VORLESUNGEN

aus dem

FACHBEREICH MATHEMATIK

der

UNIVERSITÄT ESSEN

Heft 8

Jórn Olsson

AUS DEM NACHLASS VON RICHARD BRAUER

Ausarbeitung: Gerhard Schneider

1982

EINLEITUNG

In dem Nachlaß von Prof. Richard Brauer wurde eine große Menge handschriftlichen Materials gefunden. Der größte Teil enthielt Berechnungen und Überlegungen, die später veröffentlicht wurden, aber es gab auch vereinzelte Ergebnisse und Manuskriptteile, die für eine Veröffentlichung nicht ausgereift genug waren oder aber aus anderen Gründen nicht veröffentlicht wurden. Im Jahre 1979 wurde ich von Herrn Prof. Dr. Paul Fong gebeten, einen Teil dieses Materials durchzusehen; in der Zeit vom Sommersemester 1980 bis zum Sommersemester 1981 hielt ich nach Einladung von Herrn Prof. Dr. G. O. Michler an der Universität Essen eine Vorlesung, die auf diesem Material beruhte. Das vorliegende Buch ist eine Ausarbeitung eines Teils dieser Vorlesung. Es ist gedacht als ein Überblick über Themenkreise, die Prof. Brauer in den letzten Jahren seines Lebens beschäftigten; es enthält aber auch eine Reihe neuer Resultate. Wir haben uns hier auf Ergebnisse theoretischer Natur beschränkt, obwohl die Theorie durch Beispiele erläutert wird. Wo nichts anderes angegeben ist, stammen die Ergebnisse und Beweise von Prof. Brauer. An mehreren Stellen war es möglich, die Theorie oder die Beweise zu vereinfachen oder zu vervollständigen. Dies ist (mit Ausnahme von den Beispielen, die meistens von mir sind) immer im Text angegeben.

Die ersten zwei Paragraphen sind als Einführung gedacht und stellen die erforderlichen Vorkenntnisse dar. Außerdem ist in §2 ein Beispiel angegeben, und (2.13) stammt aus dem Nachlaß. Der Hauptteil der Ergebnisse von §3-§5 stammt aus einem Manuskript, das als eine Fortsetzung von Prof. Brauers Arbeit "On the structure of blocks of characters" gedacht war. In §3 werden Gruppen der Form $QC_G(Q)$, Q eine p-Untergruppe von G, behandelt, die natürlich für induktive Zwecke interessant sind. In §4 wird nochmals auf die Theorie von unteren Defektgruppen eingegangen, die von Prof. Brauer 1969 gegründet wurde und die in den letzten Jahren erneutes Interesse gefunden hat - siehe [10], [11], [14], [16]. §5 enthält neue Ergebnisse über die sogenannten Beiträge (contributions) der "subsections" zum inneren Produkt von Charakteren. Diese Beiträge haben interessante Eigenschaften und sollten noch weiter untersucht werden. Die Resultate von §6 sind hauptsächlich einem Manuskript entnommen, das Prof. Brauer mir 1975 gegeben hat. Es ist immer noch offen, ob die Theorie der π-Blöcke mehr als eine formale Spielerei ist, aber Beispiele deuten an, daß es vielleicht sinnvoll ist, π-Blöcke zu betrachten.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Fong und Herrn Prof. Michler danken, die die Erstellung dieses Buches ermöglicht haben. Ein besonderer Dank an Herrn Dr. G. Schneider, der sich mit der Ausarbeitung viel Mühe gegeben hat, sowie an Frau A. Kanfischer für das sorgfältige Schreiben des Manuskripts.

INHALTSVERZEICHNIS

	Einleitung	1
	Inhaltsverzeichnis	3
§1	Grundlagen und Voraussetzungen	5
§2	Doppelketten und "subsections"	15
§3	Gruppen der Form $G = Q \cdot C_G(Q)$	27
§4	Untere Defektgruppen und die Elementardivisoren der Cartanmatrizen	35
§5	Beiträge	48
§6	π-Blöcke	60
	Literaturverzeichnis	73

§1 GRUNDLAGEN UND VORAUSSETZUNGEN

In diesem Abschnitt werden zunächst grundlegende Begriffe und Sätze aus der Literatur zusammengestellt. Die dabei verwendeten Bezeichnungen sind großteils allgemein üblich; man vergleiche etwa [12], [20]. Einmal fest eingeführte Abkürzungen bleiben das ganze Buch hindurch gültig.

Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G|$ und ε eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel. Mit $\mathfrak{O}$ bezeichnen wir den Ring der ganzrationalen Zahlen in $\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Ferner sei p ein festgewählter Primteiler von $|G|$ und $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in $\mathfrak{O}$ mit der Eigenschaft

$$p \in \mathfrak{p} .$$

Schließlich sei $F := \mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ der Restklassenkörper der Charakteristik p. Die Gruppe G besitze über $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ genau $k(G)$ gewöhnliche Charaktere $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{k(G)}$.
Wir vereinbaren

$$\mathrm{Irr}(G) := \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{k(G)}\}$$

Dann ist $k(G)$ auch die Zahl der Klassen konjugierter Elemente, etwa $K_1, \dots, K_{k(G)}$.

$$\mathrm{Cl}(G) := \{K_1, K_2, \dots, K_{k(G)}\} .$$

Die Menge $\mathrm{Irr}(G)$ läßt sich mit Hilfe der zentralen Charaktere in Äquivalenzklassen einteilen. Dazu definieren wir für $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und $K \in \mathrm{Cl}(G)$

$$\omega_\chi(K) := |K| \cdot \frac{\chi(x)}{\chi(1)} ,$$

wobei $x \in K$ gewählt ist.

Zwei Charaktere χ, $\chi' \in \mathrm{Irr}(G)$ heißen p-äquivalent, falls für alle Klassen $K \in \mathrm{Cl}(G)$ gilt:

$$\omega_\chi(K) \equiv \omega_{\chi'}(K) \pmod{\mathfrak{p}}$$

(Man beachte, daß stets $\omega_\chi(K) \in \mathfrak{O}$).

Die so definierten p-Äquivalenzklassen von $\mathrm{Irr}(G)$ heißen (p-)Blöcke von G.

Die Menge aller Blöcke bezeichnen wir mit $\mathrm{Bl}(G)$.

Für jeden Block $B \in \mathrm{Bl}(G)$ sei $k(B)$ die Anzahl der irreduziblen Charaktere in B. Offenbar gilt:

$$k(G) = \sum_{B \in \mathrm{Bl}(G)} k(B) \;.$$

Weiter seien $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{l(G)}$ die p-modular irreduziblen Charaktere von G, die sog. Brauer-Charaktere.

$$\mathrm{IBr}(G) := \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{l(G)}\}.$$

Dann ist $l(G)$ auch die Anzahl der p-regulären Klassen von G.

Wir vereinbaren

$$\mathrm{Cl}_o(G) := \{K \in \mathrm{Cl}(G) \mid K \text{ p-regulär}\}$$

$$G^\circ := \bigcup_{K \in \mathrm{Cl}_o(G)} K$$

Es existieren nichtnegative ganze Zahlen d_{ij}, die sogenannten Zerlegungszahlen, so daß

$$\chi_i\,|_{G^\circ} = \sum_{j=1}^{l(G)} d_{ij}\,\phi_j \qquad i=1,2,\ldots,k(G)$$

Ist nun für $B \in \mathrm{Bl}(G)$ und $\chi_i \in B$ ein $d_{ij} \neq 0$, so sagen wir: $\phi_j \in B$. Dies ergibt eine eindeutige disjunkte Verteilung der ϕ_j auf die Blöcke von G .

Die Matrix $D_B := (d_{ij})_{i,j}$ $\quad \chi_i \in B \cap \mathrm{Irr}(G)$, $\phi_j \in B \cap \mathrm{IBr}(G)$

heißt Zerlegungsmatrix zum Block B .

Analog zu oben sei

$$l(B) := |\, B \cap \mathrm{IBr}(G) \,|$$

Wieder gilt:

$$l(G) = \sum_{B \in Bl(G)} l(B)$$

Schließlich definieren wir mittels

$$C_B := D_B^{\,t} \cdot D_B$$

die Cartanmatrix von B, eine $l(B) \times l(B)$ Matrix.

Für $B \in Bl(G)$ sei

$$d(B) := \max\{d \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existiert } \chi \in B \cap Irr(G) \text{ mit } p^d \mid \frac{|G|}{\chi(1)}\},$$

der Defekt von B.

Die Höhe $h(\chi)$ eines Charakters $\chi \in B \cap Irr(G)$ ist die kleinste nichtnegative ganze Zahl mit

$$p^{d(B)-h(\chi)} \quad \text{teilt} \quad \frac{|G|}{\chi(1)}.$$

Trivialerweise gilt, falls $p^a \parallel |G|$: $p^{a-d(B)+h(\chi)} \parallel \chi(1)$.

Wir vereinbaren weiter

$$k_i(B) := |\{\chi \in B \cap Irr(G) \mid h(\chi) = i\}| .$$

Sei $K \in Cl(G)$ und $x \in K$. Eine Sylow-p-Untergruppe D von $C_G(x)$ heißt Defektgruppe von K. Offenbar sind je zwei Defektgruppen von K in G konjugiert. Ist nun $|D| = p^{d(K)}$, so heißt $d(K)$ der Defekt von K.

Sei ferner $B \in Bl(G)$. Dann existiert ein $K \in Cl(G)$ mit

1) $d(K) = d(B)$

2) $\omega_\chi(K) \not\equiv 0 \pmod p$ für $\chi \in B \cap Char(G)$.

Die Defektgruppen von K, das diese Bedingungen erfüllt, heißen auch Defektgruppen von B.

Für diese gelten folgende Aussagen:

(1.1) Satz: Für $B \in Bl(G)$ sind je zwei Defektgruppen von B in G zueinander konjugiert.

Beweis: [20], Lemma 4.3B

<u>(1.2) Satz:</u> **Falls $P \lhd G$, wobei P eine p-Untergruppe von G ist, dann ist P in jeder Defektgruppe von $B \in Bl(G)$ enthalten.**

Beweis: [20], Lemma 6.2A

Wir vereinbaren weiter für eine p-Untergruppe D von G:

$Bl_D(G)$: Menge aller Blöcke von G mit D als Defektgruppe

$Cl_D(G)$: Menge aller Konjugationsklassen von G mit D als Defektgruppe

Wir wenden uns nun den <u>"induzierten" Blöcken</u> zu. Dazu sei $H < G$ und $b \in Bl(H)$ sowie $\psi \in b \cap Irr(H)$. Für $K \in Cl(G)$ setzen wir

$$(\omega_\psi)^G(K) := \sum_{L \in Cl(H), L \subset K} \omega_\psi(L)$$

Falls es ein $\chi \in Irr(G)$ gibt mit

$$(\omega_\psi)^G \equiv \omega_\chi \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}),$$

sagen wir, daß b^G <u>definiert</u> ist. Ist überdies $\chi \in B$ für ein $B \in Bl(G)$, dann schreiben wir $b^G = B$.

<u>(1.3) Satz:</u> Sei $H < G$, $b \in Bl_D(H)$. Falls $C_G(D) < H$, dann ist b^G definiert.

Dieser Satz erklärt folgende

<u>Definition:</u> Sei wieder $H < G$, $b \in Bl_D(H)$. Der Block b heißt <u>zulässig</u> (admissible) in G, falls es eine Defektgruppe D von b gibt mit

$$C_G(D) < H.$$

Hierzu ein einfaches, aber wichtiges Beispiel:

Es sei $x \in G$ ein p-Element und $b \in Bl(C_G(x))$. Dann ist b zulässig. Ist nämlich D eine Defektgruppe von b, so ist nach (1.2) $x \in D$, also $C_G(D) \leq C_G(x)$.

Für die Klasse der zulässigen Blöcke führen wir die nachfolgende Vereinbarung ein: Für $H \leq G$ und $B \in Bl(G)$ sei

$$Bl(H,B) := \{b \in Bl(H) \mid b \text{ zulässig in } G \text{ und } b^G = B\}.$$

In diesem Zusammenhang gelten:

<u>(1.4) Satz:</u> Falls $b \in Bl(H,B)$, dann existieren Defektgruppen D_0 und D von b bzw. B mit

$$D_0 \leq D$$
$$Z(D) \leq Z(D_0)$$

Beweis: [12], 57.2; [2], 3C

<u>(1.5) Satz:</u> Sei $H < K < G$, $b \in Bl(H)$. Der induzierte Block b^G ist genau dann definiert, wenn b^K und $(b^K)^G$ definiert sind. Es gilt in diesem Fall:

$$b^G = (b^K)^G .$$

Beweis: [12], 57.2

<u>(1.6) Brauers 1. Hauptsatz:</u> Sei D eine p-Untergruppe von G. Durch $b \to b^G$ wird eine bijektive Abbildung von $Bl_D(N_G(D)) \to Bl_D(G)$ erklärt.

Beweis: [20], Satz 6.3.

(1.7) Satz: Sei $B \in Bl_D(G)$. Dann ist $Bl(D \cdot C_G(D),B) \neq \emptyset$. Die Elemente von $Bl(D \cdot C_G(D),B)$ heißen Wurzeln von B in $D \cdot C_G(D)$.

Beweis: [12], 57.3

Wir lassen nun die Gruppe G durch Konjugation auf den Charakteren von Untergruppen wirken. Dazu sei $H \leq G$ und $\psi \in Irr(H)$, $x \in G$. Wir definieren $\psi^x \in Irr(H^x)$ vermöge $\psi^x(h^x) := \psi(h)$ für alle $h \in H$. Falls $b \in Bl(H)$, so bildet $\{\psi^x \mid \psi \in b\}$ einen Block von H^x, genannt b^x. Die Untergruppe von G, die einen vorgegebenen Block $b \in Bl(H)$ unter dieser Konjugation festläßt, heißt Trägheitsgruppe $T_G(b)$ von b.

$$T_G(b) = \{x \in N_G(H) \mid b^x = b\}$$

Ist ferner D eine Defektgruppe von b mit $C_G(D) \leq H$, so heißt die Zahl

$$e_b := |T_G(b) : D \cdot C_G(D)|$$

der Trägheitsindex von b.

Damit können wir nun Satz (1.7) verfeinern:

(1.8) Satz: Wie in (1.7) sei $b \in Bl(D \cdot C_G(D),B)$. Dann gilt:

$$Bl(D \cdot C_G(D),B) = \{b^x \mid x \in N_G(D)\}.$$

Schließlich erlaubt die Trägheitsgruppe auch Aussagen über die Defektgruppe von b^G:

(1.9) Satz: Sei D eine p-Untergruppe von G und $b \in Bl_D(D \cdot C_G(D))$. Es gilt:

1) Der Block b^G hat D als Defektgruppe genau dann, wenn

$$p \nmid |T_{N_G(D)}(b) : D \cdot C_G(D)|$$

2) Sei $a := \max_d \{p^d \text{ teilt } |T_{N_G(D)}(b) : DC_G(D)|\}$. Dann ist immerhin

$$d(b) + a = d(b^G).$$

Beweis: [2], 6A

Wenn die Untergruppe H zusätzlich normal in G ist, läßt sich eine Umkehrung des Begriffes "induzierter Block" finden:

Sei $H \triangleleft G$ und $b \in Bl(H)$, $B \in Bl(G)$. Der Block <u>B überdeckt b</u>, falls es ein $\chi \in B \cap Irr(G)$ gibt, so daß mindestens ein Konstituent von $\chi_{|H}$ in b liegt:

$$\text{es existiert } \psi \in b \cap Irr(H) \quad \text{mit} \quad \psi \mid (\chi_{|H}).$$

Aus dem Satz von Clifford läßt sich folgende Aussage relativ schnell ableiten:

(1.10) Satz: Sei $H < G$ und $b, b' \in Bl(H)$ sowie $B \in Bl(G)$. Es decke B den Block b. Dann gilt:

1) B deckt b' genau dann, wenn b und b' in G konjugiert sind.

2) Für alle $\psi \in b \cap Irr(H)$ existiert ein $\chi \in B \cap Irr(G)$ mit

$$\psi \mid (\chi_{|H})$$

3) Falls $b'^G = B$, dann deckt B auch den Block b'.

Beweis: [2], 4A

Ist speziell H eine normale p-Untergruppe von G, so hat jeder Block von G einen Charakter, der H im Kern hat.
Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich diese Aussage noch verschärfen:

<u>(1.11) Satz:</u> Sei P eine p-Untergruppe von G mit $G = P\cdot C_G(P)$. Dann enthält jeder Block $B \in Bl_p(G)$ genau einen irreduziblen Charakter ψ der Höhe 0 mit P im Kern.

