. MR 2003i:46060
- [Ros79] Jonathan Rosenberg, *Appendix to: “Crossed products of UHF algebras by product type actions”* [*Duke Math. J.* **46** (1979), no. 1, 1–23; MR 82a:46063] by O. Bratteli, *Duke Math. J.* **46** (1979), no. 1, 25–26. MR 82a:46064
- [Rud91] Walter Rudin, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, 1991. MR 92k:46001
- [Tho98] Anders Thorup, *Matematik 2AL – Algebra*, Matematisk Afdeling, Københavns Universitet, København, 1998.
- [Wil73] R. F. Williams, *Classification of subshifts of finite type*, *Ann. of Math. (2)* **98** (1973), 120–153; errata, *ibid.* (2) **99** (1974), 380–381. MR 48 #9769
- [WO93] N. E. Wegge-Olsen, *K -theory and C^* -algebras*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993, A friendly approach. MR 95c:46116