

# Kombinatorik, Partitioner og Repræsentationsteori Kompendium

Jørn B. Olsson

med tak til Henning Røigaard-Petersen

for stor hjælp med første version

Dette kompendium, som er udarbejdet i forbindelse med et tidligere kursus, og som nu er ved at blive udbygget, supplerer bogen af Andrews og Eriksson, samt forelæserens Lecture Notes.

Henvisninger til bogen af Andrews og Eriksson gives som [AE], fx. “Se et bevis i [AE], Kapitel 2.2”

# 1 Konjugationsklasser i $S_n$ og partitioner

Teorien for partitioner spiller en væsentlig rolle for de symmetriske grupper, især for studiet af deres repræsentationer. Men partitioner dukker allerede op i beskrivelsen af konjugationsklasser af elementer i  $S_n$ .

**Definition 1.1.** For  $n \in \mathbb{N}$  defineres den symmetriske gruppe af grad  $n$ , betegnet  $S_n$ , som mængden af alle permutationer af tallene  $1, \dots, n$ . Elementerne i  $S_n$  er altså de bijektive afbildninger  $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  og udgør en gruppe med kompositionen ”sammensætning af afbildninger”.

Et typisk element  $s \in S_n$  kan angives eksplicit på 3 måder:

**Tabelfremstillingen** er, som navnet antyder, en tabel, hvor det nemt aflæses hvad et givet tal afbildes i:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & \dots & s(n) \end{pmatrix}$$

**Den direkte fremstilling** er essentielt tabelfremstillingen, men den øverste række er fjernet:

$$s = [s(1) \ s(2) \ \dots \ s(n)]$$

Denne fremstilling er ikke hensigtsmæssigt til at beregne produktet (sammensætning) af to elementer.

**Cykelfremstillingen** : Elementet skrives som et produkt af disjunkte cykler,

$$s = (i_1, i_2, \dots, i_l)(j_1, j_2, \dots, j_s) \dots (k_1, k_2, \dots, k_t).$$

Her skal  $(i_1, i_2, \dots, i_l)$  læses som

$$i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \dots, i_{l-1} \mapsto i_l \text{ og slutteligt } i_l \mapsto i_1$$

og delmængderne af  $i$ 'er,  $j$ 'er etc er disjunkte.

Er der punkter i  $\{1, \dots, n\}$  der er fikspunkter for permutationen, vil disse udgøre en cykel med kun ét element i fremstillingen og udelades gerne. Således defineres ved

$$s = (1, 2, 3)(4, 5)$$

en permutation i  $S_6$  givet ved

$$s(1) = 2, s(2) = 3, s(3) = 1, s(4) = 5, s(5) = 4, s(6) = 6.$$

En cykelfremstilling er entydig op til ombytning af cyklerne samt ”rotation” i en cykel, f.eks. er  $(i_1, i_2, i_3) = (i_3, i_1, i_2)$ .

**Definition 1.2.** (Cykellængde/Cykeltipe) En cykel med  $m$  elementer kaldes en  $m$ -cykel. For en permutation  $s \in S_n$  defineres cykeltypen som et tupel

$$ct(s) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$$

hvor  $m_i$  angiver antallet af  $i$ -cykler i fremstillingen

For en cykeltype gælder klart følgende relation:

$$\sum_{i \geq 1} im_i = n$$

**Definition 1.3.** (Konjugation) *Lad  $G$  være en gruppe og lad  $x, y \in G$ .  $x$  og  $y$  siges da at være konjugerede, og vi skriver  $x \sim y$ , dersom*

$$\exists g \in G : x = gyg^{-1}$$

Vi ved fra Mat2AL at denne relation er en ækvivalensrelation hvis ækvivalensklasser kaldes  $G$ 's *konjugationsklasser*.

Ved at udnytte cykelfremstillingen af elementerne i  $S_n$  kan man beskrive gruppens konjugationsklasser.

**Lemma 1.4.** *Lad  $g, s \in S_n$  med  $s = (i_1, i_2, \dots, i_l)(j_1, j_2, \dots, j_s) \dots (k_1, k_2, \dots, k_t)$ . Da har  $gsg^{-1}$  cykelfremstillingen*

$$(g(i_1), g(i_2), \dots, g(i_l)) (g(j_1), g(j_2), \dots, g(j_s)) \dots (g(k_1), g(k_2), \dots, g(k_t))$$

**Eksempel 1.5.** *Lad  $s, g \in S_8$  så  $s = (1, 3, 4, 8)(2, 7, 6)$  og  $g = (1, 2)(3, 4)(5, 6, 7)$ . Da er*

$$gsg^{-1} = (2, 4, 3, 8)(1, 5, 7)$$

Af lemmaet fås umiddelbart

**Sætning 1.6.** *Lad  $s_1, s_2 \in S_n$ . Da gælder*

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow ct(s_1) = ct(s_2)$$

**Definition 1.7.** (Partition)

*Lad  $n \in \mathbb{N}$ . En partition af  $n$  er en sekvens af naturlige tal*

$$\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_m)$$

*således at*

$$l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m \text{ og } l_1 + l_2 + \dots + l_m = n$$

*Tallene  $l_i$  kaldes  $\lambda$ 's dele og  $m$  er dens længde. At  $\lambda$  er en partition af  $n$  skrives  $\lambda \vdash n$ . Nogle steder i litteraturen, fx. i [AE], benyttes notationen  $l_1 + l_2 + \dots + l_m$  for en partition. At der er tale om en partition af  $n$  skrives så  $n = l_1 + l_2 + \dots + l_m$ .*

Hvis vi tager en sekvens  $(1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, k^{m_k})$ , kort skrevet  $(i^{m_i})$ , der opfylder

$$m_i \geq 0 \text{ (idet indgange med } m_i = 0 \text{ kan udelades) og } \sum_{i \geq 0} im_i = n$$

og kalder den for en *cykeltype af  $n$* , er det klart at enhver cykeltype for en permutation  $s \in S_n$  netop er en af disse cykeltyper af  $n$ . Det er yderligere klart at der er en *bijektion* mellem mængden af partitioner af  $n$  og mængden af cykeltyper af  $n$ . Partitionen  $\lambda$  svarer under denne bijektion til cykeltypen  $(i^{m_i})$  netop hvis  $m_i$  af  $\lambda$ 's dele er lig med  $i$ . Vi vil ofte også bruge *den eksponentielle skrivemåde*  $(i^{m_i})$  for en partition, i overensstemmelse med bijektionen.

**Eksempel 1.8.** Lad  $n = 5$ .

<i>partition</i>	<i>eksponentiel notation/cykeltpe</i>	<i>Mat 2AL</i>
(5)	(5 <sup>1</sup> )	(* * * * *)
(4, 1)	(1 <sup>1</sup> , 4 <sup>1</sup> )	(*)(* * * *)
(3, 2)	(2 <sup>1</sup> , 3 <sup>1</sup> )	(**)(* * *)
(3, 1, 1)	(1 <sup>2</sup> , 3 <sup>1</sup> )	(*)(*)(* * *)
(2, 2, 1)	(1 <sup>1</sup> , 2 <sup>2</sup> )	(*)(**)(**)
(2, 1, 1, 1)	(1 <sup>3</sup> , 2 <sup>1</sup> )	(*)(*)(*)(**)
(1, 1, 1, 1, 1)	(1 <sup>5</sup> )	(*)(*)(*)(*)(* )

**Definition 1.9.** (Partitionsfunktionen) *Partitionsfunktionen*  $p : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$  er givet ved

$$p(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \text{Antal partitioner af } n & \text{ellers} \end{cases}$$

**Sætning 1.10.** *Antallet af konjugationsklasser i  $S_n$  er  $p(n)$ .*

**Eksempel 1.11.** *Antallet af konjugationsklasser i udvalgte  $S_n$ :*

$n$	<i>Konjugationsklasser(<math>p(n)</math>)</i>	$n$	<i>Konjugationsklasser(<math>p(n)</math>)</i>
1	1	8	22
2	2	9	30
3	3	10	42
4	5	50	204.226
5	7	100	190.569.292
6	11	200	3.972.999.029.388
7	15	500	2.300.165.032.574.323.995.027

Vi altså at enhver permutation  $s \in S_n$  har en cykeltpe, og til denne cykeltpe hører, ved ovenstående bijektion, en partition.

**Definition 1.12.** (Partitionstype) *Lad  $s \in S_n$ . Den til  $s$ 's cykeltpe,  $ct(s)$ , hørende partition kaldes  $s$ ' Partitonstype og betegnes  $pt(s)$ .*

**Eksempel 1.13.** *Lad  $s \in S_n$  være givet ved  $s = (1, 2)(3, 4, 5)(6, 7)(8)$ . Da er  $pt(s) = (3, 2, 2, 1)$  (én 3-cykel, to 2-cykler og én 1-cykel)*

Som kendt har enhver permutation  $s \in S_n$  et fortegn

$$\text{sign}(s) \in \{\pm 1\}$$

der opfylder

$$\begin{aligned} \text{sign}(st) &= \text{sign}(s)\text{sign}(t), \quad s, t \in S_n \\ \text{sign}((i_1, \dots, i_r)) &= (-1)^{r-1} \end{aligned}$$

Af dette ses umiddelbart

**Sætning 1.14.** (1) *Elementer i samme konjugationsklasse i  $S_n$  har samme fortegn.*

(2) For  $s \in S_n$  med  $pt(s) = (l_1, \dots, l_m)$  er  $sign(s) = (-1)^{n-m}$ .

Permutationer med fortegn +1 siges at være *lige*, de andre *ulige*. Det er kendt fra Mat2AL at de lige permutationer udgør en normal undergruppe,  $A_n$ , i  $S_n$ , kaldet den *alternerende gruppe af grad  $n$* . For  $n \geq 2$  gælder at  $|S_n : A_n| = 2$ , dvs. der er lige mange lige og ulige permutationer i  $S_n$ . Mere specifikt må  $|A_n| = \frac{n!}{2}$  idet  $|S_n| = n!$ .

**Definition 1.15.** (Positiv/negativ partition) En partition  $\lambda = (l_1, \dots, l_m)$  af  $n$  siges at være positiv dersom  $n - m$  er lige, og negativ dersom den er ulige.

**Bemærkning 1.16.** Hvis vi bruger den eksponentielle skrivemåde for  $\lambda$ ,  $\lambda = (i^{m_i})$ , så er fortegnet for  $\lambda$  lig  $(-1)^t$ , hvor  $t = \sum_i (i-1)m_i$ .

Det ses at der for  $s \in S_n$  gælder

$$s \text{ er lige} \Leftrightarrow pt(s) \text{ er positiv}$$

**Definition 1.17.** Lad  $n \in \mathbb{N}$ . Med  $p^+(n)$  betegner vi antallet af positive partitioner af  $n$ , og med  $p^-(n)$  antallet af negative.

**Eksempel 1.18.** Vi har

$n$	$p^+(n)$	$p^-(n)$
1	1	0
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	4	3

Der gælder altid, at for  $n \neq 2$  er  $p^+(n) > p^-(n)$ . (Se Kapitel 3).

Vi betragter nu **Konjugationsklasser i  $A_n$** .

Da konjugationsklasserne i  $A_n$  kun kan indeholde lige permutationer, så kunne man umiddelbart tro, at antallet af konjugationsklasser i  $A_n$  er  $p^+(n)$ , dvs. antallet af lige konjugationsklasser i  $S_n$ . Men dette er forkert som allerede tilfældet  $n = 3$  viser:

$$A_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (1)(2)(3)\}$$

er cyklisk, specielt abelsk, dvs. hvert element danner sin egen konjugationsklasse i  $A_3$ . Der er altså 3 konjugationsklasser men  $p^+(3) = 2$ . Det, der sker, er, at en  $S_n$ -konjugationklasse af lige permutationer kan *splitte* i 2  $A_n$ -konjugationsklasser.

For en endelig gruppe  $G$  og et  $x \in G$  har definerer vi *centralisatoren for  $x$  i  $G$*  som

$$C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$$

Yderligere ved vi fra Mat2AL at konjugationsklassen  $K_x$  i  $G$  indeholdende  $x$  opfylder

$$|K_x| = |G : C_G(x)|.$$

Lad nu  $s \in S_n$  være en lige permutation, dvs.  $s \in A_n$ . Konjugationsklassen i  $S_n$  der indeholder  $s$  har altså  $|S_n : C_{S_n}(s)|$  elementer, mens konjugationsklassen i  $A_n$  der indeholder  $s$  har  $|A_n : C_{A_n}(s)|$  elementer.