Dieser nach (1.11) eindeutig bestimmte Charakter χ heißt auch <u>kanonischer Charakter von B</u> und verfügt über interessante Eigenschaften:

<u>(1.12) Satz:</u> Sei $B \in Bl_D(G)$ und $b \in Bl(D\cdot C_G(D),B)$ eine Wurzel von B. Weiter sei θ der kanonische Charakter von b, sowie $\chi \in B \cap Irr(G)$ und $x \in C_G(D)$. Dann ist

$$\chi(x) \equiv a \cdot \sum_{y \in N} \theta(y\,x\,y^{-1}) \pmod{\mathfrak{p}}$$

wobei N ein Nebenklassenvertretersystem von $D\cdot C_G(D)$ in $N_G(D)$ ist und

$$a = \frac{|D\cdot C_G(D)|}{|G|} \cdot \frac{\chi(1)}{\theta(1)} \in \mathbb{Q} \quad .$$

Ferner ist $h(\chi)$ gerade der Exponent der größten p-Potenz, die a teilt.

Offensichtlich läßt sich dieser Satz auch so umschreiben:

$$\chi|_{C_G(D)} \equiv a \cdot \theta^N|_{C_G(D)} \pmod{\mathfrak{p}}$$

Ein Beweis für das folgende Ergebnis steht in [12], 64.5 & 66.1

<u>(1.13) Satz:</u> Sei speziell $G = P \cdot C_G(P)$, $B \in Bl(G)$ und $\bar{G} = G/P$. Die Charaktere $\{\chi \in B \cap Irr(G) \mid P \leq \ker \chi\}$ bilden einen Block $\bar{B}$ von $\bar{G}$. Jeder Block von $\bar{G}$ entsteht auf diese Weise. Ist D eine Defektgruppe von B, so ist $\bar{D} = D/P$ eine Defektgruppe von $\bar{B}$. Es gilt weiter:

$$l(B) = l(\bar{B}) .$$

Ist auch noch $P \leq Z(G)$, so erfüllen die Cartanmatrizen die Gleichung

$$C_B = |P| \cdot C_{\bar{B}} .$$

Aus diesem Satz folgt (1.11) sofort mit $P = D$, da Blöcke vom Defekt 0 nur einen gewöhnlichen irreduziblen Charakter besitzen.

Für $B \in Bl(G)$ betrachten wir nun die Menge

$$V := \{\chi_{|G^\circ} \mid \chi \in B \cap Irr(G)\} .$$

Sie ist eine Teilmenge der Klassenfunktionen von G° in $\mathbb{C}$. Weiter sei M_B der von V erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul. Unter einer <u>Basismenge von B</u> verstehen wir eine $\mathbb{Z}$-Basis von M_B. Eine uns wohlbekannte Basismenge bilden z. B. die Brauer-Charaktere. Eine beliebige Basismenge von B bezeichnen wir nachfolgend mit $[B]$.

Damit lautet der 2. Hauptsatz von Brauer:

<u>(1.14) Satz:</u> Sei $\chi_i \in B \cap Irr(G)$ und $x \in G$ mit $x = \pi y$, wobei π ein p-Element und ein p'-Element ist. Dann gilt

$$\chi_i(x) = \sum_{b \in Bl(C_G(\pi),B)} \quad \sum_{\phi_k \in [b]} d_{ik}^{\pi} \quad \phi(y)$$

wobei $d_{ik}^{\pi} \in \mathbf{O} \cap \mathbb{Q}(\varepsilon')$ für eine $|\pi|$-te primitive Einheitswurzel ε'
Diese d_{ik}^{π} hängen nicht von y ab und heißen verallgemeinerte Zerlegungszahlen.

Beweis: [12], 63.2

Dieser Satz zeigt den Einfluß der Mengen $Bl(C_G(\pi),B)$ - π ein p-Element - auf die Werte der Charaktere in B. Aus diesem Grund werden im nächsten Kapitel derartige Paare (π,b) mit $b \in Bl(C_G(\pi),B)$ eingehender untersucht.

Zusätzlich zu den gewöhnlichen Orthogonalitätsrelationen für Charaktere gibt es noch die sog. Blockorthogonalitäten:

(1.15) Satz: Seien $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{k(B)}$ die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere im Block $B \in Bl(G)$. Sei ferner x ein p'-Element und y kein p'-Element. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{k(B)} \chi_i(x)\ \chi_i(y) = 0$$

Beweis: [20], 4.2c

§2 DOPPELKETTEN UND "SUBSECTIONS"

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Entwicklung eines Verfahrens, das die Berechnung der "subsections" (einschließlich ihrer Konjugierten) eines Blocks ermöglicht. Dazu zunächst folgende

Definition: Unter einer "subsection" eines Blockes B verstehen wir ein Paar (x,b), wobei x ein p-Element in G ist und $b \in Bl(C_G(x),B)$. Eine Defektgruppe von (x,b) ist eine Defektgruppe von b.

Wir untersuchen zuerst einmal die Beziehungen zwischen Defektgruppen der "subsections" von B und den Defektgruppen von B selbst.

Sei also (x,b) eine "subsection" von $B \in Bl(G)$ und R eine Defektgruppe von b. Dann ist wegen $R < C_G(x)$ und $\langle x\rangle \lhd C_G(x)$ sogar

$$x \in Z(R) .$$

Das heißt aber

$$R \cdot C_G(R) < C_G(x) .$$

Sei weiter b_R eine Wurzel von b und

$$T_R := T_{N_G(R)}(b_R) .$$

Wir können nun (1.9) mit $D = R$ anwenden und erhalten: Ist R keine Defektgruppe von B, so ist R auch keine Defektgruppe von $(b_R{}^{T_R})$. Sei daher Q eine Defektgruppe von $(b_R{}^{T_R})$. Dann ist Q natürlich auch eine Defektgruppe von

$$(b_R)^{Q\cdot C_G(R)}$$

– wieder wegen (1.9), denn offenbar gilt: $Q\cdot C_G(R) < T_R$.

Klar ist ferner:

$$R \lhd Q \quad \text{und} \quad R \neq Q.$$

Schließlich bedingt

$$C_G(Q) < C_G(R)$$

die Inklusion

$$Q\cdot C_G(Q) < Q\cdot C_G(R)$$

und wir finden eine Wurzel b_Q des Blocks $(b_R)^{Q\cdot C_G(R)}$. Für diese Wurzel b_Q gilt:

$$(b_Q)^G = \left(b_Q^{\,Q\cdot C_G(R)}\right)^G = \left(b_R^{\,Q\cdot C_G(R)}\right)^G = (b_R)^G = \left(b_R^{\,C_G(x)}\right)^G = b^G = B .$$

Wir haben dabei folgendes Untergruppendiagramm von G benutzt:

$$\begin{tikzcd}
& T_R \arrow[d, dash] & \\
& Q\cdot C_G(R) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
R\cdot C_G(R) \arrow[d, dash] & & Q\cdot C_G(Q) \arrow[d, dash] \\
R & & Q
\end{tikzcd}$$

Ist nun das so gefundene Q auch keine Defektgruppe von B, so können wir den soeben beschriebenen Prozeß so oft iterativ wiederholen, bis wir die gewünschte Defektgruppe von B erreicht haben.

Die zwei soeben beschriebenen Paare (Q,b_Q) und (R,b_R) nennen wir <u>verbun-</u>

den. Wie aus obiger Rechnung ersichtlich, müssen dafür folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. $R \lhd Q$
2. $b_R \in Bl_R(R \cdot C_G(R))$
3. $b_Q \in Bl_Q(Q \cdot C_G(Q))$
4. $b_Q^{Q \cdot C_G(R)} = b_R^{Q \cdot C_G(R)}$.

Der gerade durchgeführte iterative Prozeß wird allgemein so beschrieben:

Definition: Sei $B \in Bl_D(G)$. Eine Doppelkette ist eine Kette von Paaren

$$(D_0, b_0) \ , \ (D_1, b_1) \ , \ldots , \ (D_r, b_r)$$

wobei $D = D_0$ gilt und je zwei Paare (D_i, b_i) und (D_{i+1}, b_{i+1}) verbunden sind.

Ist $b_D = b_0$ eine Wurzel von $B \in Bl_D(G)$, so gilt bei derartigen Doppelketten

$$b_D^G = b_0^G = b_1^G = \ldots\ldots = b_r^G = B \ .$$

Für eine solche Wurzel b_D definieren wir ferner das Netz $A(D, b_D)$ als die Menge derjenigen Untergruppen von D, die in von (D, b_D) ausgehenden Doppelketten auftreten. Für dieses Netz gilt (siehe [7], Kap. 4):

(2.1) Satz: Sei $Q \in A(D, b_D)$ fest gewählt.

a) Ist $Q \le R \le D$, so ist auch $R \in A(D, b_D)$
b) Falls $g \in T_{N_G(D)}(b_D)$, dann ist $Q^g \in A(D, b_D)$
c) Wenn (D, b_D) , ... , (Q, b_Q) und (D, b_D) , ... , $(Q, b_Q{}')$ zwei Doppelketten sind, dann gilt $b_Q = b_Q{}'$

d) Für $R \triangleleft G$ gilt die Äquivalenz

$$R \in \mathring{A}(D,b_D) \quad \Longleftrightarrow \quad C_D(R) < R$$

und $$\left| \frac{T(b_Q) \cap Q\cdot C_G(R)}{Q\cdot C_G(Q)} \right| \not\equiv 0 \pmod p$$

e) Sei wieder $R \triangleleft Q$ und für alle $x \in G$ gelte $Q \in \mathring{A}(D^x, b_D{}^x)$ und $C_{D^x}(R) < R$. Dann ist $R \in \mathring{A}(D,b_D)$.

f) Für alle $R \in \mathring{A}(D,b_D)$ ist $C_D(Q) < Q$.

Der Teil c) dieses Satzes liefert die wichtige Aussage, daß wir zu vorgegebenen (D,b_D) und Q in eindeutiger Weise die Wurzel b_Q und damit das Endglied unserer Doppelkette von (D,b_D) durch Q bestimmen können. Dies erlaubt folgende

Definition: Es seien (D,b_D), ..., (Q,b_Q)
und (D,b_D), ..., (R,b_R)
zwei Doppelketten. Dann heißen die Paare (Q,b_Q) und (R,b_R) stark konjugiert, geschrieben $(Q,b_Q) \underset{s}{\sim} (R,b_R)$, falls es ein $x \in G$ gibt mit $Q^x = R$ und $b_Q{}^x = b_R$.

Geht aus dem Zusammenhang eindeutig hervor, daß Q und R zum gleichen Netz gehören, so schreiben wir kurz

$$Q \underset{s}{\sim} R .$$

Definition: Zwei "subsections" (x,b) und (x',b') heißen konjugiert, wenn sowohl x und x' als auch b und b' in G konjugiert sind. Wir schreiben $(x,b) \sim (x',b')$.

Naturgemäß sind nun nicht mehr alle "subsections" von Interesse, sondern nur noch ein Repräsentantensystem S der Klassen von subsections unter $\sim$. Der nächste Satz beschreibt, wie man ein solches S findet ([7], Kap. 6).

(2.2) Satz: Sei D eine Defektgruppe und b_D eine Wurzel von $B \in Bl_D(G)$. Ein Repräsentantensystem S der Konjugationsklassen von "subsections" unter $\sim$ läßt sich wie folgt bestimmen:
Es bezeichne R ein bereits gefundenes Repräsentantensystem der $\underset{S}{\sim}$-Klassen im Netz $\mathring{A}(D,b_D)$. Weiter sei mit Z_Q ein Repräsentantensystem der unter $T(b_Q)$ konjugierten Elemente von $Z(Q)$ so gewählt, daß für alle $u \in Z_Q$ gilt:

$$(*) \qquad \left| \frac{T(b_Q) \cap C_G(u)}{Q \cdot C_G(Q)} \right| \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p) .$$

Dann ist $$S = \bigcup_{Q \in R} \ \bigcup_{u \in Z_Q} (u, b_Q^{C_G(u)}) .$$

Die Bedingung $(*)$ ist für $u \in Z(Q)$ nur dann erfüllt, wenn $C_D(u) = Q$. Eine Kombination aus dem 2. Hauptsatz von R. Brauer und (2.2) ergibt

(2.3) Satz: $$k(B) = \sum_{(u,b_u) \in S} l(b_u) ,$$
wobei das b_u von der Form $b_Q^{C_G(u)}$ ist.

Ist speziell D eine TI-Untergruppe von G, so folgt daraus - bzw. durch direkten Beweis - für $B \in Bl_D(G)$:

$$k(B) - l(B) = k(b) - l(b)$$

für den eindeutig bestimmten Block $b \in Bl_D(N_G(D),B)$.

Im nächsten Abschnitt werden einige Beispiele abgehandelt, vgl. [17]. Wir untersuchen dabei Blöcke mit speziellen Defektgruppen - den verallgemeiner ten Quaternionengruppen. Für den Rest dieses Paragraphen gelten dazu folgende Vereinbarungen:

$$D = \langle x,y \mid x^{2^{n-1}} = y^4 = 1 \ , \ x^{2^{n-2}} = y^2 =: z \ , \ y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$$

$$|D| = 2^n \qquad n > 3$$

$$x_1 := z \quad \text{und} \quad x_m := x^{2^{n-m-1}} \ , \quad |\langle x_m\rangle| = 2^m \qquad 1 < m \leq n-1$$

$$D_{1m} = \langle x_m, y\rangle \qquad |D_{1m}| = 2^{m+1}$$

$$D_{2m} = \langle x_m, xy\rangle \qquad |D_{2m}| = 2^{m+1}$$

Auch diese Gruppen sind für $m > 2$ Quaternionengruppen. Schließlich ist allgemein bekannt:

1. Falls $|D| > 8$, so ist $\mathrm{Aut}(D)$ eine 2-Gruppe
2. Falls $|D| = 8$, so ist $\mathrm{Aut}(D) \cong S_4$.

Wir definieren $\qquad M_D := \{Q \leq D \mid C_D(Q) \leq Q\}$.

Dann besteht M_D genau aus den D-Konjugierten von D_{1m} , D_{2m} und $\langle x\rangle$.

<u>(2.4) Lemma:</u> Sei $|D| > 8$. Dann stimmen $A(D,b_D)$ und M_D überein mit möglicher Ausnahme der Untergruppen von D, die zu D_{11} oder D_{21} in D konjugiert sind, also

$$M_D - \{D_{11}^g, D_{21}^g \mid g \in D\} \subseteq A(D,b_D) \subseteq M_D \ .$$

Beweis: Sei $Q \in M_D$ und $Q_1 \trianglelefteq Q$, aber Q_1 nicht zyklisch der Ordnung 4. Dann gilt für alle $g \in G$: Falls $Q \leq D^g$, dann $Q \in M_{D^g}$ und $C_{D^g}(Q_1) \leq Q_1$.

Durch wiederholtes Anwenden von 2.1e folgt die Behauptung.

<u>(2.5) Lemma:</u> Für $|D| = 8$ erhalten wir: $M_D = \mathring{A}(D,b_D)$.

Beweis: Es ist $M_D = \{D,\langle x\rangle,\langle y\rangle,\langle xy\rangle\}$. Da diese Gruppen alle ihren eigenen Zentralisator enthalten, können wir wieder 2.1e anwenden.

<u>(2.6) Lemma:</u> Sei $Q \in \mathring{A}(D,b_D)$, aber Q sei keine Quaternionengruppe der Ordnung 8. Dann gilt für das eindeutig bestimmte b_Q der Doppelkette durch Q:

$$T(b_Q) = N_D(Q) \cdot C_G(Q) .$$

Beweis: Setze zunächst $Q_1 := N_D(Q)$. Da D eine Quaternionengruppe ist und $Q \in M_D$, folgt $|Q_1 : Q| \leq 2$.

<u>1. Fall:</u> $Q = D$

Der Block $b_Q^G = b_D^G$ hat D als Defektgruppe und wegen (1.9) gilt

$$|T(b_D) : D\cdot C_G(D)| \equiv 1 \pmod 2 .$$

Allerdings ist $T(b_D)/D\cdot C_G(D)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(D)$, die eine 2-Gruppe ist.

Daher $\quad T(b_D) = D\cdot C_G(D) = Q\cdot C_G(Q) = N_D(Q) \cdot C_G(Q) = T(b_Q)$.

<u>2. Fall:</u> $Q \neq D$. Dann ist $|Q_1 : Q| = 2$.

Suche eine Doppelkette von D durch Q:

$$(D,b_D) \quad ,\ldots\ldots, \quad (R,b_R) \;,\; (Q,b_Q) \quad .$$

Dann gilt: $R \neq Q$, $R < D$ und $Q \lhd R$, also $R = Q_1$.

