

UNIVERSITY OF COPENHAGEN
FACULTY OF SCIENCE
WRITTEN EXAM - 3. APRIL 2009

Algebra 3

- This exam contains 5 exercises which are to be solved in 3 hours. The exercises are posed in an English and in a Danish version. The students may choose freely among the versions. Solutions may be written in English or in Danish.
 - The students are allowed to use their lecture notes and books and personal notes, eg. solutions to the exercises from the exercise classes.
 - Computers and calculators of any kind are not allowed.
 - Solutions may also be written using a pencil and an eraser (blyant og viskelæder), provided that corrections are clearly made. It is recommended that in case of major changes the old version is crossed out.
-
- Eksamenssættet indeholder 5 opgaver som bør regnes på 3 timer. Opgaverne er formulerede i en engelsk og i en dansk version. Deltagerne kan frit vælge mellem versionerne. Besvarelsenerne kan afleveres på engelsk eller på dansk.
 - Deltagerne må benytte deres noter, bøger and personlige notater, for eksempel løsningerne til opgaverne fra øvelsestimerne.
 - Computere og lommeregnerne af enhver slags er ikke tilladte.
 - Besvarelsenerne kan skrives med blyant og viskelæder, under forudsætning af, at eventuelle rettelser er klare og entydige. Det anbefales i tilfælde af væsentlige ændringer at overstrege de gamle versioner.

English version

Exercise 1: (30 p)

(1) Show that a group H of order $45 = 3^2 \cdot 5$ is abelian.

Hint: You may use Theorem 1.186 and its proof and Corollary 1.97.

Let now G be a finite group of order $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. We want to show that G is not simple.

Let $Q \in \text{Syl}_5(G)$, $R \in \text{Syl}_3(G)$ and assume in the following that Q is not normal in G , i.e. $m_5(G) > 1$.

(2) Explain why $N_G(Q)$ is abelian and show that $N_G(Q) = R_1Q$ where $|R_1| = 3$.

Hint: Compute $m_5(G)$.

(3) Show using (2) and Corollary 1.97 that $3^2 \cdot 5 \mid |N_G(R_1)|$, i.e. $|G : N_G(R_1)| \mid 7$.

(4) Use (1) to show that R_1 must be a normal subgroup of G , (so that G is not simple).

Hint: The existence of a subgroup of index 7 would give a contradiction to the assumption on $m_5(G)$.

(5) Give an example of a non-abelian group of order 315.

Exercise 2: (15 p) Let G be a finite group and H a subgroup. Assume that the following condition is satisfied:

$$(*) \quad \text{For all } g \in G \setminus H : H \cap g^{-1}Hg = \{e\}.$$

(1) Show that if $\{e\} \neq K \subseteq H$ then $N_G(K) \subseteq H$.

(2) Show that $|H|$ and $|G : H|$ are relatively prime.

Hint: Suppose that the prime p divides $|H|$. Let Q be p -Sylow group of H and P a p -Sylow group of G containing Q . Apply (1) to Q to show that $P = Q$. Here Exercise (2.17) may be relevant. (Proof of exercise not required.)

Exercise 3: (15 p)

Let M be the splitting field for the polynomial $f(x) = x^5 - x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$.

(1) Show that if $\alpha \in M$ is a root of $f(x)$, then $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \alpha + 3, \alpha + 4$ are all the roots of $f(x)$.

Hint: Use for instance “Freshman’s dream”.

(2) Show that $f(x)$ is an irreducible polynomial in $\mathbb{F}_5[x]$.

(3) Let a and b be integers for which $a \equiv b \equiv 1 \pmod{5}$. Show that the polynomial $x^5 - ax + b \in \mathbb{Z}[x]$ is irreducible in $\mathbb{Z}[x]$.

Exercise 4: (25 p)

(1) Show that the polynomial $f(x) = x^8 - 4x^4 + 1$ is an irreducible polynomial in $\mathbb{Q}[x]$.

Hint: Look at $f(x+1)$ and use that fact that $\binom{8}{k}$ is even for $k = 1, 2, \dots, 7$.

(2) Determine the roots of $f(x)$. Show that if α is a root then $\pm\alpha, \pm i\alpha, \pm\frac{1}{\alpha}, \pm\frac{i}{\alpha}$ are all the roots of $f(x)$. (Here $i = \sqrt{-1}$.)

(3) Show that the splitting field M for $f(x)$ over \mathbb{Q} is a normal extension of \mathbb{Q} .

(4) Show that if α is a root of $f(x)$, then $M = \mathbb{Q}(\alpha, i)$. Use this to determine $[M : \mathbb{Q}]$.

Hint: You may choose α to be a real root of $f(x)$.

(5) Decide whether $\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$ is solvable or not.