Der gælder oplagt  $C_{A_n}(s)$  er en undergruppe af  $C_{S_n}(s)$ . Der er nu to muligheder:

(I)  $C_{S_n}(s)$  indeholder en ulige permutation

Altså er  $C_{A_n}(s) \neq C_{S_n}(s)$ . Her må  $|C_{S_n}(s) : C_{A_n}(s)| = 2$ , dvs.

$$\begin{aligned} 2|A_n : C_{A_n}(s)| &= |S_n : A_n| \cdot |A_n : C_{A_n}(s)| \\ &= |S_n : C_{A_n}(s)| \\ &= |S_n : C_{S_n}(s)| \cdot |C_{S_n}(s) : C_{A_n}(s)| \\ &= |S_n : C_{S_n}(s)| \cdot 2 \end{aligned}$$

hvoraf det sluttes at

$$|A_n : C_{A_n}(s)| = |S_n : C_{S_n}(s)|$$

I dette tilfælde omfatter  $s$ 's  $A_n$ -konjugationsklasse hele  $S_n$ -klassen, dvs.  $S_n$ -konjugationsklassen splitter ikke i  $A_n$ .

(II)  $C_{S_n}(s)$  indeholder ingen ulige permutationer.

Her er  $C_{A_n}(s) = C_{S_n}(s)$ . Som i foregående tilfælde findes

$$|A_n : C_{A_n}(s)| = \frac{1}{2}|S_n : C_{S_n}(s)|$$

I dette tilfælde splitter  $s$ 's konjugationsklasse i 2  $A_n$ -konjugationsklasser med  $\frac{1}{2}|S_n : C_{S_n}(s)|$  elementer i hver (overvej).

**Sætning 1.19.** *Lad  $s \in A_n$  og lad  $pt(s) = \lambda$ . Da gælder:*

$C_{S_n}(s)$  indeholder ingen ulige permutationer  $\Leftrightarrow$  Alle dele i  $\lambda$  er ulige og forskellige.

*Bevis.* Lemma 1.4 viser, at hvis  $(i_1, \dots, i_l)$  er en vilkårlig cykel i cykelfremstillingen for  $c$ , så er  $(i_1, \dots, i_l) \in C_{S_n}(c)$ . Så hvis  $\lambda$  indeholder en lige del, er den tilsvarende cykel en *ulige* permutation i centralisatoren. Vi vil derfor i resten af beviset antage, at *alle dele i  $\lambda$  er ulige*.

Hvis 2 cykler  $(i_1, \dots, i_l)$  og  $(j_1, \dots, j_l)$  i  $c$  har samme (ulige) længde, så er  $g = (i_1, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_l, j_l) \in C_{S_n}(c)$  ulige. Så hvis  $C_{S_n}(s)$  ikke indeholder ulige permutationer, må alle dele i  $\lambda$  være forskellige. På den anden side, hvis alle dele i  $\lambda$  er forskellige, så viser Lemma 1.4, at et element  $g \in C_{S_n}(s)$  må centralisere hver cykel i  $s$ . Altså, hvis  $(i_1, \dots, i_l)$  er en vilkårlig af disse cykler, så er  $g(i_1, \dots, i_l)g^{-1} = (i_1, \dots, i_l)$ . Heraf ses, at  $g$  må være et produkt af potenser af cyklerne i  $c$ . Da cyklerne i  $c$  er antaget at have ulige længde, så er  $g$  lige. □

**Definition 1.20.** *Med  $p^0(n)$  betegnes antallet af partitioner af  $n$  med alle dele ulige og forskellige.*

**Eksempel 1.21.**

$$p^0(1) = 1, p^0(2) = 0, p^0(3) = 1, p^0(4) = 1, p^0(5) = 1, \dots, p^0(16) = 5$$

For en endelig gruppe  $G$  betegner  $k(G)$  antallet af konjugationsklasser i  $G$ .

**Sætning 1.22.** (1)  $k(S_n) = p^+(n) + p^-(n) (= p(n))$ .

(2)  $k(A_n) = p^+(n) + p^0(n)$ .

*Bevis.*

(1) Oplagt.

(2) I foregående sætning har vi vist at  $S_n$ -konjugationsklasse af lige permutationer splitter i 2  $A_n$ -klasser netop når alle dele i den tilhørende partition er ulige og forskellige. Så  $p^0(n)$  af de lige konjugationsklasser splitter i 2  $A_n$ -klasser, så vi ialt har  $p^+(n) + p^0(n)$  klasser.

□

Vi skal senere i kapitel 3 ved hjælp af en bijektion vise at  $p^0(n) = p^+(n) - p^-(n)$  (Euler 1748)

## 2 Om Partitionsfunktionen

En del af dette kapitel behandles i bogen [AE], se specielt Kapitel 3.3 og Kapitel 6. Partitionsfunktionen kan forfines:

**Definition 2.1.** Den forfinede Partitionsfunktion  $p : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$  er givet ved

$$p(n, m) = \begin{cases} 0 & , m > n \\ 1 & , n=0 \\ \text{Antal partitioner af } n \text{ bestående af } m \text{ dele} & , \text{ellers} \end{cases}$$

**Eksempel 2.2.**

- $p(n, 1) = 1$  (Partitionen  $(n)$ )
- $p(n, n) = 1$  (Partitionen  $(1^n)$ )
- $p(5, 2) = p(5, 3) = 2$

Der gælder oplagt relationen

$$p(n) = \sum_{i=1}^m p(n, i)$$

Tæt knyttet til den forfinede partitionsfunktion defineres:

**Definition 2.3.** Med  $p_m(n)$  betegnes antallet af partitioner af  $n$  i højst  $m$  dele.

Vi har således oplagt

$$p_m(n) = \sum_{i=1}^m p(n, i)$$

**Sætning 2.4.** Der gælder

$$p(n, m) = \sum_{i=1}^m p(n - m, i)$$

*Bevis.* Hvis  $\lambda$  er en partition af  $n$  med præcis  $m$  dele, betragtes den partition  $\lambda^*$  af  $n - m$ , som opnås ved at reducere alle dele i  $\lambda$  med 1 og fjerne eventuelle dele 0. Resultatet er en partition af  $n - m$  med  $i$  dele for et  $i \leq m$ . Det er klart, at reduktionsprocessen kan omvendtes. Forøg hver del af en partition af  $n - m$  med  $i \leq m$  dele med 1 og tilføj  $m - i$  dele lig 1.  $\square$

**Eksempel 2.5.** Vi har  $p(6, 3) = p(3, 1) + p(3, 2) + p(3, 3) = 1 + 1 + 1 = 3$  idet mængden af partitioner i 3 dele er  $\{(4 \ 1 \ 1), (3 \ 2 \ 1), (2 \ 2 \ 2)\}$  med tilhørende partitioner  $\{(3), (2 \ 1), (1 \ 1 \ 1)\}$  af 3.

**Sætning 2.6.** For  $n \geq 2$  gælder der

$$p(n) \leq p(n - 1) + p(n - 2).$$

Et bevis findes i [AE], Kapitel 3.3.

Sætningen viser at  $p(n)$  er begrænset opad til af Fibonnacci-tallene. Dette er også forklaret i [AE], Kapitel 3.3.

**Definition 2.7.** For  $n \geq 0$  defineres det  $n$ 'te Fibonnaccital som

$$F_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}.$$

Leddene er altså binomialkoefficienter, om hvilke der som altid gælder  $\binom{a}{b} = 0$  dersom  $a < 0$  eller  $b > a$ .

Således er

$$F_0 = \binom{0}{0} = 1, F_1 = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1+0 = 1, F_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} + \binom{0}{2} = 1+1+0 = 2$$

**Lemma 2.8.** For alle  $n > 0$  er

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

**Sætning 2.9.** For alle  $n > 0$  er

$$p(n) \leq F_n.$$

**Sætning 2.10.** For alle  $n > 0$  gælder

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$$

**Sætning 2.11.** Lad  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  og  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . For  $n \geq 0$  gælder

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})$$

**Korollar 2.12.** Lad  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . For alle  $n$  er

$$p(n) \leq \alpha^n.$$

Ovenstående vurdering er meget grov. Asymptotisk gælder<sup>1</sup>

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

En præcis rekursionsformel for  $p(n)$  bliver angivet i Kapitel 4, se også [AE], Kapitel 5.4.

---

<sup>1</sup>Se Andrews: Theory of Partitions, Kap. 5-6

### 3 Nogle partitionsbijektioner

Der findes en meget omfattende litteratur vedrørende bijektioner mellem mængder af partitioner. Man er interesseret i sætninger på følgende form:

Lad  $A$  og  $B$  være egenskaber som partitioner kan opfylde. Da er antallet af partitioner af  $n$ , der opfylder  $A$ , lig antallet af partitioner af  $n$  der opfylder  $B$ .

En sådan sætning kan bevises ved at angive en konkret bijektion mellem partitionsmængderne. Dette kaldes i litteraturen ofte et *bijektivt bevis*. Et bedre navn ville egentlig være *bijektionsbevis*. Vi giver nogle eksempler i dette kapitel. Sætningerne kan også bevises ved at betragte frembringende funktioner (et *analytisk bevis*). Den sidste mulighed er som regel den letteste. Vi giver nogle eksempler på analytiske beviser senere.

**Sætning 3.1.** *Antallet af partitioner af  $n$  i  $k$  dele er lig antallet af partitioner af  $n$  der har  $k$  som højeste del.*

*Bevis.* Bruger spejling i diagonalen af Ferrersdiagrammet (Youngdiagrammet) for en partition. Se [AE], Kapitel 3.1-3.2.  $\square$

Ved at spejle Ferrersdiagrammet for en partition  $\lambda$  i diagonalen fås Ferrersdiagrammet for den *konjugerede partition*  $\lambda^0$ . Den betegnes også nogle steder  $\lambda^*$  eller  $\lambda^t$ . (Kært barn har mange navne.)

**Eksempel 3.2.** *For  $n = 6$  er der tre partitioner der har 3 som højeste del:*

$$(3, 1, 1, 1), (3, 2, 1), (3, 3)$$

*Endvidere er der også 3 partitioner af  $n = 6$  i 3 dele:*

$$(4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$$

**Sætning 3.3.** *Antallet af selv-konjugerede partitioner af  $n$  er lig med antallet af partitioner af  $n$  der har alle dele forskellige og ulige.*

*Bevis.* Dette er forklaret i [AE] (3.4).  $\square$

**Eksempel 3.4.** *For  $n = 9$  har vi 2 partitioner med forskellige og ulige dele:*

$$(9), (5, 3, 1)$$

*og 2 selvadjungerede partitioner:*

$$(5, 1, 1, 1, 1), (3, 3, 3)$$

**Sætning 3.5.** (Euler) *Antallet af partitioner af  $n$  i ulige dele, er lig antallet af partitioner af  $n$  i forskellige dele.*

*Bevis.* Dette er forklaret *udførligt* i [AE], Kapitel 2.3.  $\square$

**Eksempel 3.6.** For  $n = 5$  er der tre partitioner med ulige dele:

$$(5), (3, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$$

og tre partitioner i lige dele:

$$(4, 1), (3, 2), (2, 1, 1, 1)$$

Sætningen stammer fra Euler, men det bijektive bevis blev først givet af Glaisher i 1800-tallet. Han bemærkede også, at brugen af den "2-adiske" (=binære) beskrivelse af de naturlige tal umiddelbart kunne generaliseres til vilkårlige positive (prim)tal.

**Sætning 3.7.** Lad  $p$  være et primtal. Antallet af partitioner af  $n$ , hvor ingen dele gentages  $p$  eller flere gange, er lig antallet af partitioner af  $n$ , hvor ingen del er delelig med  $p$ .

Sætningen er meget vigtig i den modulære repræsentationsteori for de symmetriske grupper  $S_n$ !

**Eksempel 3.8.** Lad  $p = 3$ . Der er syv partitioner af  $n = 6$  hvor ingen dele gentages 3 eller flere gange:

$$(6), (5, 1), (4, 2), (4, 1, 1), (3, 3), (3, 2, 1), (2, 2, 1, 1)$$

Tilsvarende er der syv partitioner af  $n = 6$  hvis dele ikke er delelig med 3:

$$(5, 1), (4, 2), (4, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

Den næste sætning kaldes "Eulers pentagonale sætning" og ser måske ved første blik lidt teknisk ud, men vi skal se, at den kan bruges til at give en effektiv rekursionsformel for partitionsfunktionen  $p(n)$ . F. Franklins bijektive bevis bliver af G. Andrews betegnet som "One of the truly remarkable achievements of the 19'th-century american mathematics."