Daher sind (Q_1,b_{Q_1}) und (Q,b_Q) verbunden und $Q_1 \leq T(b_Q)$, ja sogar (vgl. Seite 16)

$$Q_1\cdot C_G(Q) \leq T(b_Q) .$$

Wie im 1. Fall ist aber

$$T(b_Q) \;/\; Q\cdot C_G(Q)$$

eine 2-Gruppe, und erneutes Anwenden von (1.9) liefert das gewünschte Ergebnis.

(2.7) Lemma: Sei $Q \in \mathcal{A}(D,b_D)$ und $|Q| = 8$.

a) Für $D = Q$ ist $|T(b_Q) : Q \cdot C_G(Q)| = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right.$

b) Im Falle $D \neq Q$ gilt $|T(b_Q) : Q \cdot C_G(Q)| = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 6 \end{matrix} \right.$

Der Wert 6 tritt genau dann auf, wenn Q ein minimales Element in $\mathcal{A}(D,b_D)$ ist.

Beweis: a) Für $D = Q$ ist $\mathrm{Aut}(Q) \cong S_4$ und $T(b_Q)/Q \cdot C_G(Q)$ ist wieder isomorph zu einer Untergruppe von S_4. Da $b_Q^{\,G}$ gleichfalls Q als Defektgruppe hat, folgt auch a) aus (1.9) wegen $|S_4| = 3 \cdot 8$.

b) Falls $D \neq Q$, so liefert der gleiche Schluß wie im 2. Fall von (2.6), daß

$$N_D(Q) \cdot C_G(Q) \leq T(b_Q) ,$$

also ist 2 ein Teiler von $|T(b_Q) : Q \cdot C_G(Q)|$.

Da nach (1.9) aber $N_G(Q) \cdot C_G(Q)$ eine Sylow-2-Untergruppe von $T(b_Q)$ enthält, muß 2 bereits die größte 2-Potenz sein, die $|T(b_Q) : Q \cdot C_G(Q)|$ teilt.

Die letzte Behauptung folgt direkt aus (2.1d).

Wir wissen aus (2.4), daß die beiden zyklischen Gruppen der Ordnung 4, nämlich D_{11} und D_{12}, eine besondere Rolle spielen: Sie können, müssen aber nicht, in dem gegebenen Netz $\mathcal{A}(D,b_D)$ liegen. Wir benötigen daher folgende Fallunterscheidung für $n \geq 3$:

aa) D_{11}, $D_{12} \notin \mathcal{A}(D,b_D)$

ab) $D_{11} \in \mathcal{A}(D,b_D)$ und $D_{12} \notin \mathcal{A}(D,b_D)$

ba) $D_{11} \notin \mathring{A}(D,b_D)$ und $D_{12} \in \mathring{A}(D,b_D)$

bb) $D_{11}, D_{12} \in \mathring{A}(D,b_D)$.

Natürlich können die Fälle ab) und ba) aufgrund ihrer Symmetrie stets analog abgehandelt werden. Außerdem sind wir für $n = 3$ jetzt in der Lage, (2.7a) zu verschärfen. Im Falle aa) ist nämlich der Trägheitsindex genau 3 und im Falle bb) genau 1.

Der Beweis für das folgende Ergebnis sei dem Leser überlassen:

(2.8) Lemma: a) Für $n > 3$ sind $Q_1, Q_2 \in \mathring{A}(D,b_D)$ genau dann stark konjugiert, wenn sie bereits in D konjugiert sind.

b) Für $n = 3$ sind im Falle aa) alle Untergruppen der Ordnung 4 von D stark konjugiert; hingegen sind bei bb) keine zwei Untergruppen der Ordnung 4 von D stark konjugiert.

(2.9) Lemma: Wir übernehmen die Bezeichnungen von (2.2). Sei $Q \in \mathring{A}(D,b_D)$ und $u \in Z_Q$. Dann sind äquivalent:

1) $$\left| \frac{T(b_Q) \cap C_G(u)}{Q \cdot C_G(u)} \right| \equiv 1 \pmod 2$$

2) $C_D(u) = Q$.

Beweis: 1) => 2): folgt aus (2.2).

2) => 1): Dies ist für $Q = D$ gleichfalls trivial. Also sei $Q \neq D$ und $|Q| \neq 8$. Dann liefert (2.6) das Ergebnis. Falls aber $|Q| = 8$, Q Quaternionengruppe, so ist $Z(D) = Z(Q)$, was 2) verletzt.

Wir können aus (2.8) sofort ableiten, daß wir das Repräsentantensystem R der $\underset{s}{\sim}$-Klassen im Netz $A(D,b_D)$ als Teilmenge von

$$\{D\ ,\ \langle x\rangle\ ,\ D_{1m}\ ,\ D_{2m}\ \mid\ 1 \leq m \leq n-2\}$$

wählen können. Dabei ist natürlich im

Fall aa) $D_{11}, D_{21} \notin R$

Fall ab) $D_{21} \notin R$

Wegen (2.9) können wir (2.2) anwenden und erhalten

(2.10) Satz: Sei S' die folgende Menge von "subsections" des Blockes $B \in Bl_D(G)$

$$S' := \{(1,B)\ ,\ (Z,b_D^{C_G(z)})\ ,\ ((x_m)^k\ ,\ b_{\langle x\rangle}^{C_G(x_m)})\ \}$$

wobei $m = 2,3,\ldots,n-1$ und $k = 1,3,5,\ldots,2^{m-1}-1$.

Dann können wir die in (2.2) eingeführte Menge S wie folgt wählen:

Fall aa) $S = S'$

Fall ab) $S = S' \cup \{(y\ ,\ b_{\langle y\rangle}^{C_G(y)})\}$

Fall bb) $S = S' \cup \{(y\ ,\ b_{\langle y\rangle}^{C_G(y)})\ ,\ (xy\ ,\ b_{\langle xy\rangle}^{C_G(xy)})\}$.

Offenbar gilt $|S'| = 2^{n-2} + 1$, was unter Ausnutzung von (2.3) liefert:

(2.11) Korollar: aa) $k(B) \geq 2^{n-2} + 1$

ab) $k(B) \geq 2^{n-2} + 2$

bb) $k(B) \geq 2^{n-2} + 3$.

****

Wir behandeln als nächstes Blöcke mit abelschen Defektgruppen D. In diesem Fall erhalten wir für unsere Menge S ein einfacheres Ergebnis als bei den

Quaternionengruppen.

(2.12) Satz: Es sei B ein p-Block mit abelscher Defektgruppe D und Wurzel b_D. Ferner bezeichne

$$e_b := |T(b_D) : C_G(D)|$$

den Trägheitsindex. Schließlich sei $\{u_1,\ldots,u_t\}$ ein Repräsentantensystem der $T(b_D)$-Konjugationsklassen von D. Dann ist

$$S = \{(u_i , b_D^{C_G(u_i)}) \mid i=1,\ldots,t\}$$

ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen von "subsections" von B. Es gilt

$$k(B) - l(B) \geq \frac{|D|-1}{e_b} .$$

Bei zyklischen Defektgruppen gilt sogar Gleichheit.

Beweis: Wegen (2.1f) ist $A(D,b_D) = \{D\}$.

Außerdem $Z(D) = D$.

Bestimme nun die $T(b_D)$-Konjugationsklassen von D. Die Bedingung (*) aus (2.2) ist stets erfüllt, weil $(e_b,p) = 1$. Damit ist alles gezeigt.

(2.13) Satz: Sei (x,b) eine "subsection" von $B \in Bl_D(G)$ mit Defektgruppe $P \neq D$ und sei $p \neq 2$. Falls P zyklisch ist, so gilt schon

$$P = \langle x\rangle .$$

Beweis: Sei $P = \langle z\rangle$, $|P| = p^m$. Es existiert eine Defektgruppe D von B und eine Wurzel b_D von B in $D\cdot C_G(D)$, so daß $P \in A(D,b_D)$. Wegen $P \neq D$ existiert ein $Q \in A(D,b_D)$ mit $|Q:P| = p$. Aus (2.1f) folgt, daß Q nicht abelsch sein kann, also nach [13], Thm 5.4.4 sogar

$$Q = \langle z,y \mid y^p = 1 , y^{-1}zy = z^{1+p^{m-1}}\rangle .$$

Klar ist ferner $x \in P$.

Sei $\langle x\rangle \neq P$. Dann ist $y^{-1}xy = x$ und somit $Q < C_G(x)$. Es ist daher $Q\cdot C_G(Q) < C_G(x)$ und wegen $Q \in A(D,b_D)$ hat der Block $b_Q^{C_G(x)}$ eine Defektgruppe, die Q enthält - Widerspruch.

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch darauf hingewiesen, daß Alperin und Broué in [1] versucht haben, die hier beschriebene Theorie der Doppelketten durch geänderte Definitionen zu vereinfachen. Für eine direkte Verallgemeinerung siehe auch [18].

§ 3 GRUPPEN DER FORM $G = Q\cdot C_G(Q)$

Sei G eine endliche Gruppe mit einer p-Untergruppe Q, so daß

$$G = Q\cdot C_G(Q) .$$

Definiere $\bar{G} := G/Q$

und sei $\gamma : G \to \bar{G}$ die kanonische Projektion.

(3.1) Lemma: a) die Abbildung γ induziert eine Bijektion zwischen G° und $\bar{G}^\circ$, sowie zwischen $Cl(G^\circ)$ und $Cl(\bar{G}^\circ)$

b) Es ist $G^\circ = C_G(Q)^\circ$.

(3.2) Lemma: Sei D eine p-Untergruppe von G mit $Q \leq D$. Ferner sei $Y := \gamma^{-1}(C_{\bar{G}}(\bar{D}))$.

Es gilt: a) $Q\cdot C_G(D) \leq Y \lhd N_G(D)$

b) $D\cdot C_G(D) \lhd D\cdot Y$

c) $D\cdot Y/D\cdot C_G(D)$ ist eine p-Gruppe .

Beweis: Es ist $Y = \{y \in G \mid [y,d] \in Q$ für alle $d \in D\}$. Daraus folgen a) und b).

c) Wegen $D\cdot Y/D\cdot C_G(D) \cong Y / (D\cdot C_G(D) \cap Y)$ genügt es daher zu zeigen, daß Y° in $D\cdot C_G(D)$ liegt. Für $y \in Y^\circ$ gilt nach (3.1b) aber $y \in C_G(Q)^\circ$, also operiert y trivial auf Q - ebenso wie auf D/Q . Mit [13], 5.3.2 folgt $y \in C_G(D)$.

(3.3) Satz: Sei $B \in Bl_D(G)$ und b eine Wurzel von B in $D\cdot C_G(D)$. Sei

$\beta = b^{D\cdot Y}$, wobei Y wie in (3.2) gewählt ist.

a) $\bar{\beta}$ ist eine Wurzel von $\bar{B}$

b) Falls θ den kanonischen Charakter von b bezeichnet, so ist $\theta^{D\cdot Y}$ irreduzibel und sogar $\theta^{D\cdot Y} \in \beta$. Außerdem ist $\overline{\theta^{D\cdot Y}}$ der kanonische Charakter von $\bar{\beta}$.

Für den Beweis dieses Satzes müssen erst einige Zwischenergebnisse bereitgestellt werden, so z.B.

<u>(3.4) Satz (Olsson):</u> Sei G beliebig, D eine p-Untergruppe, $B \in Bl_D(G)$ und $b \in Bl_D(D\cdot C_G(D))$ eine Wurzel von B. Sei $D\cdot C_G(D) < X < N_G(D)$, wobei $|X : D\cdot C_G(D)|$ eine p-Potenz ist. Schließlich bezeichne θ den kanonischen Charakter von b. Dann ist θ^X ein irreduzibler Charakter in b^X mit Höhe 0 , der D im Kern hat.

Beweis: Es ist $T(b) = T(\theta)$. Nach (1.9) ist die Primzahl p kein Teiler von $|T(b) : D\cdot C_G(D)|$. Weil n. V. $|X : D\cdot C_G(D)|$ eine p-Potenz ist, folgt hieraus $T(b) \cap X = D\cdot C_G(D)$, also $T_X(\theta) = D\cdot C_G(D)$.
Nach den Sätzen von Clifford ist θ^X irreduzibel und wegen (1.10) gilt $\theta^X \in b^X$.

<u>(3.5) Lemma (Olsson):</u> Sei wieder $G = Q\cdot C_G(Q)$, $B \in Bl(G)$, $b \in Bl(H)$, wobei $H < G$.

a) Falls $\bar{b}^{\bar{G}} = \bar{B}$ und b^G definiert ist, so ist auch $b^G = B$.

b) Wenn $b^G = B$ und $\bar{b}^{\bar{G}}$ definiert ist, so gilt $\bar{b}^{\bar{G}} = \bar{B}$.

Beweis: Sei $\psi \in b \cap Char(H)$, $Q < \ker \psi$ und $L \in Cl(H^*)$. Dann gilt

$$\omega_\psi(L) = |L| \cdot \frac{\psi(x)}{\psi(1)} = |\bar{L}| \cdot \frac{\bar{\psi}(\bar{x})}{\bar{\psi}(1)} = \omega_{\bar{\psi}}(\bar{L}) .$$

Für $K \in Cl(G^*)$ ist

$$\omega_{\psi^G}(K) = \sum_{\substack{L \in CL(H^*) \\ L \subset K}} \omega_\psi(L) = \sum_{\bar{L} \subset \bar{K}} \omega_{\bar{\psi}}(\bar{L}) = \omega_{\bar{\psi}^G}(\bar{K}) .$$

zu a): Falls die Bedingung erfüllt ist, folgt

$$\omega_{\psi^G}(K) = \omega_{\bar{\psi}^G}(\bar{K}) = \omega_{\bar{B}}(\bar{K}) \equiv \omega_B(K) \quad (\text{mod } \mathfrak{p}).$$

Da b^G definiert war, folgt $b^G = B$.

Der Teil b) wird analog bewiesen.

Nun zum Beweis von (3.3):

Wir können (3.4) mit $X := D\cdot Y$ anwenden. Wegen (3.2) sind dann alle Voraussetzungen erfüllt und θ^{DY} ist ein irreduzibler Charakter von $B = b^{DY}$, der D im Kern hat. Damit ist auch $\overline{\theta^{DY}} \in \bar{B}$ und $\bar{D} \leq \ker \overline{\theta^{DY}}$ und $\overline{\theta^{DY}}$ ist der kanonische Charakter von $\bar{B}$. Nach (3.5) ist $\bar{\beta}$ eine Wurzel von $\bar{B}$.

(3.6) Bemerkung: Sei wieder G beliebig und $b \in Bl_D(D\cdot C_G(D))$ mit kanonischem Charakter θ . Dann ist

$$(\theta^{N_G(D)}, \theta^{N_G(D)})_{N_G(D)} = |T(\theta) : D\cdot C_G(D)| =: e_b .$$

Beweis:

$$(\theta^{N_G(D)}, \theta^{N_G(D)})_{N_G(D)} = (\theta^{T(\theta)}, \theta^{T(\theta)})_{T(\theta)} = (\theta, \theta^{T(\theta)}|_{D\cdot C_G(D)}) = (\theta, e_b\cdot\theta) = e_b$$

(3.7) Satz: Mit der Notation von (3.3) gilt

a) $T(b) \cap DY = D\cdot C_G(D)$

b) $T(\bar{B}) = \overline{T(b)\cdot Y}$

c) $e_b = e_{\bar{b}}$.

Beweis: a) Es ist $T(b) = T(\theta)$ und damit funktioniert der Beweis von (3.4).

(*) $$DY \lhd T(b)\cdot Y < N_G(D) ,$$

also $$T(b)\cdot Y / D\cdot Y \cong T(b)/(T(b)\cap D\cdot Y) = T(b)/(D\cdot C_G(D)).$$

Es ist $$|T(b)\cdot Y : D\cdot Y| = e_b = |T(b) : D\cdot C_G(D)| .$$

Sei $x \in T(b)$, also $b^x = b$. Dann $(b^{DY})^x = (b^x)^{(DY)^x} = b^{DY}$. Somit ist $\bar{x} \in T(\bar{\beta})$, also $\overline{T(b)\cdot Y} < T(\bar{\beta})$.

c) Schließlich ist

$$e_b = (\theta^{N_G(D)}, \theta^{N_G(D)})_{N_G(D)} = ((\overline{\theta^{DY}})^{\overline{N_G(D)}}, (\overline{\theta^{DY}})^{\overline{N_G(D)}})_{\overline{N_G(D)}} = e_{\bar{b}} ,$$

weil $\overline{N_G(D)} = N_{\bar{G}}(\bar{D})$.

b) Folgt mit c) und (*).