(6) Decide whether $\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$ is abelian or not.

Exercise 5: (15 p)

(1) Show that $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ is a normal extension of \mathbb{Q} and determine $\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$.

(2) Prove that $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ is a primitive element of M/\mathbb{Q} , i.e. that $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

(3) Find $\text{Irr}(\sqrt{2} + \sqrt{5}, \mathbb{Q})$.

Hint: It may be useful to notice that $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{10}$.

Dansk version

Opgave 1: (30 p)

(1) Vis at en gruppe H af orden $45 = 3^2 \cdot 5$ må være abelsk.

Vink: Man kan bruge Theorem 1.186 og dens bevis samt Corollary 1.97.

Lad nu G være en endelig gruppe af orden $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Vi ønsker at vise, at G ikke kan være simpel.

Lad $Q \in \text{Syl}_5(G)$, $R \in \text{Syl}_3(G)$ og antag i det følgende, at Q ikke er en normal undergruppe i G , altså at $m_5(G) > 1$.

(2) Forklar hvorfor $N_G(Q)$ er abelsk og vis at $N_G(Q) = R_1Q$ hvor $|R_1| = 3$.

Vink: Beregn $m_5(G)$.

(3) Vis ved hjælp af (2) og Corollary 1.97 at $3^2 \cdot 5 \mid |N_G(R_1)|$, dvs.

$|G : N_G(R_1)| \mid 7$.

(4) Brug nu (1) til at vise, at R_1 må være en normal undergruppe i G , så G ikke er simpel.

Vink: Eksistensen af en undergruppe af index 7 vil give en modstrid til antagelsen om $m_5(G)$.

(5) Giv et eksempel på en ikke-abelsk gruppe af orden 315.

Opgave 2: (15 p) Lad G være en endelig gruppe og H en undergruppe. Antag at den følgende betingelse er opfyldt:

$$(*) \quad \text{For alle } g \in G \setminus H : H \cap g^{-1}Hg = \{e\}.$$

(1) Vis at hvis $\{e\} \neq K \subseteq H$ så er $N_G(K) \subseteq H$.

(2) Vis at $|H|$ og $|G : H|$ er relativt prime.

Vink: Antag at primtallet p er en divisor i $|H|$. Lad Q være en p -SyLOW gruppe af H og P en p -SyLOW gruppe af G som indeholder Q . Anvend (1) på Q til at vise, at $P = Q$. Her kan Exercise (2.17) være relevant. (Bevis for øvelsens resultat kræves ikke.)

Opgave 3: (15 p)

Let M være spaltlingslegemet for polynomiet $f(x) = x^5 - x + 1 \in \mathbb{F}_5[x]$.

(1) Vis at hvis $\alpha \in M$ er en rod i $f(x)$, så er $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \alpha + 3, \alpha + 4$ alle rødderne i $f(x)$.

Vink: Brug for eksempel "Freshman's dream".

(2) Vis at $f(x)$ er et irreducibelt polynomium i $\mathbb{F}_5[x]$.

(3) Lad a og b være hele tal, som opfylder $a \equiv b \equiv 1$ (modulo 5). Vis at polynomiet $x^5 - ax + b \in \mathbb{Z}[x]$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

Opgave 4: (25 p)

(1) Vis at polynomiet $f(x) = x^8 - 4x^4 + 1$ er et irreducibelt polynomium i $\mathbb{Q}[x]$.

Vink: Betragt $f(x+1)$ og brug at $\binom{8}{k}$ er et lige tal for $k = 1, 2, \dots, 7$.

(2) Bestem rødderne i $f(x)$. Vis at hvis α er en rod så er $\pm\alpha, \pm i\alpha, \pm\frac{1}{\alpha}, \pm\frac{i}{\alpha}$ alle rødderne i $f(x)$. (Her er $i = \sqrt{-1}$.)

(3) Vis at spaltlingslegemet M for $f(x)$ over \mathbb{Q} er en normal udvidelse af \mathbb{Q} .

(4) Vis at hvis α er en rod i $f(x)$, så er $M = \mathbb{Q}(\alpha, i)$. Brug dette til at bestemme $[M : \mathbb{Q}]$.

Vink: Man kan vælge α som en reel rod i $f(x)$.

(5) Afgør om $\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$ er opløselig eller ej.

(6) Afgør om $\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$ er abelsk eller ej.

Opgave 5: (15 p)

(1) Vis at $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ er en normal udvidelse af \mathbb{Q} og bestem $\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$.

(2) Vis at $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ er et primitivt element i M/\mathbb{Q} , altså at $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

(3) Bestem $\text{Irr}(\sqrt{2} + \sqrt{5}, \mathbb{Q})$.

Vink: Bemærk at $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{10}$.