**Sætning 3.9.** Lad  $Q_n$  og  $Q'_n$  være antallet af partitioner af  $n$  i hhv. et lige antal og et ulige antal forskellige dele. Da er

$$Q_n = \begin{cases} Q'_n, & n \neq (k/2)(3k \pm 1) \\ Q'_n + (-1)^k, & n = (k/2)(3k \pm 1) \end{cases}$$

for et  $k \in \mathbb{N}$ .

*Bevis.* Se [AE] Kapitel 3.5. □

Her er så et bijektionsbevis for en sætning, der blev nævnt i Kapitel 1 af dette kompendium.

**Sætning 3.10.** For alle  $n \in \mathbb{N}$  gælder:

$$p^+(n) = p^-(n) + p^0(n).$$

*Bevis.* (Richard Guy) Lad  $\mathcal{P}(n)$  være mængden af partitioner af  $n$ ,  $\mathcal{P}^o(n)$  mængden af partitioner af  $n$  med alle dele ulige og forskellige,  $\mathcal{P}^+(n)$  mængden af positive partitioner af  $n$  og  $\mathcal{P}^-(n)$  mængden af negative partitioner af  $n$  (Definition 1.15). Endvidere er

$$\mathcal{R}(n) = \mathcal{P}(n) \setminus \mathcal{P}^o(n)$$

Bemærk at  $\mathcal{P}^o(n) \subseteq \mathcal{P}^+(n)$  og derfor også  $\mathcal{P}^-(n) \subseteq \mathcal{R}(n)$ . Vi definerer en afbildning  $\lambda \mapsto \lambda^*$  på  $\mathcal{R}(n)$  med følgende egenskaber for alle  $\lambda \in \mathcal{R}(n)$ :

$$(I) \quad \lambda^{**} = \lambda$$

(II)  $\lambda$  og  $\lambda^*$  har forskelligt fortegn.

Heraf følger sætningen: (I) viser, at  $*$  er en bijektion og (II) at  $*$  afbilder  $\mathcal{P}^-(n)$  ind i  $\mathcal{P}^+(n) \setminus \mathcal{P}^o(n)$  og omvendt. Heraf fås så  $p^-(n) = p^+(n) - p^0(n)$ , som ønsket.

Vi knytter nogle tal til hvert  $\lambda \in \mathcal{R}(n)$  :

$$e(\lambda) = \begin{cases} \text{største lige del i } \lambda & \text{hvis } \lambda \text{ indeholder en lige del} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$r(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{hvis alle dele i } \lambda \text{ er forskellige} \\ \text{største gentagne del i } \lambda & \text{ellers} \end{cases}$$

Det er *ikke* muligt, at  $e(\lambda) = r(\lambda) = 0$ , når  $\lambda \in \mathcal{R}(n)$ , idet sådanne  $\lambda$ 'er ville være i  $\mathcal{P}^o(n)$ .

Vi betragter nu to muligheder:

Tilfælde 1:  $2r(\lambda) > e(\lambda)$

Tilfælde 2:  $e(\lambda) \geq 2r(\lambda)$ .

I *Tilfælde 1* lader vi  $\lambda^*$  være den partition, der opstår fra  $\lambda$  ved at erstatte 2 dele, som er lig  $r(\lambda)$ , med én del lig  $2r(\lambda)$  og lade alle andre dele uændret. Bemærk, at  $\lambda^*$ 's længde er en større end  $\lambda$ 's, så fortegnet skifter, jfr. Sætning 1.14. Bemærk endvidere, at  $\lambda^*$  er i  $\mathcal{R}(n)$ , da den har en lige del.

I *Tilfælde 2* lader vi  $\lambda^*$  være den partition, der opstår fra  $\lambda$  ved at erstatte den største lige del  $e(\lambda)$  med to dele, som er lig  $e(\lambda)/2$  og lade alle andre dele uændret. Bemærk, at  $e(\lambda) \neq 0$ , da ellers  $e(\lambda) = r(\lambda) = 0$ . Bemærk også, at  $\lambda^*$ 's længde er en mindre end  $\lambda$ 's, så fortegnet skifter. Endelig bemærkes, at  $\lambda^*$  er i  $\mathcal{R}(n)$ , da den har en del, der gentages.

Vi mangler kun at vise, at  $\lambda^{**} = \lambda$  for  $\lambda \in \mathcal{R}(n)$ .

*Tilfælde 1:* Vi antager at  $2r(\lambda) > e(\lambda)$  og da nogle gentagne dele fra  $\lambda$  er fjernet i  $\lambda^*$  må  $r(\lambda^*) \leq r(\lambda)$ . Uligheden  $2r(\lambda) > e(\lambda)$  bevirker også, at  $e(\lambda^*) = 2r(\lambda)$ . Derfor optræder tilfælde 2 for  $\lambda^*$ . Fra definitionen fås så  $\lambda^{**} = \lambda$ .

*Tilfælde 2:* Vi antager at  $e(\lambda) \geq 2r(\lambda)$ . Bemærk, at delen  $e(\lambda)$  i  $\lambda$  ikke gentages, fordi så ville  $r(\lambda) \geq e(\lambda) \geq 2r(\lambda)$ , en modstrid. Derfor er  $e(\lambda)$  *ikke* en del i  $\lambda^*$ . Vi får altså  $e(\lambda^*) < e(\lambda)$ . Da  $\lambda^*$  har to dele, som er lig  $e(\lambda)/2$ , må  $r(\lambda^*) \geq e(\lambda)/2$ . Så gælder altså  $2r(\lambda^*) \geq e(\lambda) > e(\lambda^*)$ , dvs. at tilfælde 1 forekommer for  $\lambda^*$ . Fra definitionen fås igen  $\lambda^{**} = \lambda$ .  $\square$

**Eksempel 3.11.** Lad  $\lambda = (8, 7, 6, 6, 1, 1)$ . Her er  $e(\lambda) = 8$ ,  $r(\lambda) = 6$ . Vi er i tilfælde 1 da  $2r(\lambda) = 12 > e(\lambda) = 8$ . Vi får  $\lambda^* = (12, 8, 7, 1, 1)$ . Nu er  $e(\lambda^*) = 12$ ,  $r(\lambda) = 1$ , så vi er i tilfælde 2 med  $\lambda^*$ . Vi får  $\lambda^{**} = (8, 7, 6, 6, 1, 1)$ .

## 4 Formelle potensrækker

Dette og det følgende kapitel giver en mere "algebrisk" beskrivelse af formelle potensrækker og deres relevans til partitionsidentiteter end i [AE], kapitel 5. *Specielt spiller konvergensspørgsmål absolut ingen rolle.* Det er fx. uvæsentligt for overvejelserne, hvilket legeme vi bruger. Der findes ikke noget anvendeligt konvergensbegreb i vilkårlige legemer.

Lad  $K$  være et vilkårligt legeme ( $\mathbb{Q}$  er dog i realiteten det eneste legeme, vi får brug for i dette kursus).

**Definition 4.1.** (Formel potensrække) *En formel potensrække med koefficienter fra  $K$  er et udtryk*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i q^i = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_n q^n + \dots, \quad a_i \in K$$

Her kalder vi  $q$  en variabel. Potensrækkerne  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i q^i$  og  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i q^i$  siges at være ens netop når  $a_i = b_i$  for alle  $i$ .

Variablen i potensrækken betegnes her ligesom i [AE] af traditionelle grunde med  $q$  i stedet for med  $t$  som i Mat2AL.

**Definition 4.2.** (Sum/Produkt af potensrækker) *For potensrækker  $f(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i q^i$  og  $g(q) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i q^i$  defineres:*

$$(f + g)(q) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) q^i$$
$$(f \cdot g)(q) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i q^i, \quad \text{hvor } c_i = \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j}$$

Med disse kompositioner danner mængden af formelle potensrækker en kommutativ ring  $K[[q]]$ , kaldet *Potensrækkeringen*, med et-element

$$1_{K[[q]]} = 1 + 0 \cdot q + 0 \cdot q^2 + \dots$$

Bemærk at polynomiumsringen  $K[q]$  er en *delring* af  $K[[q]]$ .

**Bemærkning 4.3.** *I en formel potensrække kan vi erstatte  $q$  med en positiv potens  $q^r$  af  $q$  og så få en ny formel potensrække: Hvis  $f(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i q^i$  så er*

$$f(q^r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i q^{r \cdot i}.$$

Det er klart at der så for formelle potensrækker gælder

$$f(q) = g(q) \iff f(q^r) = g(q^r).$$

Vi kan også lave andre substitutioner for  $q$ , fx. erstatte  $q$  med  $-q$ . I den ovenstående notation er  $f(-q)$  den formelle potensrække  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i q^i$ . Igen har vi

$$f(-q) = g(-q) \iff f(q) = g(q).$$

I en endnu større generalitet, kan det somme tider give mening at betragte sammensætningen  $(f \circ g)(q)$  af to potensrækker  $f(q)$  og  $g(q)$ . For ethvert  $i \in \mathbb{N}$  er jo  $g(q)^i$  igen en formel potensrække. (Sæt  $g(q)^0 = 1$ .) Hvis igen  $f(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i q^i$ , så er

$$(f \circ g)(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (g(q))^i.$$

Her skal man dog passe meget på, jfr. bemærkningerne om uendelige summer af potensrækker nedenfor! Hvis  $g(q)$  har det konstante led  $b_0 = 0$ , så vil  $(f \circ g)(q)$  give mening.

**Sætning 4.4.** Lad  $f(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i q^i \in K[[q]]$ . Da gælder:

$$f(q) \text{ er invertibel i } K[[q]] \iff a_0 \neq 0.$$

*Bevis.* Antag at  $g(q) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i q^i$  opfylder at  $(f \cdot g)(q) = 1_{K[[q]]}$ . Så er ifølge Definition 4.2  $a_0 b_0 = 1_K$ . Specielt må  $a_0 \neq 0$ , da  $K$  er et legeme. Hvis omvendt  $a_0 \neq 0$ , sættes  $b_0 = a_0^{-1}$ . Derefter bestemmes  $b_1$  således, at  $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ . Her er  $b_1$  entydigt fastlagt, da  $a_0 \neq 0$ . Nu kan vi bestemme  $b_2$  entydigt, så  $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$ . Generelt vil vi, når vi har bestemt  $b_0, \dots, b_{k-1}$ , få  $b_k$  entydigt fra ligningen  $a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$ . Så er ifølge Definition 4.2  $g(q) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i q^i$  inverst element til  $f(q)$ .  $\square$

Hvis man konkret skal checke, om givne formelle potensrækker  $f(q)$  og  $g(q)$  er inverse til hinanden, kan det gøres ved at bevise, at deres produkt er  $1 (= 1_{K[[q]])}$ .

**Eksempel 4.5.** Her er nogle trivielle identiteter i  $\mathbb{Q}[[q]]$ :

1.  $(1 - q)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} q^i$
2.  $(1 + q)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q^i$
3.  $(1 - q - q^2)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i q^i$ , hvor  $F_i$  er det  $i$ 'te Fibonacciital
4.  $(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} q^i)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (-1)^i q^i$

Den første af identiteterne bevises fx. ved at multiplicere  $(1 - q)$  og  $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$  under anvendelse af 4.2: Her er  $a_0 = 0, a_1 = -1$  og  $a_i = 0$  for  $i \geq 2$ . Endvidere er  $b_i = 1$  for alle  $i \geq 0$ . Heraf beregnes fra formlen, at  $c_0 = 1$  og  $c_i = 0$  for  $i \geq 1$ . De andre bevises på analog måde. Man kan også udlede den anden identitet fra den første ved at erstatte  $q$  med  $-q$ , jfr. Bemærkning 4.3.

Bemærk at vi regner helt formelt og ikke bruger konvergensspørgsmål. I den matematiske analyse (og i bogen [AE]) vil man sige at  $(1 - q)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} q^i$  gælder når  $|q| < 1$ . Heri ligger, at man arbejder med analytiske funktioner over det komplekse

legeme. Det gør vi ikke. Vi regner algebraisk i potensrækkeringen over et vilkårligt legeme!

Lad nu  $(f_n)(q)_{n \in \mathbb{N}}$  være en følge af formelle potensrækker. Under visse indskrænkninger er det muligt at danne den uendelige sum  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(q)$  eller det uendelige produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} f_n(q)$ , således at resultatet igen kan fortolkes som en formel potensrække i  $K[[q]]$ .

Er f.eks.  $f_i(q) = \sum_{n=i}^{\infty} q^n, i \geq 1$ , altså

$$f_1(q) = q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$

$$f_2(q) = q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$

$$f_3(q) = q^3 + q^4 + \dots$$

etc., så er det klart at man med rimelighed kan definere

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right)(q) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^n$$

Derimod kan man ikke definere produktet i dette tilfælde, for lige meget hvordan man multiplicerer et led fra hvert af de uendelig mange  $f_i$  sammen, så vil størrelsen  $q^\infty$  indgå. For et få et veldefineret produkt, er det altså en fordel hvis konstantledet er 1.