Der Satz (3.7) war nur der Induktionsanfang von

(3.8) Satz: Sei $B \in Bl_{D_0}(G)$, b_0 eine Wurzel von B, $b_0 = b_0{}^{D_0Y_0}$, mit $Y_0 = \gamma^{-1}(C_{\bar{G}}(\bar{D}_0))$. Ferner sei $(\bar{D}_0,\bar{\beta}_0)$, $(\bar{D}_1,\bar{\beta}_1)$, ..., $(\bar{D}_r,\bar{\beta}_r)$ eine Doppelkette. Definiere

$$Y_i = \gamma^{-1}(C_{\bar{G}}(\bar{D}_i))$$
$$\beta_i = \gamma^{-1}(\bar{\beta}_i), \qquad \text{wobei } \beta_i \in Bl(D_iY_i) .$$

Es existiert eine Doppelkette (D_0,b_0), (D_1,b_1), ..., (D_r,b_r) mit folgenden Eigenschaften

i) $b_i^{D_iY_i} = \beta_i$

ii) $T(b_i) \cap D_iY_i = D_i \cdot C_G(D_i)$

iii) $T(\bar{\beta}_i) = \overline{T(b_i)\cdot Y_i}$

iv) $e_{b_i} = e_{\bar{b}_i}$

Beweis: Für $i = 0$ wurde die Aussage in (3.7) gezeigt. Es sei daher die Behauptung bereits für $i-1$ $(i< r)$ bewiesen.

Zunächst benutzen wir (2.1), um zu überprüfen, daß $D_i \in \mathring{A}(D,b)$.

Nach Induktionsannahme gilt bereits $D_{i-1} \in \mathring{A}(D,b)$. Daher genügt es nachzuweisen, daß

a) $C_{D_{i-1}}(D_i) < D_i$

b) $p \nmid |(T(b_{i-1}) \cap D_{i-1}\cdot C_G(D_i)) : (D_{i-1}\cdot C_G(D_{i-1}))|$.

zu a) $x \in C_{D_{i-1}}(D_i)$ bedingt $\bar{x} \in C_{\bar{D}_{i-1}}(\bar{D}_i) < \bar{D}_i$, also $x \in D_i$.

zu b) Sei $B' \in Bl(D_{i-1}\cdot Y_i)$.

Da $(\bar{D}_{i-1},\bar{b}_{i-1})$ und $(\bar{D}_i,\bar{b}_i)$ zu einer Doppelkette gehören, folgt aus (3.5) mit der Induktionsannahme:

$$\beta_i^{D_{i-1}Y_i} = B' = \beta_{i-1}^{D_{i-1}Y_i} \underset{\text{Ind}}{=} b_{i-1}^{D_{i-1}Y_i} .$$

Nun hat $\bar{\beta}_{i-1}^{\overline{D_{i-1}Y_i}}$ die Gruppe $\bar{D}_{i-1}$ als Defektgruppe und somit ist D_{i-1} eine Defektgruppe sowohl von B' als auch von b_{i-1} . Da selbstverständlich $D_{i-1}\cdot C_G(D_i) < D_{i-1}Y_i$, folgt aus (1.4), daß auch der induzierte Block $b_i^{D_{i-1}\cdot C_G(D_i)}$ die Gruppe D_{i-1} als Defektgruppe besitzt. Der Satz (1.9) liefert mit $G = D_{i-1}\cdot C_G(D_i) < N_G(D_i)$, $D = D_{i-1}$, $b = b_{i-1}$ die Aussage ii) , also liegt D_i im Netz $\mathring{A}(D,b)$.

Zur Verdeutlichung dieser Rechnung folgt der benutzte Untergruppenverband von G:

$$\begin{tikzcd}
 & D_{i-1}Y_i \subset N_G(D_i) \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \arrow[dr, dash] & \\
D_{i-1}\cdot Y_{i-1} \arrow[dd, dash] & & D_i\cdot Y_i \arrow[dd, dash] \\
 & D_{i-1}\cdot C_G(D_i) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
D_{i-1}\cdot C_G(D_{i-1}) & & D_i\cdot C_G(D_i)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & B' & \\
\beta_{i-1} \arrow[ur] & & \beta_i \arrow[ul] \\
b_{i-1} \arrow[u] & \text{gesucht:} & b_i \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

Wir haben bisher bewiesen:

$(D_0,b_0),\dots,(D_i,b_i)$ ist eine Doppelkette.

Jetzt zu i): Es gilt $\beta_i^{D_{i-1}Y_i} = B'$ wie bereits gezeigt.

$$(b_i^{D_iY_i})^{D_{i-1}Y_i} = b_i^{D_{i-1}Y_i} = (b_i^{D_{i-1}\cdot C_G(D_i)})^{D_{i-1}Y_i} = (b_{i-1})^{D_{i-1}Y_i} = B'$$

Es ist $D_iY_i \triangleleft D_{i-1}Y_i$ und nach (1.10) deckt B' sowohl β_i als auch $b_i^{D_iY_i}$; somit sind diese zumindest konjugiert in $D_{i-1}Y_i$.

Weil aber $C_{D_{i-1}}(D_i) \leq D_i$, ist $D_{i-1} \cap D_i\cdot C_G(D_i) = D_i$.

Somit $D_{i-1}\cdot C_G(D_i) / D_i\cdot C_G(D_i) \cong D_{i-1} / D_{i-1}\cap C_G(D_i) = D_{i-1} / D_i$

und mit (1.9) folgt

$$T_{D_{i-1}\cdot C_G(D_i)}(b_i) = D_{i-1}\cdot C_G(D_i)$$

und damit

$$T_{\bar{D}_{i-1}\, C_{\bar{G}}(\bar{D}_i)}(\bar{\beta}_i) = \bar{D}_{i-1}\cdot C_{\bar{G}}(\bar{D}_i) = \overline{D_{i-1}Y_i}\,.$$

Daher gibt es nur einen Block in D_iY_i, der von B' bedeckt wird. Dies beweist die Behauptung:

$$b_i^{D_iY_i} = \beta_i .$$

Zu ii): Nach i) und (1.9) gilt

$$p \nmid |T(b_i) \cap D_iY_i : D_i\cdot C_G(D_i)| .$$

Wegen (3.3) ist andererseits $D_iY_i \,/\, D_i\cdot C_G(D_i)$ eine p-Gruppe. Dies beweist ii).

Es bleibt noch der Nachweis von iii) und iv):

Wie in (3.7) zeigt man, daß

$$T(b_i)\cdot Y_i \le T(\beta_i)$$

und aus einer Anwendung von (3.3) auf D_iY_i folgt, daß, falls θ der kanonische Charakter von b_i ist, auch $\overline{\theta^{D_iY_i}}$ der kanonische Charakter von $\bar{\beta}_i$ ist. Aus (3.6) folgt dann (mit $G = N_G(D_i)$):

$$e_{b_i} = e_{\bar{b}_i}$$

und damit sind alle Behauptungen bewiesen.

<u>(3.9) Satz:</u> Wir übernehmen die Bezeichnungen aus (3.8). Falls

$$D_iY_i \cap T(b_i) = D_i\cdot C_G(D_i) \qquad 1 \le i \le r \quad ,$$

dann ist $(\bar{D}_0,\bar{\beta}_0),\ldots,(\bar{D}_r,\bar{\beta}_r)$ eine Doppelkette, wobei wieder

$$\beta_i = b_i^{D_iY_i} .$$

Wie man aus (3.8) ersieht, ist die Voraussetzung in (3.9) unverzichtbar.

Beweis: Aus der zusätzlichen Voraussetzung des Satzes und (1.9) (mit $G = D_iY_i$ und $D = D_i$) folgt, daß β_i genau D_i als Defektgruppe hat. Nach

(1.13) ist dann $\bar{D}_i$ eine Defektgruppe von $\bar{\beta}_i$. Das Urbild von $\bar{D}_i \cdot C_{\bar{G}}(\overline{D_{i+1}})$ in G ist gerade $D_i Y_{i+1}$ und wir haben die folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
 & & D_i\, Y_{i+1} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[d, dash] & & \\
\beta_i \mid & D_i\, Y_i \arrow[dd, dash] & {} \arrow[d, dash] & D_{i+1}\, Y_{i+1} \arrow[dd, dash] & \mid \beta_{i+1} \\
 & & D_i \cdot C_G(D_{i+1}) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
b_i \mid & D_i\, C_G(D_i) & & D_{i+1}\, C_G(D_{i+1}) & \mid b_i
\end{tikzcd}$$

Es genügt aber zu zeigen - vgl. (3.5) -

$$\beta_i^{D_i Y_{i+1}} = \beta_{i+1}^{D_i Y_{i+1}} .$$

Nun, es ist:

$$\beta_i^{D_i Y_{i+1}} = b_i^{D_i Y_{i+1}} = \left(b_i^{D_i \cdot C_G(D_{i+1})}\right)^{D_i Y_{i+1}} =$$

$$= \left(b_{i+1}^{D_i \cdot C_G(D_{i+1})}\right)^{D_i Y_{i+1}} = b_{i+1}^{D_i Y_{i+1}} = \beta_{i+1}^{D_i Y_{i+1}} .$$

<u>(3.10) Korollar:</u> In der Situation von (3.9) gilt:

$$p \nmid |(T(b_i) \cap D_i \cdot Y_{i+1}) : D_i \cdot C_G(D_i)|$$

Beweis: Da $b_i^{D_i Y_{i+1}}$ wieder D_i zur Defektgruppe hat, folgt die Behauptung aus (1.9).

§4 UNTERE DEFEKTGRUPPEN UND DIE ELEMENTARDIVISOREN DER CARTANMATRIZEN

Da Defektgruppen stets nur bis auf Konjugation eindeutig bestimmt sind, ist es zweckmäßig, für die nachfolgenden Betrachtungen ein Repräsentantensystem $P(G)$ der Konjugiertenklassen von p-Untergruppen der Gruppe G zu wählen. Analog bezeichne $\pi(G)$ ein solches Vertretersystem der p-Elemente von G. Wir haben damit eine "Defektgruppenabbildung"

$$\delta : \quad Cl(G) \to P(G) \quad .$$

Die "unteren Defektgruppen" wurden zuerst von Brauer in [5] untersucht. Hier werden einige neue Ergebnisse beschrieben.

Zur Einführung dient das Folgende:
Sei hier der Körper F algebraisch abgeschlossen. Dann existiert bekanntlich eine Zerlegung des Zentrums Z der Gruppenalgebra FG in eine direkte Summe von Blockidealen:

$$Z = \bigoplus_{B \in Bl(G)} B \quad .$$

Daher ist

$$\mathrm{Hom}_F(Z,F) = \bigoplus_{B \in Bl(G)} \mathrm{Hom}_F(B,F) \quad .$$

Sei nun $D \in P(G)$ und $H \leq G$ mit

$$D \cdot C_G(D) \leq H \leq N_G(D) \quad .$$

Der Brauer-Homomorphismus

$$Br_D : \quad Z(FG) \to Z(FH)$$

induziert dann die Abbildung

$$\widetilde{Br}_D : \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(Z(FH),F) & \to & \mathrm{Hom}(Z(FG),F) \\ \phi & \to & \phi \circ Br_D \end{array}$$

Der Übersichtlichkeit halber vereinbaren wir noch für $K \in Cl(G)$, daß $\delta(K)$ eine Defektgruppe von K bezeichne und $K^* := \sum_{x \in K} x \in FG$.
Es gilt (vgl. [5]):

(4.1) Satz: Für jeden Block $B \in Bl(G)$ können eine Teilmenge $Y(B)$ von $Cl(G)$ und eine Teilmenge $\Delta(B) =: \{h_K \mid K \in Y(B)\}$ in $Hom(B,F)$ so gewählt werden, daß gilt:

a) $Cl(G) = \dot{\bigcup}_{B \in Bl(G)} Y(B)$

b) $\Delta(B)$ ist eine Basis von $Hom(B,F)$

c) Für $Q \in P(G)$ sei $Y_Q(B) := \{K \in Y(B) \mid \delta(K) = Q\}$;
für $K \in Y_Q(B)$ ist dann:
$$h_K \in \widetilde{Br}_Q \Big(\sum_{b \in Bl(N_G(Q),B)} Hom(b,F) \Big)$$

d) Für alle $Q \in P(Q)$ und alle $K, K' \in Y(B)$ mit $K \neq K'$ gilt
$$h_K(K^*) = 1 \quad , \quad h_K(K'^*) = 0$$

Wir vereinbaren ferner
$$m_B(Q) := |Y_Q(B)| \quad .$$
Diese Zahl $m_B(Q)$ heißt <u>Multiplizität</u> von Q als Unterdefektgruppe des Blockes B und ist unabhängig von der Wahl von $Y(B)$ und $\Delta(B)$. Die Gruppe Q selbst heißt <u>Unterdefektgruppe</u>, falls $m_B(Q) > 0$ ist. Eine solche Unterdefektgruppe liegt (bis auf Konjugation) stets in der Defektgruppe des entsprechenden Blocks.

Schließlich sei für ein p-Element $\pi \in \Pi(G)$:
$$Y_Q^\pi(B) := Y_Q(B) \cap \{K \in Cl(G) \mid \text{Der p-Teil jedes Elements aus } K \text{ ist konjugiert zu } \pi\}.$$

Damit wird $m_B^{(\pi)}(Q) := |Y_Q^\pi(B)|$ zu einem wohldefinierten Ausdruck.

Die folgenden Gleichungen sind offensichtlich richtig:

$$m_B(Q) = \sum_{\pi \in \Pi(G)} m_B^{(\pi)}(Q)$$

$$k(B) = \sum_{Q \in P(G)} m_B(Q)$$

$$l(B) = \sum_{Q \in P(G)} m_B^{(1)}(Q)$$

$$(*) \qquad m_B(Q) = \sum_{b \in Bl(N_G(Q),B)} m_b(Q)$$

$$(**) \qquad \sum_{\substack{Q \in P(G) \\ |Q| = p^r}} m_B^{(1)}(Q) = E_B(p^r) \quad ,$$

wobei $E_B(p^r)$ die Vielfachheit von p^r als Elementarteiler der Cartanmatrix von B bezeichnet.

<u>(4.2) Satz:</u> Sei $B \in Bl(G)$, $Q \in P(G)$. Es ist

$$m_B^{(1)}(Q) = \sum_{b \in Bl(N_G(Q),B)} m_b^{(1)}(Q)$$

Beweis: Siehe [16].

<u>(4.3) Korollar:</u> Falls $E_B(p^r) \neq 0$, wobei $0 < r < d(B)$, dann existieren $Q \in P(G)$, $|Q| = p^r$, und $b \in Bl(N_G(Q),B)$ mit

$$m_b^{(1)}(Q) \neq 0 \ .$$

Die Defektgruppe von b enthält Q echt.

Beweis: Aus (**) und (4.2) folgt die geforderte Existenz von Q und b.

Nach dem 1. Hauptsatz von Brauer kann B jedoch nicht Q als Defektgruppe haben.

<u>(4.4) Satz:</u> Sei $E_B(p^r) \neq 0$, wobei $0 < r < d(B)$. Dann existiert ein $Q \in P(G)$ mit $|Q| = p^r$ und $Q < R \leq N_G(Q)$, $Q \neq R$, sowie eine Wurzel $b \in Bl_D(D \cdot C_G(D), B)$ von B, so daß

$$R \in A(D,b) .$$

Für den induzierten Block $\beta = b^{N_G(Q)}$ gilt ferner:

$$E_\beta(p^r) \neq 0 .$$

Es sei darauf hingewiesen, daß Q nicht selbst im Netz $A(D,b)$ liegen muß. Ist die Defektgruppe nämlich z.B. eine Quaternionengruppe mit zentraler Involution i, so kann der Fall

$$l(B) = 3 \quad , \quad E_B(2) = 2$$

auftreten, aber $A(D,b)$ enthält keine Untergruppe der Ordnung 2 (vgl. §2).

<u>Beweis des Satzes (4.4):</u> Seien Q und β wie in (4.3), sowie R eine Defektgruppe von β. Wir wählen eine Wurzel b_R von β in $R \cdot C_G(R) \leq N_G(Q)$. Die gleichen Argumente wie in §2 zeigen, daß

$$R \in A(D,b)$$

für geeignete Wurzeln b und Defektgruppen D.