Mere generelt, hvis  $f_i(q) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}q^j, i \in \mathbb{N}$  er en følge af formelle potensrækker og vi ønsker at tilskrive  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  mening, så skal  $\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$  have mening for alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . Da vi ikke vil arbejde med konvergens af uendelige rækker må vi kræve at summerne er "endelige", dvs. for alle  $j \in \mathbb{N}_0$  skal der kun være endeligt mange  $i$  så  $a_{ij} \neq 0$ .

**Bemærkning 4.6.** For at den uendelige sum er veldefineret kræves altså:

- For alle  $j \geq 0$  findes der kun endeligt mange  $i$  så  $a_{ij} \neq 0$  (1)

Hvis på den anden side  $\prod_{i=1}^{\infty} f_i$  skal have mening, så skal koefficienten til  $q^j$  være endelig. Den er givet ved

$$\sum_{(j_i)_{i \in \mathbb{N}}} \prod_{i=1}^{\infty} a_{ij_i} \quad (*)$$

hvor  $(j_i)_{i \in \mathbb{N}} = (j_1, j_2, \dots)$  gennemløber alle følger med  $\sum_{i \in \mathbb{N}} j_i = j$ .

I (\*) kan  $\prod_{i=1}^{\infty} a_{ij_i}$  tillægges mening hvis næsten alle  $a_{ij_i} = 1$ . Dette kan opnås ved at kræve  $a_{i0} = 1$  for næsten alle  $i$  (overvej). Endvidere må i (\*) næsten alle summander være 0, for at summen skal være endelig. Dette opnås ved at kræve at der for alle  $j \neq 0$  kun findes endeligt mange  $i$  så  $a_{ij} \neq 0$ .

**Bemærkning 4.7.** For at det uendelige produkt er veldefineret kræves altså:

- $a_{i0} = 1$  for næsten alle  $i$
- For alle  $j > 0$  findes der kun endeligt mange  $i$  så  $a_{ij} \neq 0$  (2)

**Bemærkning 4.8.** Antag at vi for et  $j \geq 1$  skal beregne koefficienten  $c_j$  til  $q^j$  i et uendeligt produkt af formelle potensrækker  $\prod_{n \in \mathbb{N}} f_n(q)$ . Fra den netop anførte betingelse 4.7 ses, at der må findes et naturligt tal  $m$  således at der for alle  $i \geq m$ ,  $1 \leq j' \leq j$  gælder, at  $a_{ij'} = 0$ . Det har som konsekvens, at  $c_j$  kan beregnes som koefficienten til  $q^j$  i det endelige produkt  $\prod_{n=1}^m f_n(q)$  af de første  $m$  faktorer. Prøv at formulere et tilsvarende udsagn for uendelige summer af formelle potensrækker 4.6.

**Eksempel 4.9.**

1. Lad  $f_i(q) = \frac{q^{i^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^i)}$ . Da  $\frac{1}{1-q^a} \in K[[q]]$  (se Eksempel 4.5), er også det uendelige produkt

$$q^{i^2}(1+q+q^2+\dots)(1+q^2+q^4+\dots)\dots(1+q^i+q^{2i}+\dots)$$

en formel potensrække. I  $f_i(q)$  er det mindste led forskellig fra 0 netop  $q^{i^2}$ , så ifølge 4.6 har

$$f(q) = 1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(q)$$

mening. Vi kan beregne nogle få koefficienter:

$$\begin{aligned} f_1(q) &= q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots \\ f_2(q) &= q^4 + q^5 + 2q^6 + 2q^7 + \dots \\ f_3(q) &= q^9 + \dots \end{aligned}$$

så

$$f(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 3q^6 + \dots$$

2. Lad  $g_i(q) = \frac{1}{1-q^i} = 1 + q^i + q^{2i} + \dots$ . Så har, ifølge 4.7, det uendelige produkt

$$g(q) = \prod_{i \in \mathbb{N}} g_i(q)$$

mening. Vi har

$$g(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots$$

3. Lad

$$h_1(q) = \frac{1}{1-q}, \quad h_2(q) = \frac{1}{1-q^4}, \quad h_3(q) = \frac{1}{1-q^6}, \dots$$

og generelt

$$h_{2n-1} = \frac{1}{1-q^{5n-4}}, \quad h_{2n} = \frac{1}{1-q^{5n-1}}.$$

Da er

$$h(q) = \prod_{n \in \mathbb{N}} h_n(q)$$

defineret og lig

$$h(q) = \prod_{n \geq 0} \left( \frac{1}{1-q^{5n-4}} \right) \left( \frac{1}{1-q^{5n-1}} \right).$$

Man kan beregne at

$$h(q) = 1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \dots$$

En berømt sætning af Rogers og Ramanujan (og Schur) siger at  $f(q) = h(q)$  hvor  $f(q)$  og  $h(q)$  er givet som i eksempel ovenfor. (Se [AE], side 52.)

## 5 Frembringende funktioner. Partitionsidentiteter

Lad igen  $K$  være et vilkårligt legeme.

Hvis  $a : \mathbb{N}_0 \rightarrow K$  er en afbildning, så kaldes den formelle potensrække  $f(q) = \sum_{n \geq 0} a(n)q^n$  for den *frembringende funktion* for  $a$ . Man skriver dette som  $a \doteq f$ . Komplicerede sammenhænge mellem afbildninger kan ofte udtrykkes kort og elegant med frembringende funktioner!

### Eksempel 5.1.

1. Hvis  $1 : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Q}$  er givet ved  $1(n) = 1$ , så er

$$1 \doteq 1 + q + q^2 + \dots = (1 - q)^{-1}$$

2. Analogt ses, jf. eksempel 4.5(3) at

$$F_n \doteq (1 - q - q^2)^{-1}$$

3. Hvis  $k \in \mathbb{N}$  og  $\binom{k}{-} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Q}$  er givet ved  $\binom{k}{-}(n) = \binom{k}{n}$ , ses at

$$\binom{k}{-} \doteq (1 + q)^k$$

Dette udsagn er simpelthen bare binomialformlen

$$\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} q^n = (1 + q)^k.$$

**Sætning 5.2.** Lad  $p : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$  være partitionsfunktionen. Da gælder:

$$p(n) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i}$$

*Bevis.* I dette bevis er det væsentligt at benytte den *eksponentielle skrivemåde* ( $i^{m_i}$ ) for en partition  $\lambda$ , jfr. Kapitel 1. Det betyder altså, at  $m_i$  af  $\lambda$ 's dele er  $i$ . Vi får også brug for, at

$$\frac{1}{1 - q^i} = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m \cdot i},$$

således at højre side udførligere kan skrives som produktet

$$\begin{aligned} & (1 + q^{1 \cdot 1} + q^{2 \cdot 1} + q^{3 \cdot 1} + q^{4 \cdot 1} + \dots) \times \\ & (1 + q^{1 \cdot 2} + q^{2 \cdot 2} + q^{3 \cdot 2} + q^{4 \cdot 2} + \dots) \times \\ & \dots \\ & (1 + q^{1 \cdot i} + q^{2 \cdot i} + q^{3 \cdot i} + q^{4 \cdot i} + \dots) \times \\ & \dots \end{aligned}$$

Ved udmultiplicering skal vi *vælge* et led, lad os sige  $q^{m_i \cdot i}$ , fra hver af de uendelige summer  $\sum_{m=0}^{\infty} q^{m \cdot i}$ . Alle pånær endelig mange led skal vælges som  $1 = q^{0 \cdot i}$ , dvs. at

næsten alle  $m_i$ 'er er 0, og hvis summen  $\sum_{i \geq 1} m_i \cdot i = n$  får vi altså et bidrag  $q^n$ . Vores valg af led er selvfølgelig fastlagt entydigt ved tallene  $m_i$  og til valget knytter vi så den partition af  $n$ , som er givet ved, at dens eksponentielle skrivemåde er  $(i^{m_i})$ . Omvendt giver en partitions eksponentielle skrivemåde os et veldefineret valg af led i udmultipliceringen.  $\square$

Læseren bør gøre sig klart, at det er den *eksponentielle skrivemåde* for partitioner, der er den afgørende ingrediens i det ovenstående bevis. For forståelsen af det følgende er det væsentligt hele tiden at huske dette.

Samtidig kan vi anse det ovenstående som vores første "*analytiske*" bevis for en partitionsidentitet. Vi bemærker at argumenterne alligevel stadig er rent formelt algebraiske/kombinatoriske og uafhængige af evt. konvergensspørgsmål for uendelige rækker.

**Sætning 5.3.** (1) *Den frembringende funktion for antallet af partitioner af  $n$  med ulige dele er*

$$P_{ul}(q) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2i-1}} = \frac{1}{1 - q} \frac{1}{1 - q^3} \frac{1}{1 - q^5} \cdots$$

(2) *Den frembringende funktion for antallet af partitioner af  $n$  med forskellige dele er*

$$Q(q) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^i)$$

(3) *Der gælder  $P_{ul}(q) = Q(q)$ .*

*Bevis.* Vi forfiner argumentationen fra før og bibeholder den eksponentielle skrivemåde  $\lambda = (i^{m_i})$  for en partition. Vi ser at  $\lambda$  har ulige dele præcis når  $m_i = 0$  for alle *lige*  $i$ . Så den frembringende funktion for disse partitioner må være  $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{2i-1}}$ . På tilsvarende måde har  $\lambda$  forskellige dele præcis når  $m_i \leq 1$  for alle  $i$ . Vi får  $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^i)$  som frembringende funktion. Hermed har vi vist (1) og (2).

Med beviset for (3) går vi ind i en ny fase, idet vi nu udnytter Bemærkningerne 4.3 og 4.8.

Vi har at

$$P(q^2) = \prod_i \frac{1}{1 - q^{2i}}$$

og derfor

$$\frac{P(q)}{P(q^2)} = \frac{\prod_i (1 - q^{2i})}{\prod_i (1 - q^i)} = \frac{(1 - q^2)(1 - q^4) \cdots (1 - q^{2i}) \cdots}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^i) \cdots}$$

Vi bemærker nu, jfr. Bemærkning 4.8, at koefficienten til  $q^j$  i denne formelle potensrække er den samme som koefficienten til  $q^j$  i det *endelige* produkt

$$X_j := \frac{(1 - q^2)(1 - q^4) \cdots (1 - q^{2j})}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^j)}$$

hvor vi altså i tæller og nævner har endelige produkter. Men i det endelige produkt  $X_j$  kan vi tillade os forkorte i tæller og nævner med polynomier, som er invertible

betragtet som elementer i potensrækningen, uden at produktet  $X_j$  ændres. Derfor er koefficienten til  $q^j$  i  $X_j$  det samme som i

$$Y_j := \frac{1}{(1-q)(1-q^3)\cdots(1-q^{j'})}$$

hvor  $j'$  er det største ulige tal mindre lig  $j$ . Her har vi forkortet faktorer på formen  $(1-q^{2k})$ ,  $2k \leq j$  i tæller og nævner. Endvidere har vi ignoreret faktorerne  $(1-q^{2k})$ ,  $2k > j$  i tælleren, som ikke bidrager til  $q^j$ . Men koefficienten til  $q^j$  i  $Y_j$  er den samme som i  $P_{ul}(q)$ . Her benyttes igen Bemærkning 4.8. Dermed er vist, at

$$\frac{P(q)}{P(q^2)} = P_{ul}(q)$$

fordi de har samme koefficienter til enhver potens af  $q$ . Hvis vi i stedet forkorter faktorer på formen  $(1-q^i)$  i tæller og nævner af  $X_j$  og benytter, at  $(q^{2i}-1) = (q^i+1)(q^i-1)$  ser vi koefficienten til  $q^j$  i  $X_j$  er den samme som i

$$Z_j = \prod n = 1^j(1+q^n).$$

Men koefficienten til  $q^j$  i  $Y_j$  er den samme som i  $Q(q)$ , igen ifølge Bemærkning 4.8. Heraf fås

$$\frac{P(q)}{P(q^2)} = Q(q).$$

□

**Sætning 5.4.** *Lad som før  $p^0(n)$  være antallet af partitioner af  $n$  i forskellige ulige dele. Da gælder:*

$$p^0(n) \doteq \prod_{i=1}^{\infty} (1+q^{2i-1}) = P^0(q)$$

*Bevis.* Analogt til beviset for Sætning 5.3(3). □

**Bemærkning 5.5.** *Sætning 5.3 viser at*

$$P_{ul}(q) = Q(q) = \frac{P(q)}{P(q^2)}$$

og Sætning 5.4 viser, at

$$P^0(q) = \frac{Q(q)}{Q(q^2)}.$$

(Hvorfor?) Altså fås

$$P^0(q) = \frac{P(q)P(q^4)}{P(q^2)^2}$$

**Sætning 5.6.** *Lad  $Q_n$  og  $Q'_n$  være som i sætning 3.9. Vi kalder her  $Q_n^+ = Q_n$  og  $Q_n^- = Q'_n$ . Da gælder*

(1)

$$Q_n^+ - Q_n^- \doteq \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i) = P(q)^{-1}$$

(2)

$$Q_n^+ - Q_n^- \doteq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (q^{\frac{k}{2}(3k-1)} + q^{\frac{k}{2}(3k+1)})$$

*Bevis.* (1) Fra Sætning 5.2 ses, at  $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i) = P(q)^{-1}$  (Overvej). Hvis vi sammenligner

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^i)$$

med

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i),$$

ser vi, at der er korrespondence mellem leddene, der fås ved udmultiplicering af de to produkter: Hver gang  $\lambda = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  er en partition af  $n$  i forskellige dele, så svarer den til det led i udmultipliceringen hvor vi vælger  $q^{i_1}$  fra faktor  $(1 + q^{i_1})$  (hhv.  $(1 - q^{i_1})$ ), og  $q^{i_2}$  fra faktor  $(1 + q^{i_2})$  (hhv.  $(1 - q^{i_2})$ ), osv. og vælger 1 fra alle andre faktorer. Forskellen mellem koefficienterne i de to uendelige produkter er, at der i det andet produkt kommer et fortegn  $(-1)^m$  fra  $\lambda$  som bidrag til  $q^n$ . Derfor er  $Q_n^+ - Q_n^-$  netop koefficienten til  $q^n$  i  $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)$ .

Udsagn (2) er nu en umiddelbar konsekvens af Eulers pentagonal theorem, Sætning 3.9. Overvej dette nøje!  $\square$

Fra denne sætning fås let:

**Sætning 5.7.** (Eulers rekursionsformel for  $p(n)$ ) *For alle  $n \geq 1$  gælder*

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} [p(n - \frac{k}{2}(3k-1)) + p(n - \frac{k}{2}(3k+1))]$$

hvor  $p(n) = 0$  hvis  $n \leq 0$ .

*Bevis.* Ifølge Sætning 5.6 er

$$P(q)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (q^{\frac{k}{2}(3k-1)} + q^{\frac{k}{2}(3k+1)}).$$

Da  $P(q) = \sum_{i=1}^{\infty} p(i)q^i$ , fås sætningen ved at sammenligne koefficienten til  $q^n$  på de to sider af ligningen  $P(q)P(q)^{-1} = 1$ .  $\square$

**Bemærkning 5.8.** *Eulers formel siger altså at*

$$p(n) = \underbrace{p(n-1) + p(n-2)}_{k=1} - \underbrace{p(n-5) - p(n-7) + \dots}_{k=2}$$

*F.eks. er*

$$p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3) = 30 + 22 - 7 - 3 = 42.$$

Lad  $q^+(n)$  (hhv.  $q^-(n)$ ) være antallet af lige (hhv. ulige) partitioner af  $n$  i forskellige dele.

**Sætning 5.9.** For  $\epsilon = \pm$  er

$$(1) Q_n^\epsilon \doteq \frac{1}{2}(Q(q) + \epsilon P(q)^{-1})$$

$$(2) q^\epsilon(n) \doteq \frac{1}{2}(Q(q) + \epsilon P(-q)^{-1})$$

*Bevis.* (1) fås ved eliminering fra de følgende ligninger, hvoraf den første er triviel og den anden er fra Sætning 5.6

$$Q_n^+ + Q_n^- \doteq Q(q)$$

$$Q_n^+ - Q_n^- \doteq P(q)^{-1}.$$

(2) En partition af  $n$  i  $m$  dele er lige, hvis  $n - m$  er lige. Derfor er, som det let ses,

$$q^\epsilon(n) = Q_n^{(-1)^n \epsilon}.$$

Dette viser, at for alle  $n$  er

$$q^+(n) - q^-(n) = (-1)^n (Q_n^+ - Q_n^-). \quad (*)$$

Ved at erstatte  $q$  med  $-q$  i identiteten

$$P(q)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n^+ - Q_n^-) q^n$$

fås så (jfr. Bemærkning 4.3)

$$P(-q)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (Q_n^+ - Q_n^-) q^n = \sum_{n=1}^{\infty} (q^+(n) - q^-(n)) q^n,$$

under anvendelse af ligningen (\*), altså

$$q^+(n) - q^-(n) \doteq P(-q)^{-1}.$$

Da trivielt

$$q^+(n) + q^-(n) \doteq Q(q),$$

fås (2) ved eliminering. □

**Bemærkning 5.10.** Ved at udnytte at  $Q(q) = \frac{P(q)}{P(q^2)}$  fås også

$$Q_n^\epsilon \doteq \frac{P(q)^2 + \epsilon P(q^2)}{P(q)P(q^2)}$$

Som i Kapitel 1 er  $p^+(n)$  (hhv.  $p^-(n)$ ) være antallet af lige (hhv. ulige) partitioner af  $n$ .

Det analoge resultat til sætning 5.6 for partitioner med gentagelser er nu

**Sætning 5.11.**

$$p^+(n) - p^-(n) \doteq \prod_{i=1}^{\infty} (1 + (-1)^i q^i)^{-1} = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1+q^2} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdots$$

*Bevis.* Det uendelige produkt er, skrevet udførligt:

$$(1 + q^{1 \cdot 1} + q^{2 \cdot 1} + q^{3 \cdot 1} + q^{4 \cdot 1} + \dots) \times$$

$$(1 - q^{1 \cdot 2} + q^{2 \cdot 2} - q^{3 \cdot 2} + q^{4 \cdot 2} \pm \dots) \times$$

...

$$(1 + (-1)^{i-1} q^{1 \cdot i} + q^{2 \cdot i} + (-1)^{i-1} q^{3 \cdot i} + q^{4 \cdot i} \pm \dots) \times$$

...

Den  $i$ 'te faktor kan også skrives som følger:

$$1 + (-1)^{1 \cdot (i-1)} q^{1 \cdot i} + (-1)^{2 \cdot (i-1)} q^{2 \cdot i} + \dots + (-1)^{m \cdot (i-1)} q^{m \cdot i} + \dots$$

Som i tidligere beviser vil en partition  $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$ , af  $n$ , (skrevet eksponentielt) svare til, at vi vælger  $(-1)^{m_i \cdot (i-1)} q^{m_i \cdot i}$  fra den  $i$ 'te faktor for hvert  $i$  så vi får et bidrag  $(-1)^t q$  til det uendelige produkt, hvor  $t = \sum_i (i-1)m_i$ . Resultatet følger fra Bemærkning 1.16.  $\square$

Analogt til Sætning 5.6(2) findes

**Sætning 5.12.**

$$p^+(n) - p^-(n) \doteq P^0(q)$$

*Bevis.* Et bijektionsbevis blev givet i slutningen af Kapitel 3.

I dette bevis regner vi med formelle potensrækker. Ifølge Sætningerne 5.4 og 5.11 skal vi vise identiteten

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^{2i-1}) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + (-1)^i q^i)^{-1}.$$

Hvis vi i denne identitet erstatter  $q$  med  $-q$  får vi

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{2i-1}) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^i)^{-1}.$$

Ifølge Bemærkning 4.3 kan vi nøjes med at vise denne identitet. Men den følger fra Sætning 5.3(3) ved invertering.  $\square$

Analogt til Sætning 5.9(1) fås så

**Korollar 5.13.** For  $\epsilon = \pm$  er

$$p^\epsilon(n) \doteq \frac{1}{2}(P(q) + \epsilon P^0(q))$$

**Sætning 5.14.** Lad  $p_{\leq k}(n)$  være antallet af partitioner af  $n$ , hvor alle dele er  $\leq k$ . Da gælder for  $k \in \mathbb{N}$

$$p_{\leq k}(n) \doteq \frac{1}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^k)}$$

*Bevis.* Analogt til beviset for sætning 5.2. □

**Bemærkning 5.15.** Som vi har set i Kapitel 3 er  $p_{\leq k}(n)$  også antallet af partitioner af  $n$ , i højst  $k$  dele.

Vi slutter med et par potensrækkeidentiteter, der kan bevises kombinatorisk. Den første findes i [AE], (8.2). Ideen i beviset er at dele partitionerne op i klasser svarende til størrelsen af “Durfee kvadratet” (Se [AE], p. 76.) Den  $i$ 'te summend i identiteten tæller partitioner, hvis Durfee-kvadrat har størrelse  $i \times i$ .

**Sætning 5.16.** (Durfee-identiteten)

$$\begin{aligned} P(q) &= \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)^{-1} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} q^{j^2} \left( \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^i)} \right)^2 \\ &= 1 + q \frac{1}{(1-q)^2} + q^4 \frac{1}{(1-q)^2(1-q^2)^2} + \dots \end{aligned}$$

Det er interessant at sammenligne sætning 5.16 med Rogers-Ramanujan-identiteten (kapitel 4), som vi ikke vil/kan bevise her (se et bevis i [AE]):

$$\prod_{i=0}^{\infty} ((1 - q^{5i+1})^{-1} (1 - q^{5i+4}))^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} q^{j^2} \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}$$

Denne identitet er ækvivalent med følgende udsagn:

Antallet af partitioner af  $n$ , hvor alle dele er  $\equiv 1(5)$  eller  $\equiv 4(5)$  er lig antallet af partitioner  $(l_1, \dots, l_m)$  af  $n$  hvor  $l_i - l_{i+1} \geq 2$  for  $i = 1, 2, \dots, m - 1$

**Eksempel 5.17.** Lad  $n = 5$ . Partitioner med dele med  $\equiv 1$  eller  $\equiv 4 \pmod{5}$  er (41) og  $(1^5)$ . Partitionerne med differens er (5) og (41).

Et resultat der svarer til sætning 5.16 for partitioner i forskellige dele er

**Sætning 5.18.**

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^i) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} q^{\binom{j+1}{2}} \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}$$

*Bevis.* Venstre side er den frembringende funktion for partitioner i forskellige dele. (Sætning 5.3.) Hvis vi har en partition  $\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_{j-1}, l_j)$  af  $n$  i  $j$  forskellige dele, så lad  $\lambda^* = (l_1 - j, l_2 - (j - 2), \dots, l_{j-1} - 2, l_j - 1)$ . (Vi har trukket 1 fra den mindste del, 2 fra den næstmindste osv.) Hvis vi udelader eventuelle dele  $= 0$ , så er  $\lambda^*$  en partition af  $n - \binom{j+1}{2}$  med højst  $j$  dele. (Bemærk, at  $1 + 2 - \dots + j = \binom{j+1}{2}$ .) Omvendt giver en partition af  $n - \binom{j+1}{2}$  med højst  $j$  dele en partition af  $n$  ved at addere  $j$  til den største del,  $j - 1$  til den næststørste osv. Nu benyttes Sætning 5.14 og bemærkningen efter den. □

## 5.1 Formel differentiation og dens anvendelser

Hvis vi betragter en formel potensrække

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in K[[q]]$$

så kan vi *definere* dens *aftledede*,  $f'(q)$ , som den formelle potensrække

$$f'(q) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n q^{n-1} \in K[[q]]$$

Det er let at se at de sædvanlige regneregler for differentiation

sumregel, produktregel, kæderegel

gælder for formelle potensrækker.

Mere interessant er det, at regnereglerne også gælder for uendelige summer af produkter af formelle potensrækker! Hvis  $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_i(q)$ , så fås fra betingelserne for en veldefineret uendelig sum 4.6 følgende:

For alle  $j \geq 0$  findes et  $n_j \in \mathbb{N}$  således at

$$f(q) - \sum_{i=1}^{n_j} f_i(q)$$

er delelig med  $q^{j+1}$ .