Es folgt ein Beispiel für die Berechnung von $E_B(p^r)$. Dazu sei B ein 2-Block mit Defektgruppe

$$D \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 .$$

Es können zwei Fälle auftreten:

a) $\quad e_b = 1 \qquad k(B) = 4 \qquad l(B) = 1$

b) $e_b = 3$ $k(B) = 4$ $l(B) = 3$

Im Fall b) gilt: $E_B(1) = 2$, denn es ist $l(B) = 3 = E_B(4)+E_B(2)+E_B(1)$.
Wegen $E_B(4) = 1$ genügt es zu zeigen:

$$E_B(2) = 0 .$$

Sei also $E_B(2) \neq 0$. Dann existieren ein $U < D$, $|U| = 2$ und ein Block $\beta \in Bl(N_G(U),B)$ mit $E_\beta(2) \neq 0$. Es sei $U = \langle z \rangle$, $z^2 = 1$. Wegen (4.4) ist D eine Defektgruppe von β . Da aber $z \in Z(C_G(z)) = Z(N_G(U))$, folgt

$$e_\beta = 1 \text{ und } l(\beta) = 1 .$$

Dies widerspricht $E_\beta(2) \neq 0$ und damit $E_B(2) \neq 0$.

Obiges Ergebnis gilt nicht allgemein für elementar-abelsche Defektgruppen. Im Falle $D \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $G \cong A_4 \times \mathbb{Z}_2$ ist nämlich $E_B(2) = 2$.

<u>(4.5) Satz:</u> Sei speziell $G = Q \cdot C_G(Q)$, wobei Q eine p-Untergruppe ist und $B \in Bl(G)$. Für $P \in P(G)$ gilt:

$$m_B^{(1)}(P) = \begin{cases} 0 & \text{falls } Q \nless P \\ m_{\bar B}^{(\bar 1)}(\bar P) & \phantom{\text{falls }} Q < P \end{cases}$$

(wie in §3 ist $\bar G = G/Q$, etc.).

Für die Cartanmatrix C_B gilt:

$$C_B = |Q| \cdot C_{\bar B}$$

Beweis: Ähnlich wie [16], 7.8

<u>Bemerkung:</u> Für die gewöhnlichen Multiplizitäten ist die Aussage von Satz (4.5) i.a. falsch, z.B. falls G eine p-Gruppe ist. Der Leser vergleiche hierzu (1.13).

Sei nun wieder $\pi \in \Pi(G)$. Definiere

$$k_\pi(B) := \sum_{b \in Bl(C_G(\pi),B)} l(b)$$

Dies ist die Anzahl der Spalten der verallgemeinerten Zerlegungsmatrix, die zur Sektion von π gehört. Es gilt deshalb

$$k(B) = \sum_{\pi \in \Pi(G)} k_\pi(B)$$

Das Ergebnis (4.7) wurde bereits von Brauer bewiesen. Eine Verallgemeinerung hiervon steht in [16], (5.11):

<u>(4.6) Satz. (Olsson):</u> Sei $Q \in P(G)$, $Q \lhd G$, $B \in Bl(G)$ und $\pi \in \Pi(G)$.

Definiere ferner

$$\Pi' := \{\pi' \in \Pi(C_G(Q)) \mid \pi' \underset{G}{\sim} \pi\}$$

und wähle $b \in Bl(C_G(Q),B)$. Dann gilt:

$$\sum_{\{P \in P(G) \mid Q < P\}} m_B^{(\pi)}(P) < \sum_{\pi' \in \Pi'} k_{\pi'}(b)$$

<u>(4.7) Korollar:</u> $\displaystyle\sum_{\{P \in P(G) \mid Q < P\}} m_B^{(1)}(P) < k_1(b) = l(b)$.

<u>(4.8) Korollar:</u> Wird in (4.7) zusätzlich $l(b) = 1$ vorausgesetzt und ist Q keine Defektgruppe von B, so gilt:

$$m_B^{(1)}(Q) = 0 \ .$$

<u>(4.9) Satz:</u> Sei $\pi \in \Pi(G)$, $\pi \neq 1$. Es ist

$$\sum_{\{Q \in P(G) \mid \pi^g \in Q \text{ für ein } g \in G\}} m_B^{(1)}(Q) < k_\pi(B)$$

Wir werden für (4.9) zwei Beweise angeben. Der erste Beweis wird mit den

Methoden aus [16], den sogenannten Blockzerlegungen, durchgeführt; der zweite benutzt Ideen von Brauer, vgl. [5].

Sei $B \in Bl(G)$ mit zugehörigem Blockidempotent $1_B \in Z(FG)$. Eine disjunkte Zerlegung von $Cl(G)$

$$Cl(G) = \dot{\bigcup_{B \in Bl(G)}} X(B)$$

heißt eine Blockzerlegung, falls für alle Blöcke $B \in Bl(G)$ gilt:
$\{K^* \cdot 1_B \mid K \in X(B)\}$ ist eine F-Basis von B.
In diesem Zusammenhang sagen wir schlicht: X ist eine Blockzerlegung (von G). Der folgende Satz zeigt, daß diese Blockzerlegungen eine Rolle für die Multiplizitäten spielen:

(4.10) Satz (Olsson): 1) Sei X eine Blockzerlegung von G. Für jedes $B \in Bl(G)$ sei $\Delta(B)$ die zu $\{K^* \cdot 1_B \mid K \in X(B)\}$ duale Basis von $Hom(B,F)$. Die Mengen $X(B)$ und $\Delta(B)$ besitzen die in (4.1) geforderten Eigenschaften.
2) Genügen umgekehrt $Y(B)$ und $\Delta(B)$ dem Satz (4.1), so ist $Y(B)$ eine Blockzerlegung von G.

Der Leser sei hierbei auch auf die Arbeit von Iizuka [15] hingewiesen.

Beweis: Sei $Q \in P(G)$. Definiere

$$I_Q := \ker Br_Q = \langle K^* \mid K \cap C_G(Q) = \emptyset \rangle$$
$$J_Q := \{K \in Cl(G) \mid K \cap C_G(Q) = \emptyset\} .$$

zu 1): Die geforderten Eigenschaften (4.1a) und (4.1b) sind trivial.
(4.1d): Seien $K, K' \in Y(B)$ beliebig.

$$h_K(K^*) = h_K(\sum_{B' \in Bl(G)} K^* \cdot 1_{B'}) = h_K(K^* \cdot 1_B) = 1 .$$

Analog folgt $h_K(K'^*) = 0$.

(4.1c): Sei $K \in Y_Q(B)$. Nach Definition von h_K liegt $B \cap I_Q$ in $\ker h_K$. Br_Q induziert einen Monomorphismus

$$B/B\cap I_Q \to \bigoplus_{b\in Bl(N_G(Q),B)} b$$

und $\widetilde{Br}_Q$ liefert einen Epimorphismus von

$$\bigoplus_{b\in Bl(N_G(Q),B)} Hom(b,F) \to Hom(B/B\cap I_Q,F) .$$

Da aber $B\cap I_Q$ in $\ker h_K$ liegt, ist auch (4.1c) erfüllt.

<u>Zu 2)</u> Es seien $Y(B)$ und $\Delta(B)$ wie in (4.1). Ferner seien $\alpha_i \in F$ gewählt mit

$$\sum_{K_i\in Y(B)} \alpha_i \cdot K_i^* \cdot 1_B = 0 .$$

Wenn nicht schon alle α_i verschwinden, so bezeichne K_j eine Konjugiertenklasse mit $\alpha_j \neq 0$, deren Defektgruppe Q maximale Ordnung hat. Es ist dann natürlich $K_j \in Y_Q(B)$. Wenn wir h_{K_j} auf die obige Gleichung anwenden, so ergibt dies:

$$0 = \alpha_j + \sum_i \alpha_i h_{K_j}(K_i^* \cdot 1_B) .$$

Dabei genügt es, die Summe nur über diejenigen K_i laufen zu lassen, deren Defektgruppe nicht Q ist und die $K_i \cap C_G(Q) \neq \emptyset$ erfüllen. (Bei den übrigen ergibt die Anwendung von h_{K_j} wegen (4.1c), (4.1d) bereits 0). Eine solche Konjugationsklasse K_i hat aber eine Defektgruppe, die ein Konjugiertes von Q enthält, was der Maximalität von $|Q|$ widerspricht.

<u>Definition:</u> Ein Unterraum $V \leq Z(G)$ heißt <u>blockinvariant</u>, falls $V\cdot 1_B \leq V$ für alle $B \in Bl(G)$.

Man kann dann leicht zeigen, daß für eine Blockzerlegung X von G mit

$A \subseteq Cl(G)$ und einem blockinvarianten $V := \langle K^* \mid K \in A\rangle$ die Menge $\{K^* \cdot 1_B \mid K \in A \cap X\}$ eine Basis von $B \cap V$ ist.

Beispiel: Für $\pi \in \Pi(G)$ ist die Menge

$\langle K^* \mid$ der p-Anteil jedes Elements aus K ist zu π konjugiert$\rangle$

blockinvariant. Dies wird im folgenden für $\pi = 1$ ausgenützt.

Nun zurück zum Beweis von (4.9):

Erster Beweis (Olsson): Sei $\pi \in \Pi(G)$ und oBdA. $\langle\pi\rangle \in P(G)$. Weiter sei

$$W_\pi := \{P \in P(G) \mid \pi^g \in P \text{ für ein } g \in G\}$$

und
$$\bar{W}_\pi := \{K \in Cl(G) \mid \delta(K) \in W_\pi\} .$$

Mit $S(1)$ wird die Menge aller p-regulären Konjugationsklassen von G bezeichnet; $I_{\langle\pi\rangle}$ und $J_{\langle\pi\rangle}$ seien wie oben gewählt. Aus den Definitionen folgt sofort:

$$Cl(G) - J_{\langle\pi\rangle} = \bar{W}_\pi$$

Für eine Blockzerlegung X von G erhalten wir aus der Blockinvarianz von $S(1)$:

$$\sum_{Q \in W_\pi} m_B^{(1)}(Q) = |X(B) \cap S(1)| - |X(B) \cap S(1) \cap J_{\langle\pi\rangle}|$$

$$= \dim({}^{X(B) \cap S(1)}/_{X(B) \cap S(1) \cap J_{\langle\pi\rangle}}) .$$

Nun induziert Br_π einen Monomorphismus

$$^{X(B)\cap S(1)}/_{X(B)\cap S(1)\cap J_{\langle\pi\rangle}} \to \bigoplus_{b \in Bl(C_G(\pi),B)} b \cap (S(1) \cap C_G(\pi)) ,$$

da $Br_{\langle\pi\rangle}(S(1)) \subseteq S(1) \cap C_G(\pi)$. Ein Dimensionsvergleich liefert

$$\sum_{Q \in W_\pi} m_B^{(1)}(Q) < \sum_{b \in Bl(C_G(\pi),B)} l(b) = k_\pi(B)$$

Zweiter Beweis (Brauer): Sei $Y(B)$ wie in (4.1) gewählt. Ferner sei

$$Y^1(B) := Y(B) \cap S(1) \ , \quad |Y^1(B)| = l(B) \ .$$

In ([5], §7) wird durch ein recht kompliziertes Argument gezeigt, daß es $l(B)$ Charaktere $\chi_i' \in B \cap Irr(G)$ gibt, so daß für $g_j \in K_j \in Y(B)$ gilt:

$$\det(\chi_i'(g_j))_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \ .$$

Sei $\ell' := \sum_{Q \in W_\pi} m_B^{(1)}(Q) < l(B)$.

Daher existiert eine $\ell' \times \ell'$ Unterdeterminante, die nicht kongruent zu 0 modulo $\mathfrak{p}$ ist:

$$\det(\chi_i(g_j))_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \ .$$

Dabei sind die Charaktere χ_i aus einer Teilmenge B'' von B und die Klassen K_j mit $g_j \in K_j$ aus einer Teilmenge Y'' von $Y^1(B)$ gewählt; die Defektgruppe eines jeden $K_j \in Y''$ muß ein Konjugiertes von π enthalten. Daher können wir oBdA. annehmen, daß

$$g_j \in C_G(\pi) \ .$$

Wegen $\chi_i(\pi g_j) \equiv \chi_i(g_j) \pmod{\mathfrak{p}}$ gilt auch

$$\det(\chi_i(\pi g_j))_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \ .$$

Nach dem 2. Hauptsatz von Brauer ist

$$\chi_i(\pi g_j) = \sum_{\substack{b \in Bl(C_G(\pi),B) \\ \phi \in IBr(C_G(\pi)) \cap b}} d_{i\phi}^\pi \cdot \phi(g_j)$$

Deswegen ist

$$\det\Big(\sum_{\dots} d_{i\phi}^\pi \cdot \phi(g_j)\Big)_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \ .$$

Jede Spalte dieser Matrix ist eine Linearkombination von Spalten verallgemeinerter Zerlegungszahlen. Nun war ℓ' die Zahl der Spalten der Matrix und damit gibt es mindestens soviele Spalten von Zerlegungszahlen. Diese sind aber gerade gegeben durch

$$\sum_{b \in Bl(C_G(\pi),B)} l(b) \quad .$$

<u>(4.11) Lemma:</u> Sei $H \triangleleft G$, $[G:H] = n$ und der Block $B \in Bl(G)$ decke n verschiedene Blöcke $b_1, b_2, \dots, b_n$ von H. Dann gilt für die Cartanmatrizen: $$C_B = C_{b_i} \quad .$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Cliffordtheorie, da $T(b_i) = H$.

<u>(4.12) Satz:</u> Sei $Q \in P(G)$ und $Q \triangleleft G$; $B \in Bl(G)$, $b \in Bl(Q \cdot C_G(Q),B)$. Ferner gelte $T(b) = Q \cdot C_G(Q)$. Dann ist wieder $C_B = C_b$. Falls ferner $m_B^{(1)}(P) \neq 0$ für ein $P \in P(G)$, so ist $Q \leq P$. Es gilt dann: $$m_B^{(1)}(Q) = E_B(|Q|) \quad .$$

Beweis: Nach (4.11) ist $C_B = C_b$. Aus dem Brauerschen Beweis von (4.9) folgt die Existenz von Charakteren $\chi_i \in B \cap Char(G)$ mit

$$\det(\chi_i(g_j))_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad ,$$

wobei $g_j \in K_j \in Y^1(B)$. Wir müssen daher zeigen, daß für jedes $K_j \in Y^1(B)$ unser Q in einer Defektgruppe von K_j liegt:
Jedes χ_i wird von einem Charakter von $Q \cdot C_G(Q)$ induziert. Daher verschwindet χ_i auf $G - Q \cdot C_G(Q)$. Falls nun ein $K_j \in Y^1(B)$ nicht in $Q \cdot C_G(Q)$ enthalten ist, liefert die Aussage

$$\chi_i(g_j) = 0 \quad \text{für alle} \quad \chi_i \in B \cap Char(G)$$

einen Widerspruch zur Regularität obiger Matrix. Dies erzwingt, daß K_j in $(Q \cdot C_G(Q))^* = (C_G(Q))^*$ enthalten ist, und die Behauptung ist bewiesen. Die letzte Gleichung des Satzes folgt aus (4.1):

$$E_B(|Q|) = \sum_{\substack{P \in \mathfrak{P}(G) \\ |P|=|Q|}} m_B^{(1)}(P) = m_B^{(1)}(Q)$$

Dieser Satz (4.12) kann zum Beispiel in der folgenden Situation angewandt werden:

Sei D eine Defektgruppe von B und $m_B^{(1)}(Q) \neq 0$. Sei weiter $H := N_G(Q)$. Es existiert ein $\beta \in Bl(H,B)$ mit $m_\beta^{(1)}(Q) \neq 0$ nach (4.3). Ferner sei R eine Defektgruppe von β und b_D eine Wurzel von B. Wir können oBdA. annehmen:

$$R \in \mathring{A}(D,b_D)$$
$$\beta = b_R^{\,H} \quad \text{für ein } b_R \in Bl_R(R\cdot C_G(R)) .$$

Behauptung: Falls $T(b_R) \le Q\cdot C_G(Q)$, dann gilt für $\beta^* = b_R^{\,Q\cdot C_G(Q)}$

$$T_H(\beta^*) = Q \cdot C_G(Q) .$$

In diesem Falle können wir (4.12) anwenden, wobei $G=H$, $B=\beta$, $Q=Q$ und $b=\beta^*$ gesetzt werden. Wir müssen aber noch die Behauptung beweisen:

Trivialerweise ist $Q \cdot C_G(Q) \le T_H(\beta^*)$.

Umgekehrt sei $t \in T_H(\beta^*)$; dann gilt

$$\beta^* = b_R^{\,Q\cdot C_G(Q)} = \left(b_R^{\,Q\cdot C_G(Q)}\right)^t = \left(b_R^{\,t}\right)^{Q\cdot C_G(Q)} = (\beta^*)^t$$

Da $R\cdot C_G(R) \le T(b_R) \le Q\cdot C_G(Q)$ und $(\beta^*)^H = \beta$ unser R als Defektgruppe hat, hat auch β^* gerade R als Defektgruppe und R^t ist eine Defektgruppe von $(\beta^*)^t$. Also sind R und R^t bereits in $Q\cdot C_G(Q)$ konjugiert. Es existiert somit ein $t_1 \in Q\cdot C_G(Q)$ mit $t \cdot t_1^{-1} \in N_H(R)$. OBdA. können wir daher annehmen, daß $t \in N_H(R)$. Sowohl b_R als auch $b_R^{\,t}$ sind dann Wurzeln von β^* in $R\cdot C_G(R)$. Nach (1.8) gilt:

$$b_R \sim b_R^{\ t} \quad \text{in} \quad N_G(R) \cap Q\cdot C_G(Q) \ .$$

Sei nun $t_2 \in N_G(R) \cap Q\cdot C_G(Q)$ mit $b_R^{\ t\cdot t_2} = b_R$. Dann ist $t\cdot t_2 \in N_G(R)$ und $t\cdot t_2 \in T(b_R) \leq Q\cdot C_G(Q)$ nach Voraussetzung. Also

$$t \in Q \cdot C_G(Q) \ .$$

In diesem Zusammenhang kann auch der folgende Satz aus [16] von Nutzen sein:

<u>(4.13) Satz:</u> Sei $Q \in P(G)$, $Q \triangleleft G$, $B \in Bl(G)$ und $b \in Bl(Q\cdot C_G(Q),B)$. Dann

$$m_B(Q) \leq m_b(Q)$$
$$m_B^{(1)}(Q) \leq m_b^{(1)}(Q) \ .$$

<u>(4.14) Folgerung:</u> (Notation wie oben) Falls $m_B^{(1)}(Q) \neq 0$, dann existiert ein $b \in Bl(Q\cdot C_G(Q),B)$ mit $m_b^{(1)}(Q) \neq 0$. Außerdem ist in der Faktorgruppe $Q\cdot C_G(Q) \ / \ Q$:

$$m_b^{(1)}(Q) = m_{\bar{b}}^{(1)}(\bar{1})$$

Beweis: Man verwende (4.2), (4.13) und (4.5) .

§ 5 BEITRÄGE

Allgemeine Ergebnisse über Beiträge wurden zuerst in [4] bewiesen, über die "subsection" (1,B) jedoch schon in [8]. Hier werden nun neue Resultate gezeigt.

Zunächst eine kurze Einführung:

Sei $B \in Bl(G)$ und $\chi_1, \chi_2 \in Irr(B)$. Dann ist

$$(\chi_i,\chi_j)_G = \delta_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi_i(x) \overline{\chi_j(x)}$$

$$= \sum_{\pi \in \Pi(G)} \frac{1}{|C_G(\pi)|} \sum_{y \in C_G(\pi)^*} \chi_i(\pi y) \overline{\chi_j(\pi y)}$$

$$= \sum_{\pi \in \Pi(G)} \frac{1}{|C_G(\pi)|} \sum_{y \in C_G(\pi)^*} \sum_{\phi_k, \phi_h \in IBr(C_G(\pi))} d_{ik}^{\pi} \overline{d_{jk}^{\pi}} \phi_k(y) \overline{\phi_h(y)} .$$

Die Zahlen d_{ik}^{π} sind die verallgemeinerten Zerlegungszahlen (vgl. §1).

Zur Vereinfachung schreiben wir kurz

$$\gamma_{kh}^{\pi} := \frac{1}{|C_G(\pi)|} \sum_{y \in C_G(\pi)^*} \phi_k(y) \overline{\phi_h(y)} .$$

Dann ist $(\gamma_{kh}^{\pi})_{h,k}$ die Inverse der Cartanmatrix von $C_G(\pi)$.

Liegen nun ϕ_k und ϕ_h in verschiedenen Blöcken von $C_G(\pi)$, so ist $\gamma_{kh}^{\pi} = 0$ und wir erhalten

$$(\chi_i,\chi_j)_G = \sum_{\pi} \sum_{\phi_k,\phi_h} d_{ik}^{\pi}\, \gamma_{kh}^{\pi}\, \overline{d_{jh}^{\pi}}$$

$$= \sum_{\pi} \sum_{b\in \mathrm{Bl}(C_G(\pi))} \sum_{\phi_k,\phi_h\in \mathrm{IBr}(b)} d_{ik}^{\pi}\, \gamma_{kh}^{\pi}\, \overline{d_{jh}^{\pi}}$$

$$=: \sum_{\pi} \sum_{b} m_{ij}^{(\pi,b)} \quad .$$

Hier ist für $b \in \mathrm{Bl}(C_G(\pi))$:

$$m_{ij}^{(\pi,b)} := \sum_{\phi_k,\phi_h\in \mathrm{IBr}(b)} d_{ik}^{\pi}\, \gamma_{kh}^{\pi}\, \overline{d_{jh}^{\pi}}$$

der <u>Beitrag</u> der "subsection" (π,b) von B zum inneren Produkt $(\chi_i,\chi_j)_G$.

Mit $s := (\pi,b)$, π und b wie oben, durchläuft s ein Repräsentantensystem S der Konjugationsklassen von "subsections" von B. Daher ist

$$\delta_{ij} = (\chi_i,\chi_j) = \sum_{s\in S} m_{ij}^{s} \quad .$$

Für $\pi \in \Pi(G)$ bezeichnen wir mit $S(\pi)$ die p-Sektion von π, also die Menge aller Elemente aus G, deren p-Anteil in G zu π konjugiert ist. Für eine "subsection" $s = (\pi,b)$ des Blockes B definieren wir eine Klassenfunktion χ_i^s von G vermöge

$$\chi_i^s(x) := \begin{cases} 0 & x \notin \bigcup_{K\in \mathrm{Cl}(G)\cap S(\pi)} K \\ \sum_{\phi_j\in \mathrm{IBr}(C_G(\pi))\cap b} d_{ij}^{\pi}\, \phi_j(y) \ , & \text{falls } x = \pi y \ , \ y \in C_G(\pi). \end{cases}$$

Es ist dann

$$\chi_i = \sum_{s\in S} \chi_i^s$$

und für zwei "subsections" s und t:

$$(\chi_i^s, \chi_j^t)_G = \delta_{st}\, m_{ij}^s \quad .$$

<u>Ein Beispiel:</u> Sei B ein Block mit Defektgruppe $D \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $k(B) = 4$, $l(B) = 3$ und Trägheitsindex 3 (siehe z. B. [6]), sei $z \in D-\{1\}$. Dann ist

$$S = \{(1,B)\ ,\ (z,b)\}$$

und $l(b) = 1$.

Wegen $z^2 = 1$ sind die verallgemeinerten Zerlegungszahlen schon ganze Zahlen. Es kommen also nur die Werte $+1$ und -1 in Frage. Aus der Definition von $m_{ij}^{(z,b)}$ folgt

$$(m_{ij}^{(z,b)})_{i,j} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Es folgt

$$(m_{ij}^{(1,B)})_{i,j} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 3 & \mp 1 & \mp 1 & \mp 1 \\ \mp 1 & 3 & \mp 1 & \mp 1 \\ \mp 1 & \mp 1 & 3 & \mp 1 \\ \mp 1 & \mp 1 & \mp 1 & 3 \end{bmatrix} .$$

****

Der Einfachheit halber schreiben wir

$$(m_{ij}^s)_{i,j} =: M^s \quad .$$

Wenn p^a die höchste p-Potenz ist, die $|G|$ teilt und ε_1 eine primitive p^a-te Einheitswurzel bezeichnet, so liegen die Zahlen m_{ij}^s alle in der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\varepsilon_1)$. Hat schließlich die Defektgruppe des Blockes b

die Ordnung p^d, so gilt für die Beiträge der zugehörigen "subsection" s:

$$p^d \cdot m_{ij}^s \text{ ist ganz-algebraisch.}$$

Ferner ergibt sich aus der Definition

$$M^s = D_b^\pi \cdot C_b^{-1} \cdot \overline{D_b^\pi}^t .$$

Dabei ist D_b^π die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix des Blocks b zur "subsection" $s = (\pi, b)$, C_b die Cartanmatrix und D_b die gewöhnliche Zerlegungsmatrix.

Sei nun $[b] = \{\eta_k \mid k=1,\dots\}$ eine Basismenge von b. Ist

$$\eta_i = \sum_{\phi_j \in \mathrm{IBr}(C_G(\pi)) \cap b} n_{ij} \phi_j ,$$

und $N = (n_{ij})_{i,j}$, so gilt: $\det N = \pm 1$.

Schließlich bezeichne

$D_{[b]}^\pi$ die verallgemeinerte Zerlegungsmatrix bzgl. $[b]$

$C_{[b]}$ die Cartanmatrix von b bzgl. $[b]$

$D_{[b]}$ die gewöhnliche Zerlegungsmatrix bzgl. $[b]$.

Dann gilt offensichtlich das Folgende:

$$D_b^\pi = D_{[b]}^\pi \cdot N$$
$$D_b = D_{[b]} \cdot N$$
$$C_b = D_b^t D_b = N^t C_{[b]} N$$
$$C_b^{-1} = N^{-1} C_{[b]}^{-1} (N^t)^{-1}$$

und

$$M^s = D_{[b]}^\pi \; C_{[b]}^{-1} \; \overline{D_{[b]}^\pi}^t .$$

Dies zeigt:

<u>(5.1) Satz:</u> Die Beitragsmatrix M^s hängt nicht von der Wahl der Basismenge ab.

Wir werden uns hier hauptsächlich mit der Matrix

$$M^1 := M^{(1,B)}$$

beschäftigen. Dazu sei $M^1 = (m_{ij})_{i,j}$, also

$$m_{ij} = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{x \in G^\circ} \chi_i(x) \cdot \overline{\chi_j(x)} .$$

Offensichtlich ist $m_{ii} > 0$.

Wie allgemein üblich, sei $\nu_p(x)$ der Exponent der größten p-Potenz, die x teilt. Ferner sei $d := d(B)$. Brauer hat in [4] gezeigt, daß

$$\nu_p(p^d m_{ii}) \begin{cases} = 0 & \text{falls } h(\chi_i) = 0 \\ > 0 & \text{falls } h(\chi_i) > 0 \end{cases} .$$

$$\nu_p(p^d m_{ij}) = h(\chi_i) \quad \text{falls } h(\chi_j) = 0 .$$

Ferner: Spur $(M^1) = l(B)$, (siehe [4], 5C) .

Aus den obigen Aussagen folgert man leicht:

$$p^d \cdot m_{ii} \geq 1 \qquad \text{falls } h(\chi_i) = 0 .$$

$$p^d \cdot m_{ii} \geq p^{h(\chi_i)} + 1 \qquad \text{falls } h(\chi_i) \neq 0 .$$

Das beweist:

<u>(5.2) Satz</u> (Olsson): a) $p^d \cdot l(B) \geq k_0(B) + \sum_{i>0} k_i(B) \cdot p^{i+1}$.

b) $p^d \cdot l(B) \geq k(B)$.

Eine weitere Ungleichung dieser Art liefert

<u>(5.3) Satz</u> (Olsson): $p^{2d} \cdot l(B) \geq [k_0(B)]^2 + \sum_{i>0} k_i(B) \; [2k_0(B)+p^2] \cdot p^{2i}$

Beweis: $M^1 \cdot M^1 = D \cdot C^{-1} D^t C^{-1} D^t = D C^{-1} D^t = M^1$.

$p^{2d} \cdot l(B) = \text{Spur } (p^d M^1)^2 = \sum_{i,j} p^d m_{ij} p^d m_{ji} = \sum_{i,j} p^{2d} m_{ij}^2$.

Der Ausdruck auf der rechten Seite der zu beweisenden Ungleichung ist jedoch eine Teilsumme hiervon.
Weitere Ergebnisse dieser Art sind in [9] und [19] zu finden.

Es ist bekannt, daß die Cartanmatrizen (als symmetrische Matrizen) quadratische Formen definieren. Im Rest dieses Paragraphen werden wir untersuchen, welche Rolle die Beiträge dabei spielen.

Dazu seien Q_1 die zur Matrix $p^d C^{-1}$ und Q_2 die zu $p^d M^1$ gehörigen quadratischen Formen. Q_1 ist positiv definit.

<u>(5.4) Lemma:</u> Q_1 und Q_2 stellen die gleichen quadratischen Formen dar; insbesondere stellen Q_1 und Q_2 die gleichen Zahlen dar.

Beweis: Eine quadratische Form Q wird bekanntlich von Q_i dargestellt, falls es eine ganzzahlige Matrix A gibt mit $A^t Q_i A = Q$. Eine ganze Zahl liegt dann im Wertebereich von Q_i , falls sie in dem von Q liegt.

Nun gilt offenbar:

$$Q_2 = D_B\, Q_1\, D_B^{\,t} \;.$$

Umgekehrt folgt, da $\mathrm{IBr}(G) \cap B$ eine Basismenge ist, die Existenz von ganzen Zahlen d'_{ji} mit

$$\chi_i \,|_{G^*} = \sum_{\phi_j \in B} d'_{ji}\, \phi_j \;.$$

Mit $D' := (d'_{ji})_{j,i}$ gilt $D'\cdot D = I_{l(B)}$ (die Einheitsmatrix), also

$$Q_1 = D'_B\; D_B\; Q_1\; D_B^{\,t}\; D_B'^{\,t} = D'_B\; Q_2\; D_B'^{\,t} \;.$$

<u>(5.5) Satz:</u> Falls $l(B) > 1$ und $l(B) - m_B^{(1)}(1) = 1$ – dh. die Cartanmatrix C_B hat die Elementardivisoren $p^d, 1, \ldots, 1$ –, dann gilt für alle $\chi_i \in B \cap \mathrm{Irr}(G)$

$$m_{ii} > p^{-d} \;.$$

Beweis: Angenommen, die Aussage des Satzes ist falsch und es gibt ein $\chi_i \in B \cap \mathrm{Irr}(G)$ mit $m_{ii} = p^{-d}$. (Bekanntlich ist $p^d m_{ii}$ stets eine natürliche Zahl). Da $p^d m_{ii}$ trivialerweise von Q_2 dargestellt wird, würde dann Q_2 die Zahl 1 darstellen, und somit auch Q_1. Bezüglich einer Basismenge $[B]$ gilt dann:

$$p^d\, C_{[B]}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \cdot & * & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \;.$$

Daraus folgt:

$$C_{[B]} = \begin{bmatrix} p^d & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & Y \\ 0 & \end{bmatrix}$$

für eine geeignete $(l(B)-1) \times (l(B)-1)$-Matrix Y. Nun ist $\det C_B$ gleich dem Produkt der Elementarteiler, also $\det C_{[B]} = \det C_B = p^d$ und somit $\det Y = 1$. Ferner folgt aus $C_{[B]} = D_{[B]}^t D_{[B]}$, daß $D_{[B]}$ die folgende Gestalt hat:

$$D_{[B]} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} * & \\ * & \\ * & T \\ * & \\ * & \\ * & \\ * & \\ * & \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} 1 & \leftarrow l(B)-1 \rightarrow \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ k(B) \\ \downarrow \end{array} ,$$

wobei T eine ganzzahlige Matrix ist mit $T^t \cdot T = Y$.

Aus der Determinantentheorie ist bekannt, daß

$$1 = \det Y = \sum_W (\det W)^2 ,$$

wobei W über alle $(l(B)-1) \times (l(B)-1)$ Teilmatrizen von T läuft. Es gibt daher genau eine solche Teilmatrix A mit $\det A = \pm 1$ und T hat oBdA. die Form:

$$T = \begin{array}{cl} l(B)-1 & \\ \left[\begin{array}{c} A \\ \hline Z \end{array}\right] & \begin{array}{l} l(B)-1 \\ k(B)-l(B)+1 \end{array} \end{array} .$$

Dann:

$$T\,A^{-1} = \begin{array}{|ccccc|l}\hline 1 & & & & & \\ & 1 & & 0 & & \\ & & \cdot & & & l(B)-1 \\ & 0 & & \cdot & & \\ & & & & 1 & \\ \hline & & Z' & & & \\ \hline \end{array}$$

und

$$(T\,A^{-1})^t \; T\,A^{-1} = (A^{-1})^t \; (T^tT) \; A^{-1}$$

$$\det\left[(T\,A^{-1})^t \; T\,A^{-1}\right] = (\det(A^{-1}))^2 \det Y = 1 \; .$$

Die Matrix TA^{-1} erfüllt die gleiche Bedingung wie T. Durch geschickte Wahl der Untermatrizen (eine Zeile aus Z', die übrigen aus der Einheitsmatrix) können wir zeigen, daß $Z' = 0$, also

$$T\,A^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ k(B) \\ \downarrow \end{array}$$

Bezeichnet w den ersten Spaltenvektor von A^{-1}, so ist

$$T\cdot w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} .$$

$T\cdot w$ ist eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination der Spalten von $D_{[B]}$.