Det betyder, at koefficienterne til  $1, q, q^2, \dots, q^j$  må stemme overens i  $f(q)$  og  $\sum_{i=1}^{n_j} f_i(q)$ , og derfor stemmer koefficienterne i den formelle potensrække  $f'(q)$  overens med koefficienterne i den endelige sum

$$\sum_{i=1}^{n_j} f'_i(q)$$

til og med  $j - 1$ . Dette viser at

**Bemærkning 5.19.**  $f'(q) = \sum_{i=1}^{\infty} f'_i(q)$  idet de har samme koefficienter til alle potenser af  $q$ .

Analogt fås under anvendelse af 4.7:

**Bemærkning 5.20.** Hvis

$$g(q) = \prod_{i=1}^{\infty} f_i(q),$$

så er

$$g'(q) = g(q) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f'_i(q)}{f_i(q)}.$$

**Eksempel 5.21.** *Anvendes ovenstående bemærkninger på identiteten*

$$P(q) = \sum_{i=1}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i}$$

fås

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(n)q^{n-1} = P(q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{iq^{i-1}}{1-q^i}$$

for hvis  $g_i(q) = \frac{1}{1-q^i}$ , så ses det let at  $\frac{g'_i(q)}{g_i(q)} = \frac{iq^{i-1}}{1-q^i}$ . Ved at multiplicere dette med  $q$  fås identiteten

$$\sum_{n=1}^{\infty} np(n)q^n = P(q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{iq^i}{1-q^i}$$

Lad nu  $S(q) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{iq^i}{1-q^i}$ . Endvidere betegner  $\sigma$  den talteoretiske *divisorsumfunktion*: For  $n \in \mathbb{N}$  er  $\sigma(n)$  summen af alle positive divisorer i  $n$ . Eksempelvis er

$$\sigma(2) = 1 + 2 = 3, \quad \sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12, \quad \sigma(9) = 1 + 3 + 9 = 13.$$

**Sætning 5.22.** *Der gælder*

$$\sigma(n) \doteq S(q)$$

*Bevis.* Idet  $\frac{q^i}{1-q^i} = 1 + q^i + q^{2i} + q^{3i} + \dots$  fås

$$\begin{aligned} S(q) &= \\ &(q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + \dots) \\ &+ (2q^2 + 2q^4 + 2q^6 + \dots) \\ &+ (3q^3 + 3q^6 + \dots) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Idet vi nu adderer koefficienterne til et givet  $q^n$  "lodret" i skemaet fås resultatet.  $\square$

**Sætning 5.23.** *For alle  $n \in \mathbb{N}$  er*

$$np(n) = \sum_{k=0}^{n-1} p(k)\sigma(n-k)$$

*Bevis.* Sammenlign koefficienter til  $q^n$  i den sidste ligning i Eksempel 5.21  $\square$

Vi har altså en ny rekursionsformel for  $p(n)$ , dog ikke så effektiv som Sætning 5.7.

$$p(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p(n-k)\sigma(k) = \frac{1}{n}(p(n-1) + 3p(n-2) + 4p(n-3) + 7p(n-4) + \dots)$$

**Eksempel 5.24.**

$$p(5) = \frac{1}{5}(p(4) + 3p(3) + 4p(2) + 7p(1) + 6p(0)) = \frac{1}{5}(5 + 9 + 8 + 7 + 6) = 7$$

Den *logaritmiske afledede* af en funktion  $f(x)$  er

$$\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Sætning 5.23 viser

$$\frac{P'(q)}{P(q)} = \frac{1}{q}S(q)$$

og giver således at udtryk for den logaritmiske afledede af  $P(q)$ . Der er altså en tæt og bemærkelsesværdig sammenhæng imellem partitionsfunktionen  $p(n)$  og divisor-sumfunktionen  $\sigma(n)$ .

## 6 Hooks, $\beta$ -mængder og partitioner

I repræsentationsteori for  $S_n$  (som præsenteres meget kort i næste kapitel) spiller de såkaldte “hooks” (på dansk: Vinkler eller Kroge) i Ferrer’s diagrammer for en partitioner en vigtig rolle, både hvad angår *Murnaghan-Nakayama*-formlen (Kapitel 7), som kan ses som en rekursionsformel for de irreducible karakterer, såvel som i dimensionsformlen for de irreducible karakterer. Det viser sig, at dimensionerne er lig antallene af “standard-tableauer” (Kapitel 8). Disse antal involverer “hook-længder”.

Indholdet af dette kapitel er en forkortet version af Kapitel 1 i mine Lecture Notes. Hvad angår beviser, refererer vi derfor til denne kilde som [LN].

Til behandling af vigtige spørgsmål vedr. ”hook-strukturen” af partitioner er det fordelagtigt at formulere disse ved hjælp af  $\beta$ -mængder:

**Definition 6.1.** ( $\beta$ -mængde)

En  $\beta$ -mængde  $X$  er en endelig delmængde af  $\mathbb{N}_0$ .

Vi skriver som regel  $\beta$ -mængder i nedadstigende orden

$$X = \{h_1, h_2, \dots, h_t\}, \quad h_1 > h_2 > \dots > h_t \geq 0.$$

Til en  $\beta$ -mængde  $X$  knyttes en partition ved forskriften

$$\{h_1, h_2, \dots, h_t\} \xrightarrow{\Pi} (l_1, l_2, \dots, l_k)$$

hvor

$$l_i = h_i - (t - i)$$

og alle dele med  $l_j = 0$  er udeladt. I [LN], side 6, kaldes  $\Pi(X)$  for  $P^*(X)$ .

**Eksempel 6.2.** (1)  $X = \{8, 6, 2, 1\}$ ,  $\Pi(X) = (8-3, 6-2, 2-1, 1-0) = (5, 4, 1, 1) \vdash 11$

(2)  $Y = \{8, 6, 2, 1, 0\}$ ,  $\Pi(X) = (8-4, 6-3, 2-2, 1-1, 0-0) = (4, 3) \vdash 7$

Givet en partition  $\lambda$ , vil vi gerne prøve at bestemme alle  $\beta$ -mængder  $X$  med  $\Pi(X) = \lambda$ .

**Definition 6.3.** ( $\beta$ -mængde for en partition/ $X^{+n}$ ) Lad  $X = \{h_1, \dots, h_t\}$  være en  $\beta$ -mængde.

(1)  $X$  siges at være en  $\beta$ -mængde for partitionen  $\lambda$  dersom  $\Pi(X) = \lambda$ .

(2) Vi sætter  $X^+ = \{h_1 + 1, \dots, h_t + 1, 0\}$  og induktivt for  $n \geq 1$ :

$$X^0 = X, \quad X^{+n} = (X^{+(n-1)})^+$$

Vi har altså at for  $X = \{h_1, \dots, h_t\}$  er

$$X^{+n} = \{h_1 + n, \dots, h_t + n, n - 1, n - 2, \dots, 1, 0\}$$

**Sætning 6.4.** Lad  $\lambda = (l_1, \dots, l_k)$  være en partition. Sæt

$$X = \{l_1 + (k - 1), l_2 + (k - 2), \dots, l_k\}$$

For vilkårlig  $\beta$ -mængde  $Y$  gælder:

$$\Pi(Y) = \lambda \Leftrightarrow Y = X^{+n} \text{ for et } n \geq 0$$

*Bevis.* Dette fås let ved at "regne baglæns" fra partitionens dele. □

**Definition 6.5.** Lad  $X = \{h_1, \dots, h_t\}$  og  $\Pi(X) = (l_1, \dots, l_k)$ . For  $1 \leq i \leq t$  defineres

$$\mathcal{H}_i(X) = \{1, 2, \dots, h_i\} \setminus \{h_i - h_j \mid j > i\}$$

**Lemma 6.6.** Med den ovenstående notation har vi:

- (1)  $|\mathcal{H}_i(X)| = h_i - (t - i) = l_i$  hvis  $\Pi(X) = (l_1, \dots, l_k)$  og  $1 \leq i \leq k$ .
- (2)  $\mathcal{H}_i(X) = \emptyset$  for  $i > k$ .
- (3)  $\mathcal{H}_i(X) = \mathcal{H}_i(X^+)$ .

*Bevis.* Dette fås let fra definitionen. □

Vi skriver

$$\mathcal{H}_i(X) = \{h_{i1}^X, h_{i2}^X, \dots, h_{il_i}^X\}$$

hvor  $h_{i1}^X > h_{i2}^X > \dots > h_{il_i}^X$  og kalder disse tal for "i-række-hooklængderne" af  $X$ .

Hvis  $\Pi(X) = \lambda = (l_1, \dots, l_k)$  skriver vi hook-længderne for  $X$  i et hook-diagram  $\text{Hook}(X)$ :

$$\begin{array}{cccccc} h_{11}^X & h_{12}^X & \dots & \dots & h_{1l_1}^X \\ h_{21}^X & h_{22}^X & \dots & h_{2l_2}^X & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ h_{k1}^X & \dots & h_{kl_k}^X & & \end{array}$$

**Eksempel 6.7.** Lad  $X = \{8, 6, 2, 1\}$ ,  $\Pi(X) = (5, 4, 1, 1)$

$$\mathcal{H}_1(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{8 - 6, 8 - 2, 8 - 1\} = \{8, 5, 4, 3, 1\}$$

$$\mathcal{H}_2(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{6 - 2, 6 - 1\} = \{6, 3, 2, 1\}$$

$$\mathcal{H}_3(X) = \{2\} \setminus \{2 - 1\} = \{2\}$$

$$\mathcal{H}_4(X) = \{1\}$$

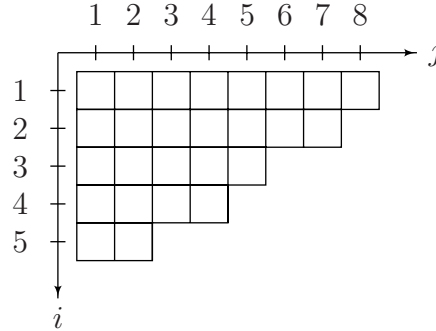
og  $\text{Hook}(X)$  er

$$\begin{array}{cccccc} 8 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & \\ 2 & & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

**Definition 6.8.** For en partition  $\lambda = (l_1, \dots, l_k)$  sættes

$$\mathcal{Y}(\lambda) = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l_i\}$$

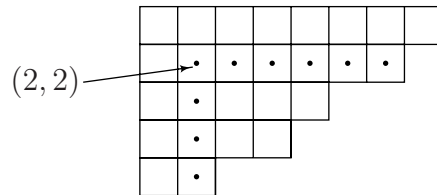
$\mathcal{Y}(\lambda)$  består af ”koordinaterne” til punkterne/kasserne i Ferrer’s diagrammet for  $\lambda$ :



**Definition 6.9.**  $((i, j)$ -hook'en  $\mathcal{H}_{ij}(\lambda)$ ) Lad  $\lambda$  være en partition. For  $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$  sættes

- (1)  $\mathcal{H}_{ij}(\lambda) = \{(i', j) \in \mathcal{Y}(\lambda) \mid i' \geq i\} \cup \{(i, j') \in \mathcal{Y}(\lambda) \mid j' > j\}$ . Den første af mængderne, der indgår i hook'en kaldes hook'ens arm, den anden er dens ben.
- (2)  $h_{ij}^\lambda = |\mathcal{H}_{ij}(\lambda)|$ .
- (3)  $h_{ij}^\lambda$  kaldes længden af hook'en  $\mathcal{H}_{ij}(\lambda)$ .

I det ovenstående diagram vil altså  $\mathcal{H}_{22}$  være de følgende markerede kasser. De markerede kasser i 2. række (pånær kassen  $(2,2)$ ) er *armen* og resten er *benet*.



Hvis  $\lambda^0 = (n_1, \dots, n_l)$  er den konjugerede partition til  $\lambda$ , ses umiddelbart, at der for hook-længderne gælder

$$h_{ij}^\lambda = (l_i - j) + (n_j - i) + 1$$

**Definition 6.10.** For en partition  $\lambda = (l_1, \dots, l_k)$  med konjugeret partition  $\lambda^0 = (n_1, \dots, n_l)$  sættes

$$\mathcal{H}_i(\lambda) = \{h_{i1}^\lambda, h_{i2}^\lambda, \dots, h_{il_i}^\lambda\}$$

hvor

$$h_{ij}^\lambda = (l_i - j) + (n_j - i) + 1.$$

$\mathcal{H}_i(\lambda)$  angiver således længden af alle hooks i den  $i$ 'te række.

Vi bemærker, at når  $X$  er en  $\beta$ -mængde for  $\lambda$ , så indeholder  $\text{Hook}(X)$  også tal  $h_{ij}^X$  for alle  $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ . Vi ønsker at vise, at  $h_{ij}^X = h_{ij}^\lambda$  for alle  $i, j \in \mathcal{Y}(\lambda)$ , dvs.  $\mathcal{H}_i(X) = \mathcal{H}_i(\lambda)$ .

**Definition 6.11.** (Arm- og benlængde) For en partition  $\lambda = (l_1, \dots, l_m)$  med konjureret partition  $\lambda^0 = (n_1, \dots, n_l)$  defineres armlængden  $a_{ij}^\lambda$  hhv. benlængden  $b_{ij}^\lambda$  af  $\mathcal{H}_{ij}(\lambda)$  som

$$\begin{aligned} a_{ij}^\lambda &= l_i - j \\ b_{ij}^\lambda &= n_j - i \end{aligned}$$

Der er altså tale om antallet af kasser i armen, hhv. benet og  $h_{ij}^\lambda = a_{ij}^\lambda + b_{ij}^\lambda + 1$ .

Vi får også brug for randen af et Ferrer's diagram:

**Definition 6.12.** For en partition  $\lambda$  defineres randen

$$\mathcal{R}(\lambda) = \{(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda) \mid (i+1, j+1) \notin \mathcal{Y}(\lambda)\}.$$

For  $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$  defineres en delmængde,  $(i, j)$ -randen, ved

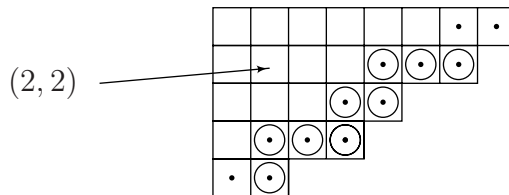
$$\mathcal{R}_{ij}(\lambda) = \{(i', j') \in \mathcal{R}(\lambda) \mid i' \geq i \text{ og } j' \geq j\}.$$

$\mathcal{R}_{ij}(\lambda)$  inddeles yderligere i to mindre mængder

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ij}(\lambda)_a &= \{(i', j') \in \mathcal{R}_{ij}(\lambda) \mid (i'+1, j') \notin \mathcal{R}(\lambda)\} \\ \mathcal{R}_{ij}(\lambda)_b &= \{(i', j') \in \mathcal{R}_{ij}(\lambda) \mid (i'+1, j') \in \mathcal{R}(\lambda)\} \end{aligned}$$

$\mathcal{R}(\lambda)$  består således af de kasser i Ferrer's diagrammet hvor vi ikke kan "gå" én gang ned og til højre uden af falde ud af diagrammet, og  $\mathcal{R}_{ij}(\lambda)$  udgøres af de af randkasserne, der ligger på eller under  $(i, j)$ 'te hooks arm og på eller til højre for dens ben.

**Eksempel 6.13.** I Ferrer's diagrammet for  $\lambda = (8, 7, 5, 4, 2)$  er randen markeret med en prik, mens de af dem der er i  $\mathcal{R}_{22}(\lambda)$  er i en cirkel:



$\mathcal{R}_{ij}(\lambda)_a$  består af de kasser, hvor vi ikke kan gå ét skridt ned uden at falde ud af diagrammet og  $\mathcal{R}_{ij}(\lambda)_b$  er dem, hvor vi bliver indenfor diagrammet.

**Eksempel 6.14.** Elementerne i  $\mathcal{R}_{11}(\lambda)$  indeles i  $a$ 'er og  $b$ 'er:

						$b$	$a$
				$b$	$a$	$a$	
			$b$	$a$			
	$b$	$a$	$a$				
$a$	$a$						

**Lemma 6.15.** For en partition  $\lambda = (l_1, \dots, l_k)$  med konjugeret partition  $\lambda^0 = (n_1, \dots, n_l)$  gælder

- (1)  $\mathcal{R}_{ij}(\lambda)_a = \{(l_{j'}, j') \mid j \leq j' \leq l_i\}$
- (2)  $\mathcal{R}_{ij}(\lambda)_b = \{(i', l_{i'+1}) \mid i \leq i' \leq n_j\}$
- (3)  $|\mathcal{R}_{ij}(\lambda)_a| = a_{ij}^\lambda, |\mathcal{R}_{ij}(\lambda)_b| = b_{ij}^\lambda$

*Bevis.* Se [LN] (1.1). □

Markeringerne med  $a$ 'er og  $b$ 'er ovenfor indgår i beviset for den følgende overraskende sætning:

**Sætning 6.16.** (Frame-Robinson-Thrall) Lad  $\lambda = (l_1, \dots, l_k)$  være en partition. For  $1 \leq i \leq k$  gælder

$$\{h_{ij'}^\lambda \mid j' = 1, 2, \dots, l_i\} \cup \{h_{i1}^\lambda - h_{i'1}^\lambda \mid i' > i\} = \{1, 2, \dots, h_{i1}^\lambda\}$$

*Bevis.* Se [LN] (1.2). □

Som vi allerede har set i Eksempel 6.7 er det klart, at Sætning 6.16 kernen i beviset for den næste sætning.

**Sætning 6.17.** Lad  $X$  være en  $\beta$ -mængde for partitionen  $\lambda$ . For alle  $\mathcal{Y}(\lambda)$  gælder

$$h_{ij}^X = h_{ij}^\lambda$$

*Bevis.* Se [LN] (1.4). □

Selve sætning 6.17 vil vise sig at være meget nyttig i flere sammenhænge. Vi giver her et par korollarer.

Lad

$$\mathcal{H}(\lambda) = \{h_{ij}^\lambda \mid (i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)\} = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{H}_i(\lambda)$$

være mængden af hook-længder i  $\lambda$ . Vi vil faktisk betragte  $\mathcal{H}(\lambda)$  som en såkaldt "multimængde", dvs. en mængde, hvor hvert element må gentages/har multiplicitet. Så hvis der findes  $x$  hook-længder i  $\lambda$  som er lig  $h$ , så skal  $h$  forekomme  $x$  gange i  $\mathcal{H}(\lambda)$ .

**Eksempel 6.18.**  $\lambda = (5, 3, 2^2, 1)$  har hook-diagrammet

9	7	4	2	1
6	4	1		
4	3			
3	1			
1				

således at

$$\mathcal{H}(\lambda) = \{9, 7, 6, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$$

**Korollar 6.19.** Antag at  $X = \{h_1, h_2, \dots, h_t\}$  er en  $\beta$ -mængde for  $\lambda$  og lad  $h \in \mathbb{N}$ . Der gælder:

$$h \in \mathcal{H}_i(\lambda) \Leftrightarrow (h_i - h \geq 0) \wedge (h_i - h \notin X)$$

*Bevis.* Se [LN] (1.5). □

**Korollar 6.20.** (Nakayama) Antag  $h \in \mathcal{H}(\lambda)$  for en partition  $\lambda$ . Hvis  $l \in \mathbb{N}$  og  $l|h$ , så er  $l \in \mathcal{H}(\lambda)$ .

*Bevis.* Se [LN] (1.6). □

**Eksempel 6.21.** I forrige eksempel var  $6 \in \mathcal{H}_2(\lambda)$ . Derfor må der ifølge korollaret eksistere hooks af længde 2 og 3 i  $\lambda$ .

Vi kan endda sige mere!

**Korollar 6.22.** Lad  $h = h_{ij}^\lambda$  for en partition  $\lambda$  og antag at  $h = ef$  for  $e, f \in \mathbb{N}$ . Da vil netop  $f$  af hook-længderne

$$\{h_{i',j'}^\lambda \mid (i', j') \in \mathcal{H}_{ij}(\lambda)\}$$

være delelige med  $e$ .

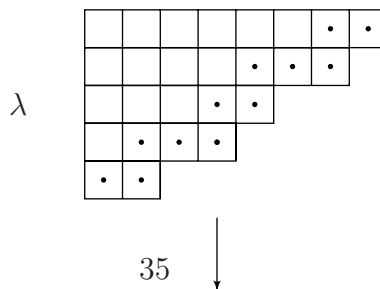
*Bevis.* Se [LN] (1.7). □

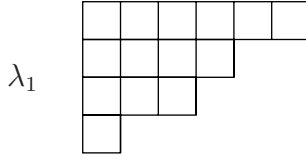
**Eksempel 6.23.** I forrige eksempel havde vi en hook af længde  $6 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ . Der er altså netop 3 af hook-længder i denne hook der er delelige med 2, og netop 2 der er delelig med 3.

Vi slutter dette afsnit med at beskrive fjernelsen af en hook fra en partition/Ferrer's diagram.

Lad os først betragte randen  $\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}_{11}(\lambda)$  af en partition  $\lambda$  af  $n$ ,  $\mathcal{R}(\lambda) \subseteq \mathcal{Y}(\lambda)$ . Vi påstår at  $\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{Y}(\lambda_1)$ , hvor  $\lambda_1$  er en partition af  $n - h_{11}^\lambda$ .

**Eksempel 6.24.** For  $\lambda = (8, 7, 5, 4, 2) \vdash 26$  er  $\lambda_1 = (6, 4, 3, 1) \vdash 26 - 12 = 14$





**Lemma 6.25.** *Antag at  $\lambda = (l_1, l_2, \dots, l_k)$  og at  $\lambda_1$  er givet ved*

$$\mathcal{Y}(\lambda) \setminus \mathcal{R}_{11}(\lambda) = \mathcal{Y}(\lambda_1)$$

Da er

$$\lambda_1 = (l_2 - 1, l_3 - 1, \dots, l_k - 1)$$

I lemma 6.25 kan  $\lambda_1$  derfor beskrives som den partition, hvis Ferrer's diagram opnås fra  $\lambda$ 's Ferrer's diagram ved at fjerne kasserne i  $\mathcal{H}_{11}(\lambda)$ . Det er nu let at se, at vi generelt kan gøre følgende:

Givet  $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ , så findes der en partition, som vi vil kalde  $\lambda \setminus \mathcal{H}_{ij}(\lambda)$ , der opfylder

$$\mathcal{Y}(\lambda \setminus \mathcal{H}_{ij}(\lambda)) = \mathcal{Y}(\lambda) \setminus \mathcal{R}_{ij}(\lambda)$$

$\lambda \setminus \mathcal{H}_{ij}(\lambda)$  opnås ved *enten* at fjerne alle kasserne i  $\mathcal{R}_{ij}(\lambda)$  fra  $\lambda$  *eller* ved at fjerne alle kasser i  $\mathcal{H}_{ij}(\lambda)$  og så "skubbe" diagrammet sammen.

Når  $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$  siges partitionen

$$\mu = \lambda \setminus \mathcal{H}_{ij}(\lambda)$$

at være opstået fra  $\lambda$  ved *fjernelse af  $(i, j)$ -hooken*

I forlængelse af Lemma 6.25 har vi

**Lemma 6.26.** *Antag at  $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$ . Skriv  $h_{ij}^\lambda = a + b$ , hvor  $a = a_{ij}^\lambda$  og  $b = b_{ij}^\lambda$  er arm- hhv. benlængderne.*

Da er

$$\begin{aligned} \lambda \setminus \mathcal{H}_{ij}(\lambda) = & (l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, \\ & l_{i+1} - 1, l_{i+2} - 1, \dots, l_{i+b} - 1, \\ & l_i - (a + 1), \\ & l_{i+b+1}, \dots, l_{i+b+2}, \dots, l_k) \end{aligned}$$

*Bevis.* Se [LN]'s bevis for (1.8). □

Denne formel er ikke nær så elegant som det tilsvarende resultat for  $\beta$ -mængderne. Vi betragter igen situationen fra korollar 6.19.

**Sætning 6.27.** Lad  $X = \{h_1, \dots, h_t\}$  være en  $\beta$ -mængde for  $\lambda$ . Antag at  $h \in \mathcal{H}_i(\lambda)$ . Så er  $h_i - h \geq 0$  og  $h_i - h \notin X$  (jf. korollar 6.19).

Sæt

$$Y = (X \setminus \{h_i\}) \cup \{h_i - h\}$$

(dvs. vi har erstatet  $h_i$  med  $h_i - h$  i  $X$ ).

Da er  $Y$  en  $\beta$ -mængde for  $\lambda \setminus \mathcal{H}_{ij}(\lambda)$  hvor  $h = h_{ij}^\lambda$ .

*Bevis.* Se [LN] (1.8). □

Det er denne sætning, der især illustrerer, hvorfor  $\beta$ -mængder for partitioner er nyttige. Den besværlige beskrivelse af fjernelse af en hook af længde  $h$  i en partition svarer i  $\beta$ -mængden bare til subtraktion af  $h$  fra et element. Hvad angår “bogholderi” for hooks, er  $\beta$ -mængderne et suverænt hjælpemiddel. Det skulle blive helt klart i Kapitel 9. (Se evt. også kapitel 3 i [LN]).

## 7 Lidt om Murnaghan-Nakayama formelen

I dette kapitel præsenteres uden beviser nogle kendsgerninger om repræsentationer og karakterer for især symmetriske grupper, der kan tjene som baggrundsmaetrialet for nogle af de følgende resultater. Vi lader  $K$  være et legeme af karakteristisk 0.