Sei jetzt $y \in G$, y p-singulär und $y = \pi \cdot y'$ mit $\pi \in \Pi(G)$, y' p-regulär.

$$\chi_i(\pi y') = \sum_{b \in Bl(C_G(\pi),B)} \sum_{\phi_j \in [b]} d_{ij}^{\pi} \phi_j(y') .$$

Wegen der Blockorthogonalität (1.15) ist jede Spalte $(d_{ij}^{\pi})_j$ orthogonal zu jeder Spalte in D_B und damit zu jeder Spalte in $D_{[B]}$. Insbesondere ist $T \cdot w$ orthogonal zu $(d_{ij}^{\pi})_j$. Wir können dann oBdA. annehmen, daß für die zum Charakter χ_1 gehörige Spalte $(d_{1j}^{\pi})_j$ gilt:

$$(d_{1j}^{\pi})_j = 0 .$$

Dann verschwindet aber χ_1 auf allen p-singulären Elementen, ist also vom Defekt 0, was $l(B) > 1$ widerspricht.

<u>(5.6) Korollar:</u> Ist $l(B) > 1$, so stellt C_B keine quadratische Form mit Determinante 1 dar.

Die Cartanmatrix C_B habe die Elementardivisoren

$$e_1 \leq e_2 \leq \ldots\ldots \leq e_{l(B)} = p^d$$

und w_i bezeichne die i-te Zeile von D_B $(1 \leq i \leq k(B))$.

Für eine Teilmenge X von $\{1,2,\ldots,k(B)\}$ sei

$$W_X := (w_i Q_1 w_j^{t})_{i,j} .$$

Dann ist W_X eine Teilmatrix von $p^d M^1$.

(5.7) Satz: Sei X wie oben. Für die Elementardivisoren $e_1' < e_2' < \dots$ von W_X gelten folgende Eigenschaften:

$$\frac{p^d}{e_{l(B)}} = 1 \qquad \text{teilt } e_1'$$

$$\frac{p^d}{e_{l(B)-1}} \qquad \text{teilt } e_2'$$

usw. für alle fraglichen Indices.

Beweis: Sei A_X die $|S| \times l(B)$ - Matrix, die aus den Zeilen w_i, $i \in X$, besteht. Dann ist

$$W_X = A_X \cdot p^d \; C_B^{-1} \; A_X^t \;.$$

Wegen der Ganzzahligkeit von A_X teilt der i-te Elementardivisor von $p^d \cdot C_B^{-1}$ den i-ten Elementardivisor von W_X.

(5.8) Korollar: In der Situation von (5.7) sei speziell $|X| = l(B) :=' \ell$ und $e_i'' := \frac{p^d}{e_{\ell-i+1}}$. Dann ist

$$e_1' \cdot e_2' \dots e_\ell' = (\det A_X)^2 \cdot e_1'' \dots e_\ell''.$$

Beweis: Man berechne einfach die Determinante von $W_X = A_X \, p^d \, C_B^{-1} \, A_X^t$.

Wir sind nun in der Lage, Satz (5.5) auf eine andere Art zu beweisen.

2. Beweis für (5.5): Angenommen, es wäre $m_{ii} = p^{-d}$ für ein i. Sei $j \neq i$ und wähle in (5.7)

$$X = \{i, j\}\;.$$

Dann ist

$$W_X = \begin{bmatrix} 1 & p^d m_{ij} \\ p^d m_{ij} & p^d m_{jj} \end{bmatrix}$$

mit den Elementardivisoren 1 und p^d. Deshalb gilt $p^d \mid \det W_X$ und entweder ist $\det W_X = 0$ oder $p^d m_{jj} > p^d$.

Da es wegen $\delta(B) \neq 1$ jedoch noch mindestens eine "subsection" s mit $m^s_{jj} \neq 0$ gibt, widerspricht der 2. Fall der Gleichung

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}} m^s_{jj} = 1 .$$

Somit muß für alle $j \neq i$ die Determinante der zugehörigen Teilmatrix W_X verschwinden.

Für die zugehörige Bilinearform gilt dann:

$$(v_i\ Q_1\ v_i^{\,t}) \cdot (v_j\ Q_1\ v_j^{\,t}) - (v_i\ Q_1\ v_j^{\,t})^2 = 0 .$$

Da dies für alle $j \neq i$ gilt, folgt aus der Tatsache, daß Q_1 positiv definit ist, die lineare Unabhängigkeit von v_i und v_j. Daher:

$$\mathrm{Rang}(D_B) = 1 = l(B)$$

– der Widerspruch.

§ 6 π-BLÖCKE

Wir führen nun die π-Blöcke als Verallgemeinerung der bisher benutzten p-Blöcke ein und untersuchen einige ihrer Eigenschaften.

Dazu bezeichne π eine Menge von Primzahlen. Jedes Element $x \in G$ läßt sich eindeutig in einen Anteil x_π mit π-Ordnung (dh. die Ordnung von x_π ist nur durch Primzahlen aus π teilbar) und einen π-regulären Anteil $x_{\pi'}$, zerlegen:

$$x = x_\pi \cdot x_{\pi'} \quad .$$

Die Menge der π-regulären Elemente von G wird mit $G_\pi{}^\circ$ bezeichnet; $\mathrm{Char}(G)$ sei der Ring der verallgemeinerten Charakter von G. Ferner sei

(1) $$M_\pi := \{\lambda \in \mathrm{Char}(G) \mid \lambda(x) = 0 \text{ für alle } x \in G - G_\pi{}^\circ\} \quad .$$

Dann ist M_π ein $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathrm{Char}(G)$ vom $\mathbb{Z}$-Rang $l_\pi(G)$, der Anzahl der π-regulären Konjugationsklassen von G, wie man leicht beweisen kann.

Es sei weiter $\{\psi_1,\ldots,\psi_{l_\pi(G)}\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von M_π und für $1 \leq j \leq l_\pi(G)$ und $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$:

(2) $$\psi_j = \sum_{i=1}^{k(G)} d_{ij}\, \chi_i \qquad d_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Es spielen dann die ψ_i die Rolle der "hauptunzerlegbaren Charaktere" und die d_{ij} die Rolle der "Zerlegungszahlen".

Definiere: $$D_\pi := (d_{ij})_{i,j} \quad .$$

(3) $$C_\pi := D_\pi^{\,t} \cdot D_\pi \quad ,$$

dann ist C_π die "Cartanmatrix".

Es ist $\det C_\pi \neq 0$, weil die Matrix D_π den Rang $l_\pi(G)$ hat. Schließlich vereinbaren wir Funktionen $\theta_1, \dots, \theta_{l_\pi(G)}$ ("Brauercharaktere") mittels

(4) $$\psi_i = \sum_{j=1}^{l_\pi(G)} c_{ij} \; \theta_j \qquad 1 \le i \le l_\pi(G) \; .$$

Da diese θ_j alle auf $G - G_\pi^{\,\bullet}$ verschwinden, können wir sie als Klassenfunktionen von $G_\pi^{\,\bullet}$ auffassen.

<u>(6.1) Lemma:</u> Für $x \in G_\pi^{\,\bullet}$ und $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $1 \le i \le k(G)$ gilt

$$\chi_i(x) = \sum_{j=1}^{l_\pi(G)} d_{ij} \; \theta_j(x) \quad .$$

Beweis: Für $x \in G_\pi^{\,\bullet}$ bezeichne $w(x)$ den Vektor

$$w(x) := \left(\chi_1(x) - \Sigma\, d_{1j}\; \theta_j(x), \dots, \chi_{k(G)}(x) - \Sigma\, d_{kj}\; \theta_j(x)\right) \quad .$$

Wir haben $$w(x) \cdot D_\pi = 0 \quad ,$$

denn für $1 \le l \le l_\pi(G)$ ist

$$\sum_i \left[\chi_i(x) - \sum_j d_{ij}\; \theta_j(x)\right] \cdot d_{il} = \sum_i \left(\psi_l(x) - \psi_l(x)\right) = 0 \; .$$

Sei $V := \{ v \in \mathbb{C}^{k(G)} \mid v \cdot D_\pi = 0 \}$.

Eine $\mathbb{C}$ -Basis von V ist:

$\{ v_1, \dots\dots, v_{k(G)-l_\pi(G)} \}$, wobei $v_i := (\chi_1(y_i), \dots, \chi_{k(G)}(y_i))$;

hier bilden die y_i , $1 \le i \le k(G)-l_\pi(G)$, ein Repräsentantensystem der

Konjugiertenklassen von $G-G_\pi^*$. Dann ist

$$w(x) = \sum_{n=1}^{k(G)-l_\pi(G)} \alpha_n v_n \qquad \alpha_n \in \mathbb{C} \quad \text{geeignet},$$

d.h.
$$\chi_i(x) - \sum_j d_{ij} \theta_j(x) = \sum_n \alpha_n \chi_i(y_n)$$
für alle i mit $1 \leq i \leq k(G)$.

Wir multiplizieren die Gleichung mit $\overline{\chi_i(y_m)}$ für ein festes y_m, summieren über i und erhalten mittels einer der Orthogonalitätsrelationen für Charaktere:

$$\sum_i \chi_i(x)\,\overline{\chi_i(y_m)} - \sum_j \theta_j(x) \sum_i d_{ij}\,\overline{\chi_i(y_m)} = |C_G(y_m)| \cdot \alpha_m .$$

Es ist jedoch $\sum_i \chi_i(x)\,\overline{\chi_i(y_m)} = 0$, da x und y_m nicht konjugiert sind, und $\sum_i d_{ij}\,\overline{\chi_i(y_m)} = \overline{\psi_j(y_m)} = 0$; damit folgt $\alpha_m = 0$.

Es bezeichne $\{x_1, \ldots, x_{l_\pi(G)}\}$ ein Vertretersystem der Konjugationsklassen von G_π^*. Wir definieren

$$(5)\qquad \begin{aligned} X &:= (\chi_i(x_n))_{i,j} && 1 \leq i \leq k(G), \quad 1 \leq n \leq l_\pi(G) \\ \Theta &:= (\theta_j(x_n))_{j,n} && 1 \leq j,n \leq l_\pi(G) \\ \Psi &:= (\psi_j(x_n))_{j,n} && 1 \leq j,n \leq l_\pi(G) \end{aligned}$$

Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$(6)\qquad X = D_\pi \cdot \Theta$$

$$(7)\qquad \Psi = D_\pi^t \cdot X$$

$$(8)\qquad \Psi = C_\pi \cdot \Theta$$

Weiter ist für $N := X^t \cdot \bar{X} = (\delta_{nm} \cdot |C_G(x_m)|)_{n,m}$:

$$N = \Theta^t \cdot C_\pi \cdot \bar{\Theta} \qquad \text{nach (6)} .$$

Damit folgt

(9) $$\Theta^t \, C_\pi \, \bar{\Theta} \cdot N^{-1} = Id .$$

Aus der Invertierbarkeit von Ψ folgt, daß auch Θ ein Inverses besitzt und

(10) $$\bar{\Theta} \, N^{-1} \, \Theta^t = C_\pi^{-1} =: (c_{ij}^{(-1)})_{i,j} .$$

Schließlich ist

(11) $$Id = C_\pi \, \bar{\Theta} \, N^{-1} \, \Theta^t = \Psi \cdot N^{-1} \cdot \Theta^t .$$

Dies beweist

<u>(6.2) Lemma:</u> a) $\frac{1}{|G|} \sum\limits_{x \in G_\pi^*} \overline{\theta_i(x)} \; \theta_j(x) = c_{ij}^{(-1)}$

b) $\frac{1}{|G|} \sum\limits_{x \in G_\pi^*} \overline{\psi_i(x)} \; \theta_j(x) = \delta_{ij}$

<u>(6.3) Lemma:</u> Jedes wie oben definierte θ_i ist Einschränkung eines verallgemeinerten Charakters von G auf G_π^* .

Beweis: Wegen (6) genügt es, eine ganzzahlige Matrix M zu finden mit

$$M \cdot D_\pi = Id .$$

Da der $l_\pi(G)$-te Determinantendivisor von D_π gleich 1 ist, existieren nichtsinguläre $l_\pi(G) \times l_\pi(G)$-Untermatrizen D_i von D_π und ganze Zahlen a_i mit

$$\Sigma \, a_i \det D_i = 1 .$$

Ferner existieren ganzzahlige $l_\pi(G) \times l_\pi(G)$-Matrizen M_i mit

$$M_i \, D_i = (\det D_i) \cdot Id .$$

Daher gibt es ganzzahlige $l_\pi(G) \times k(G)$-Matrizen M_i' mit

$$M_i' \cdot D_\pi = (\det D_i) \cdot \mathrm{Id} .$$

Dann leistet $M = \sum_i a_i \cdot M_i'$ das Verlangte.

Sei $p \in \pi$ fest gewählt. Dann existieren $l(G)$ irreduzible Charaktere χ_i, – i aus einer geeignet gewählten Indexmenge S – und $l(G)$ p-reguläre Konjugationsklassen K_j, $j \in T$, so daß

$$\det\, (\chi_i(x_j))_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{p} \qquad i \in S,\ j \in T .$$

(Siehe [3])

Da $G_\pi{}^\circ$ in G° liegt, gilt $l_\pi(G) \leq l(G)$. Daher existieren Teilmengen S_π von S und T_π von T mit

$$|S_\pi| = |T_\pi| = l_\pi ,$$

so daß

$$\det\, (\chi_i(x_j))_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{p} \qquad i \in S_\pi,\ j \in T_\pi .$$

Hier ist

$$T_\pi = \{ j \in T \mid K_j \ \pi\text{-regulär} \} .$$

Aus (6) folgt: $\det\, (d_{ij})_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$\det \Theta \not\equiv 0 \pmod{p} .$$

Da nach (12) $\Theta^t\, \Psi = N$, folgt

<u>(6.4) Lemma:</u> $\nu_p(\psi_m(x_n)) \geq \nu_p(|C_G(x_n)|) \qquad 1 \leq n,m \leq l_\pi(G)$.

<u>SPEZIALFÄLLE</u>

1) $\pi = \emptyset$ oder π enthält keinen Primteiler von $|G|$. Dann ist

$1_\pi(G) = k(G)$, $\psi_i = \chi_i$, und $D_\pi = C_\pi = \mathrm{Id}$.

2) $\pi = \{p\}$, $p \mid |G|$.

Dann können die ψ_i z.B. aus der Menge der hauptunzerlegbaren Charaktere gewählt werden; D_π und C_π sind dann wie gewohnt.

3) $\pi = \{p \mid p$ teilt $|G|$, p Primzahl$\}$. Es ist $1_\pi(G) = 1$ und

$M_\pi = \mathbb{Z} \cdot \rho$ (ρ : regulärer Charakter von G)

$\psi_1 = \pm \rho$

$\theta_1 = \pm \frac{1}{|G|} \cdot \rho$.

<u>Definition:</u> Eine Teilmenge B von $\mathrm{Irr}(G)$ heißt <u>π-Block</u>, falls gilt:

1. für alle $p \in \pi$ ist B eine Vereinigung von p-Blöcken;
2. B ist minimal bzgl. dieser Eigenschaft.

Wir definieren dann

$$k(B) = |B|$$

<u>Bemerkung:</u> ("π-Block vom Defekt 0") Man sieht leicht, daß die folgenden Aussagen für einen π-Block äquivalent sind:

a) $k(B) = 1$

b) Für alle $p \in \pi$ enthält B nur p-Blöcke vom Defekt 0.

c) Für alle $\chi \in B$ verschwindet χ auf π-singulären Elementen.

d) Für alle $p \in \pi$ und alle $\chi \in B$ ist $\nu_p(|G|)$ ein Teiler von $\chi(1)$.

Für einen π-Block B gelten gleichfalls Orthogonalitätsrelationen: Sei nämlich $x \in G_\pi^*$ und $y \in G - G_\pi^*$, dann ist

$$\sum_{\chi \in B \cap \mathrm{Irr}(G)} \chi(x) \ \chi(y) = 0 \ .$$

Dies folgt natürlich aus den gewöhnlichen Orthogonalitätsrelationen für p-Blöcke. Analog zu M_π definieren wir für einen π-Block B:

$$M_B = \{\lambda \in M_\pi \mid \lambda = \sum_i n_i \chi_i \,,\ n_i \in \mathbb{Z} \,,\ n_i \neq 0 \Rightarrow \chi_i \in B\} .$$

<u>(6.5) Satz:</u> Es gilt:

$$M_\pi = \bigoplus_{B\ \pi\text{-Block}} M_B .$$

Es existiert also eine $\mathbb{Z}$-Basis $\{\psi_i\}$ von M_π, so daß jedes ψ_i zu einem π-Block gehört.

Beweis: Vollständige Induktion nach $|\pi|$. Für $|\pi| = 1$ leisten die hauptunzerlegbaren Charaktere das Verlangte.

Sei also $\pi_1 = \pi - \{p\}$ und der Satz gelte bereits für π_1. Daher gibt es eine Basis $\{\psi_i^{\,1}\}$ von M_{π_1} derart, daß jedes $\psi_i^{\,1}$ in einem π_1-Block liegt. Weiter seien $\phi_1, \ldots, \phi_{l(G)}$ die Brauercharaktere und $\Phi_1, \ldots, \Phi_{l(G)}$ die hauptunzerlegbaren Charaktere von G bezüglich der Primzahl p. Für $x \in G^{\bullet}_{\{p\}}$ und $\chi_i \in \mathrm{Irr}(G)$ gilt dann:

(i) $$\chi_i(x) = \sum d_{ij} \;\phi_j(x)$$

(ii) $$\Phi_i(x) = \sum c_{ij} \;\phi_j(x) ,$$

wobei hier d_{ij}, c_{ij} die gewöhnlichen Zerlegungs- und Cartanzahlen für p sind.

Wir dürfen weiter die Existenz einer natürlichen Zahl t annehmen mit:

$$\psi_1^{\,1}, \ldots, \psi_t^{\,1} \in B \quad , \quad \text{aber} \quad \psi_{t+1}^{\,1}, \ldots \notin B \quad ,$$

wobei B als π-Block eine Vereinigung von π_1-Blöcken ist.

Für die ersten t Basisvektoren $\psi_i^{\,1}$ gibt es daher "Zerlegungszahlen" $d_{ij}^{\,1}$ der π_1-Blöcke mit

(iii) $$\psi_i{}^1 = \sum_{\chi_j \in B} d_{ij}^1 \; \chi_j \; .$$

Aus den Gleichungen (i)-(iii) folgt durch Einsetzen die Existenz ganzer Zahlen m, u_{ij} mit

$$m \cdot \psi_i{}^1(x) = \sum_{\phi_j \in B} u_{ij} \; \phi_j(x)$$

für alle $x \in G_{\{p\}}^{\circ}$ und $1 \le i \le t$. Hierbei kann $m = \det(c_{ij})_{\phi_i \in B, \phi_j \in B}$ gewählt werden. Es ist dabei nicht nur $m \cdot \psi_i{}^1 \in \mathrm{Char}(G)$, sondern sogar

$$m \cdot \psi_i{}^1 \in M_\pi \; .$$

Dies ergibt sich sofort aus $G - G_\pi{}^\circ = (G - G_{\pi_1}{}^\circ) \cup (G - G_{\{p\}}^{\circ})$ (jedes π-singuläre Element ist entweder π_1-singulär oder p-singulär), da einerseits für $x \in G - G_{\{p\}}^{\circ}$ aus $\phi_j(x) = 0$ auch $m\psi_i{}^1(x) = 0$ folgt; andererseits ist für $x \in G - G_{\pi_1}{}^\circ$ wegen $\psi_i{}^1 \in M_{\pi_1}$ gleichfalls $m\psi_i{}^1(x) = 0$.
Durch analoge Argumentation können wir ein $m \in \mathbb{N}$ bestimmen, so daß es zu jedem $\psi_i{}^1$ einen π-Block B gibt mit

$$m\psi_i{}^1 \in M_B \; .$$

Wir zeigen als nächstes:

(iv) $$mM_\pi \le \oplus \, M_B \le M_\pi \; .$$

Sei also $\psi \in M_\pi$ beliebig. Da M_π in M_{π_1} liegt, gibt es ganze Zahlen z_i, so daß für alle $x \in G_{\{p\}}^{\circ}$ gilt

$$m \cdot \psi(x) = \sum z_i (m \cdot \psi_i{}^1(x)) \; .$$

Diese Gleichung ist aber auch für $x \in G - G_{\{p\}}^{\circ}$ erfüllt, da aus der π-Singularität von x einerseits $\psi(x) = 0$ folgt, andererseits aber auch $m \cdot \psi_i{}^1(x) = 0$ ist, da die $m\psi_i{}^1$ eine Linearkombination der p-Hauptunzerlegbaren sind. Also:

$$m \cdot \psi \in \oplus M_B$$

und (iv) ist gezeigt.

Sei jetzt für $\psi \in M_\pi$:

$$\psi = \sum_{B\ \pi\text{-Block}} \psi_B \quad \text{mit} \quad \psi_B = \sum_{\chi_i \in B} a_i \chi_i \quad , .$$

also

$$m\cdot\psi = \sum_B m\cdot\psi_B \in \oplus M_B$$

Setzen wir die obige Zerlegung $\psi_B = \Sigma\, a_i\, \chi_i$ ein, so folgt mit Koeffizientenvergleich sofort:

$$m\cdot\psi_B \in M_B \quad .$$

Damit verschwindet ψ_B auf allen π-singulären Elementen, also auf $G-G_\pi{}^\circ$. Wegen $\psi_B \in \mathrm{Char}(B)$ folgt schließlich

$$\psi_B \in M_\pi \, .$$

<u>(6.6) Satz:</u> det C_π ist nur durch Primzahlen aus π teilbar.

Es gilt sogar die stärkere Aussage

<u>(6.7) Satz:</u> det C_π teilt $g_\pi^{\,2l_\pi(G)}$, wobei g_π der π-Anteil von $|G|$ ist.

Beweis: Wir definieren für $1 \leq i \leq l_\pi(G)$

$$\gamma_i(x) = \begin{cases} g_\pi \cdot \theta_i(x) & x \in G_\pi{}^\circ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mittels Einschränkung auf elementare Untergruppen zeigen wir

$$\gamma_i \in \mathrm{Char}(G) \; .$$

Sei also E eine elementare Untergruppe. Dann existiert eine Zerlegung in π- und π'-Anteile

$$E = E_\pi \times E_{\pi'} \quad .$$

Für den regulären Charakter ρ von E_π und alle $x \in E_\pi$, $y \in E_{\pi'}$ folgt durch Nachrechnen

$$\gamma_i(xy) = \frac{g_\pi}{|E_\pi|} \rho(x) \cdot \theta_i(y) \quad .$$

Wegen $\frac{g_\pi}{|E_\pi|} \in \mathbb{N}$ und $\theta_i \in \mathrm{Char}(E_{\pi'})$ – nach (6.3) – folgt:

$$\gamma_i|_E \in \mathrm{Char}(E) \quad ,$$

also $\gamma_i \in \mathrm{Char}(G)$ nach einem Satz von Brauer ([12], 16.2).

Sei nun $\gamma_j = \sum_i u_{ij} \chi_i$ und $U = (u_{ij})_{i,j}$, so ist U eine $k(G)\times l_\pi(G)$-Matrix. Es ist

$$\begin{aligned} u_{ij} = (\gamma_j,\chi_i) &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \gamma_j(x) \overline{\chi_i(x)} \\ &= \frac{g_\pi}{|G|} \sum_{x \in G_\pi^*} \theta_j(x) \overline{\chi_i(x)} \\ &= g_\pi \sum_{n=1}^{l_\pi(G)} d_{in} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G_\pi^*} \theta_j(x) \overline{\theta_n(x)} \\ &= g_\pi \sum_n d_{in} c_{nj}^{(-1)} \quad , \end{aligned}$$

wobei wir (6.1) und (6.2a) verwendet haben. Also gilt

$$U = g_\pi D_\pi C_\pi^{-1} \quad ,$$

und deshalb

$$U C_\pi = g_\pi D_\pi$$

und

$$C_\pi U^t = g_\pi D_\pi^t \quad .$$

Es folgt

$$C_\pi (U^t U) C_\pi = g_\pi^2 C_\pi$$

und

$$C_\pi(U^tU) = g_\pi{}^2 \text{ Id} .$$

Es sind C_π und U^tU jeweils $l_\pi(G)\times l_\pi(G)$-Matrizen. Somit

$$\text{Det } C_\pi \mid \text{Det}(g_\pi{}^2 \text{ Id}) = g_\pi^{2l_\pi(G)}$$

Damit ist (6.7) bewiesen.

Wir wählen nun eine Basis $\{\psi_i\}$ von M_π so, daß jedes ψ_i zu einem π-Block gehört (vgl. (6.5)). Für einen π-Block B definieren wir weiter

$$S_B := \{i \mid \chi_i \in B\}$$
$$T_B := \{i \mid \psi_i \in B\} .$$

Dann ist $|S_B| = k(B)$ und $|T_B| =: l_\pi(B) = l(B)$. Entsprechend zerlegt sich $D_\pi = \oplus D_B$, $C_\pi = \oplus C_B$.

Für ein festes $p \in \pi$ arbeiten wir im zugehörigen Ring $\mathbf{O}$ der p-ganzen Zahlen und betrachten für einen π-Block B die Elementardivisoren $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l(B)}$ von C_B in $\mathbf{O}$. Dann existieren nichtkonjugierte π-reguläre Elemente $x_1, \dots, x_{l(B)}$ mit

$$\nu_p(\varepsilon_i) = \nu_p(|C_G(x_i)|) .$$

Dies kann simultan für alle π-Blöcke gemacht werden und man erhält (ohne Beweis)

<u>(6.8) Satz:</u> Sei $\pi = \{p_1,\dots,p_r\}$ eine Teilmenge der Primteiler von $|G|$ und es sei B ein π-Block. Für $1 \leq i \leq r$ sei d_i der maximale Defekt eines p_i-Blockes, der in B enthalten ist. Dann teilen die Elementardivisoren von C_B die Zahl

$$\prod_{i=1}^{r} p_i^{d_i} .$$

Enthält ferner B jeweils v_i solcher p_i-Blöcke mit maximalem Defekt, so sind höchstens v_i Elementarteiler von C_B durch $p_i^{d_i}$ teilbar.

(6.9) Folgerung: 1) $\det \Theta \in \mathbb{Z}$

2) kein $p_i \in \pi$ ist ein Teiler von $\det \Theta$

Der Beweis von (6.8) und (6.9) wird über Verallgemeinerungen der Methoden von [3], §3-§6, durchgeführt und bedarf einer recht komplizierten Notation.

(6.10) Satz (Olsson): Die Gruppe G habe eine zyklische TI-π-Hall-Untergruppe. Für $p \in \pi$ ist jeder p-Block vom Defekt 0 auch ein π-Block vom Defekt 0.

Dieser Satz ist eine einfache Folgerung von:

(6.11) Satz: Sei $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ zyklisch und TI, $|P| = p^a$; ferner sei $C_G(P) = P \times M$ und $q \neq p$ eine Primzahl. Der direkte Faktor M habe keinen q-Block vom Defekt 0. Dann ist jeder q-Block von G vom Defekt 0 auch ein p-Block vom Defekt 0.

Beweis: Angenommen, der Charakter χ hat q-Defekt 0, aber nicht p-Defekt 0. Dann liegt χ in einem p-Block B mit Defektgruppe $\delta(B) = P$, weil die Defektgruppe eines p-Blocks nach Green ein p-Sylow-Durchschnitt ist. Wir zeigen, daß der kanonische Charakter von B in $C = C_G(P)$ den q-Defekt 0 hat, um einen Widerspruch zu erhalten.
Sei b eine Wurzel von B in C und ρ der kanonische Charakter. Wegen $P \leq \ker \rho$ ist ρ ein Charakter von M, sogar $\rho \in \mathrm{Irr}(M)$. Es gilt für die Trägheitsgruppen

$$T_{N_G(P)}(b) = T_{N_G(P)}(\rho)$$

Es bezeichne S ein Nebenklassenvertretersystem von $T_{N_G(P)}(\rho)$ in $N_G(P)$ und T ein solches von $C_G(P)$ in $T_{N_G(P)}(\rho)$; ferner sei $Q \in Syl_q(M)$.
Für $y \in Q$ und $x \in P-\{1\}$ mit $|x| = p^{a-i}$ gilt nach Dade ([12], §68):

$$\chi(xy) = \pm \sum_{z \in T} \sum_{v \in S} \lambda^{zv}(x) \quad \rho^v(y)$$

falls χ ein "exceptional" Charakter ist, ansonsten

$$\chi(xy) = \pm \sum_{v \in S} \rho^v(y) .$$

Im ersten Fall haben dann alle solchen Ausnahmecharaktere χ_λ, $\lambda \in \Lambda$, den q-Defekt 0, weil alle χ_λ den gleichen Grad haben.
Also gilt für alle $y \in Q-\{1\}$ wegen der Orthogonalität

$$(*) \quad 0 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda(xy) = \pm \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{z \in T} \sum_{v \in S} \lambda^{zv}(x) \rho^v(y) = \mp \sum_{v \in S} \rho^v(y),$$

da $\{\lambda^{zv} \mid \lambda \in \Lambda, z \in T\} = Irr(P) - \{1_P\}$.
Auch im zweiten Fall haben wir $\chi(xy) = 0$, also

$$(*) \qquad 0 = \sum_{v \in S} \rho^v(y) .$$

Summation von (*) über alle $y \in Q-\{1\}$ ergibt

$$0 = |S| \cdot (\sum_{y \neq 1} \rho(y)) ,$$

daher

$$\sum_{y \neq 1} \rho(y) = 0 ,$$

und aus $|Q| \cdot (\rho_{|Q}, 1_Q)_Q - \rho(1) = \sum_{y \neq 1} \rho(y)$ folgt, daß $\rho(1)$ durch $|Q|$ teilbar, also vom q-Defekt 0 ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. ALPERIN & M. BROUÉ, Local Methods in Block Theory. Ann. of Math., vol. 110, 1979, pp 143-157

[2] R. BRAUER, On Blocks and Sections in Finite Groups I. Amer. J. Math., vol. 89, 1967, pp 1115-1136

[3] R. BRAUER, Zur Darstellungstheorie der Gruppen von endl. Ordnung I. Math. Zeitschr., vol 63, 1956, pp 406-444

[4] R. BRAUER, On Blocks and Sections in Finite Groups II. American J. Math., vol. 90, 1968, pp 895-925

[5] R. BRAUER, Defect Groups in the Theory of Representations of Finite Groups. Ill. J., vol. 13, 1969, pp 53-73

[6] R. BRAUER, Some Applications of the Theory of Blocks of Characters of Finite Groups IV. J. Algebra, vol. 17, 1971, pp 489-521

[7] R. BRAUER, On the Structure of Blocks in Finite Groups. Proc. 2nd Int. Conf. Theory of Groups, Canberra 1973, SLN, pp 103-130

[8] R. BRAUER & C. NESBITT, On the Modular Characters of Groups. Ann. of Math., vol. 42, 1941, pp 556-590

[9] R. BRAUER & W. FEIT, On the Number of Irreducible Characters of Finite Groups in a Given Block. Proc. Nat. Acad., vol. 45, 1959, pp 361-365

[10] M. BROUÉ, Brauer Coefficients of p-Subgroups Associated with a p-Block of a Finite Group, J. Algebra, vol 56, 1979, pp 365-383

[11] D.W. BURRY, Scott Modules and Lower Defect Groups
- erscheint demnächst in Comm Algebra

[12] L. DORNHOFF, Group Representation Theory, Parts A&B.
Marcel Dekker, New York, 1972

[13] D. GORENSTEIN, Finite Groups. Harper & Row, New York, 1968

[14] J.A. GREEN, Multiplicities, Scott Modules and Lower Defect Groups
- erscheint demnächst

[15] K. IIZUKA, A Note on Blocks of Characters of a Finite Group.
J. Algebra, vol. 20, 1972, pp 196-203

[16] J. OLSSON, Lower Defect Groups.
Comm. Algebra, vol. 8 (1980), pp 261-288

[17] J. OLSSON, On 2-Blocks with Quaternion and Quasidihedral Defect Groups, J. Algebra, vol. 36, 1975, pp 212-241

[18] J. OLSSON, On Subpairs and Modular Representation Theory
J. Algebra, vol. 76, 1982, pp 261-279

[19] J. OLSSON, Inequalities for Blocktheoretic Invariants. In: Representations of Algebras, Puebla Proceedings, SLN 903, 1980, pp 270-284

[20] PUTTASWAMAIAH & DIXON, Modular Representation Theory of Finite Groups. Academic Press, New York, 1977