**Definition 7.1.** ( $K$ -Repræsentation/Dimension/Karakter/Irreducibel)

- (1) En  $K$ -repræsentation af dimension  $n \in \mathbb{N}$  af en endelig gruppe  $G$ , er en homomorfi

$$T : G \rightarrow GL(n, K)$$

fra  $G$  ind i gruppen af invertible  $n \times n$  matricer med koefficienter i et legeme  $K$ .

- (2) Karakteren  $\chi_T$  af en repræsentation  $T$  er afbildningen  $\chi_T : G \rightarrow K$  givet ved

$$\chi_T(g) = \text{Tr}(T(g))$$

hvor  $\text{Tr}$  betegner sporet af en matrix (summen af diagonal-elementerne).

**Definition 7.2.** (Irreducibel/Reducibel repræsentation)

- (1)  $T$  siges at være reducibel, hvis der eksisterer  $X \in GL(n, K)$  og tal  $k, l > 0$  så  $k + l = n$  samt en  $k \times k$  matrix  $A$  og  $l \times l$  matrix  $B$  så

$$\forall g \in G : XT(g)X^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

- (2)  $T$  siges at være irreducibel dersom den ikke er reducibel.

**Sætning 7.3.** Karakterene på en gruppe  $G$  er konstante på  $G$ 's konjugationsklasser.

**Definition 7.4.** (Ækvivalente repræsentationer) To repræsentationer  $T$  og  $T'$  siges at være ækvivalente dersom  $\chi_T = \chi_{T'}$ .

**Sætning 7.5.** (1) Ækvivalente repræsentationer har samme dimension.

- (2) Der findes kun endeligt mange ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer af  $G$ .

Det viser sig, at dersom  $K$  er "stor nok", fx.  $K = \mathbb{C}$ , så gælder

**Sætning 7.6.** Antallet af ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer af  $G$  er lig med antallet af konjugationsklasser i  $G$ .

For eksempel har altså den symmetriske gruppe  $S_n$  præcis  $p(n)$  ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer.

**Sætning 7.7.** Er  $T_1, \dots, T_p$  repræsentanter for alle ikke-ækvivalente irreducible repræsentationer af  $G$ , da gælder

1.  $\chi_{T_i}(1) \mid |G|$

$$2. \sum_{i=1}^p \chi_{T_i}(1)^2 = |G|$$

Så dimensionerne af irreducible repræsentationer er divisorer i  $G$ 's orden og summen af kvadraterne på de ikke-ækvivalente irreducible repræsentationers dimension er netop  $|G|$ .

Vi skal beskæftige os med tallene  $\chi_{T_i}(1)$  i tilfældet  $G = S_n$ . Her vil hook-formlen (Kapitel 8) og Robinson-Schensted korrespondencen (Kapitel 9) uddybe sætningen.

Ifølge kapitel 1 findes der en konjugationsklasse  $K_\lambda$  i  $S_n$  for hver partition  $\lambda$  af  $n$ . Det viser sig at det er muligt for hver  $\lambda \vdash n$  at definere en irreducibel  $\mathbb{Q}$ -repræsentation  $T_\lambda$  af  $S_n$  (på en naturlig måde), således at  $\{T_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$  alle er ikke-ækvivalente.

Vi sætter

$$[\lambda] = \chi_{T_\lambda}$$

til at være karakteren af  $T_\lambda$ . Hvis  $\mu \vdash n$ , er karakteren  $[\lambda]$  konstant på konjugationsklassen  $K_\mu$ . Så for alle  $x \in K_\mu$  er  $[\lambda](x)$  ens. Vi betegner dette element i  $\mathbb{Q}$  med  $[\lambda](\mu)$ . Et simpelt argument (legems-teoretisk) viser at

$$\forall \lambda, \mu \vdash n : [\lambda](\mu) \in \mathbb{Z}$$

Murnaghan-Nakayama-formlen kan ses om en rekursionsformel for tallene  $[\lambda](\mu)$ .

**Definition 7.8.** Hvis  $\lambda \vdash n$  og  $l \in \mathbb{N}$  sættes

$$\mathcal{Y}(\lambda)_l = \{(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda) \mid h_{ij}^\lambda = l\}$$

**Sætning 7.9.** (Murnaghan-Nakayama formlen) Lad  $\lambda, \mu \vdash n$  med  $\mu = (l_1, l_2, \dots, l_k)$ . For alle  $m, 1 \leq m \leq k$  gælder

$$[\lambda](\mu) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{Y}(\lambda)_{l_m}} (-1)^{b_{ij}^\lambda} [\lambda \setminus \mathcal{H}_{ij}(\lambda)](\mu_m)$$

hvor  $\mu_m = (l_1, l_2, \dots, l_{m-1}, l_{m+1}, \dots, l_k)$ . Begyndelsesbetingelsen er, at hvis vi er nået ned til den "tomme" partition, så er værdien lig 1.

Denne formel har flere interessante aspekter og konsekvenser. Der er bemærkelsesværdigt, at det er lige meget hvilken del  $l_m$  man vælger i partitionen  $\mu$ . Karakterværdien kan beregnes på den samme måde.

**Eksempel 7.10.**  $[4, 1^4](8) = 1$ . Partitionen har kun en hook af længde 8 og benlængde 4. Når den fjernes, fås den tomme partition.

Lad os også beregne  $[4, 1^4]$  på konjugationsklassen  $(4, 3, 1)$ . Da  $(4, 1^4)$  kun har én hook af længde 4 og benlængde  $b = 3$  giver MN-formlen, at  $[4, 1^4](4, 3, 1) = -[4](3, 1)$ . Partitionen  $(4)$  har kun én hook af længde 3 og benlængde 1. Så  $[4](3, 1) = [1](1) = 1$ . Vi får i alt  $[4, 1^4](4, 3, 1) = -1$ .

**Korollar 7.11.** Lad  $\lambda, \mu \vdash n$  med  $\mu = (l_1, \dots, l_k)$ . Da gælder: Hvis  $\lambda$  ikke har hooks af alle længder  $l_1, \dots, l_k$ , så er  $[\lambda](\mu) = 0$ .

**Eksempel 7.12.**  $[4, 3, 1](5, 3) = 0$ , fordi  $(4, 3, 1)$  ikke har en hook af længde 5.

Det er klart at MN-formlen får flere led, når der er mange hooks af en given længde  $l_m$ , hvor  $l_m$  er en del i  $\mu$ . I princippet er det mest ubehagelige tilfælde derfor beregningen af  $[\lambda](1^n)$ , hvor  $\mu = (1^n)$ . Så er  $K_\mu$  klassen der består af det neutrale element i  $S_n$  og  $[\lambda](1^n)$  (som vi senere vil kalde  $f_\lambda$ ) er netop dimensionen af repræsentationen  $T_\lambda$ .

**Definition 7.13.**  $\lambda^-$  For  $\lambda \vdash n$  sættes

$$\lambda^- = \{\rho \vdash (n-1) \mid \exists(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)_1 : \rho = \lambda \setminus \mathcal{H}_{ij}(\lambda)\}$$

**Eksempel 7.14.** For  $\lambda = (5, 3^2, 1)$  er  $\lambda^- = \{(4, 3^2, 1), (5, 3, 2, 1), (5, 3^2)\}$ .

Et specielt tilfælde af Sætning 7.9 er så det følgende, som kaldes *forgreningsreglen/the branching rule*:

**Korollar 7.15.** (Forgreningsreglen) Lad  $\lambda, \mu \vdash n$  med  $\mu = (l_1, l_2, \dots, l_k)$ . Antag at  $l_k = 1$  og lad  $\mu' = (l_1, l_2, \dots, l_{k-1}) \vdash n-1$ . Der gælder

$$[\lambda](\mu) = \sum_{\lambda' \in \lambda^-} [\lambda'](\mu').$$

Gentagen anvendelse af Korollar 7.15 viser:

**Sætning 7.16.**  $[\lambda](1^n)$  er lig antallet af sekvenser

$$\lambda_n = \lambda, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1 = (1)$$

af partitioner hvor  $\lambda_i \vdash i$  og  $\lambda_i \in \lambda_{i+1}^-$  for  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Sætning 7.9 giver også forbindelse til *standard-tableau'er* for  $\lambda$ . Til en sekvens af partitioner

$$\lambda_n = \lambda, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1 = (1), \lambda_0 = 0$$

som i sætning 7.16 tilordnes et diagram hvor man erstatter hvert punkt i Ferrer's diagrammet for  $\lambda$  med ét af tallene  $1, 2, \dots, n$ .

Hvis  $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$  eksisterer der et  $m, 1 \leq m \leq n$  således at

$$(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda_m) \text{ men } (i, j) \notin \mathcal{Y}(\lambda_{m-1})$$

I den tilsvarende kasse  $(i, j)$  i Ferrer's diagrammet skrives  $m$ .

**Eksempel 7.17.** For  $\lambda = (3, 2)$  kan vi vælge

$$\lambda_5 = (3, 2), \lambda_4 = (3, 1), \lambda_3 = (2, 1), \lambda_2 = (2), \lambda_1 = 1$$

som giver diagrammet

1	2	4
3	5	

Dette er et eksempel på et standard-tableau, som behandles i næste afsnit.

## 8 Om Standard-tableau'er. Hook-formlen

**Definition 8.1.** (Tableau) *Lad  $\lambda$  være en partition af  $n$ . Et tableau for  $\lambda$  (også kaldet et  $\lambda$ -tableau) er en nummerering  $1, 2, \dots, n$  af kasserne i Young-diagrammet for  $\lambda$ .*

**Eksempel 8.2.** *Hvis  $\lambda = (3, 2)$ , så er*

5	1	3
4	2	

*et tableau for  $\lambda$ .*

**Definition 8.3.** (Standard-tableau) *Et  $\lambda$ -tableau kaldes standard hvis tallene i boksene vokser i alle rækker og i alle søjler.*

**Eksempel 8.4.** *For  $\lambda = (3, 2)$  er ovenstående tableau ikke et standard-tableau, bl.a. fordi 5 og 1 står forkert i første række og 5 og 4 står forkert i første søjle.*

*Her er samtlige standard-tableau'er for  $\lambda$ :*

1	3	5	1	2	5	1	2	4	1	2	3	1	3	4
2	4		3	4		3	5		4	5		2	5	

*Ialt 5 stk. Antallet 5 forklares i Sætning 8.7.*

**Definition 8.5.** *For en partition  $\lambda$  betegner  $ST(\lambda)$  mængden af standard-tableau'er og  $f_\lambda = |ST(\lambda)|$  antallet af dem.*

**Eksempel 8.6.**

$$f_{(3,2)} = 5, \quad f_{(3,1)} = 3, \quad f_{(2,2)} = 2$$

Ifølge Korollar 7.15 og bemærkningerne efter det er  $f_\lambda$  også dimensionen af den irreducible repræsentation af  $S_n$ , der er knyttet til partitionen  $\lambda$ . Vi har så følgende bemærkelsesværdige sætning:

**Sætning 8.7.** (Hook-formlen) *Lad  $\lambda$  være en partition af  $n$ . Da gælder*

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} h}$$

**Eksempel 8.8.** *Lad os før beviset checke hook-formlen for  $\lambda = (3, 2)$ . Her  $\lambda$  med hook-længder,*

4	3	1
2	1	

*så  $\prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} h = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$  og  $f_\lambda = 5!/24 = 5$ , i overensstemmelse med antallet i Eksempel 8.4.*

*Bevis.* Lad  $\lambda \vdash n$ ,  $\lambda = (a_1, \dots, a_r)$  og lad  $h_{ij} = h_{ij}(\lambda)$  betegne hook-længderne i  $\lambda$ . Ifølge Frame-Robinson-Thrall-sætningen 6.16 har vi, at der for alle  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$  gælder

$$\prod_{k=1}^{a_i} h_{ik} = h_{i1} h_{i2} \cdots h_{ia_i} = \frac{h_{i1}!}{\prod_{i' > i} (h_{i1} - h_{i'1})}. \quad (3)$$

Det betyder, at man alene ud fra tallene  $x_i := h_{i1}$ , de såkaldte *fch's*, *first column hook-lengths* i  $\lambda$  kan beregne  $\prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} h$ . Vi har jo

$$\prod_{h \in \mathcal{H}(\lambda)} h = \prod_{i=1}^r \frac{x_i!}{\prod_{i' > i} (x_i - x_{i'})} \quad (4)$$

Sammenhængen mellem  $a_i$  og  $x_i$  er

$$x_i = a_i + (r - i), \quad i = 1, \dots, r. \quad (5)$$

Vi vil nu definere en funktion  $f : (\mathbb{N}_0)^r \rightarrow \mathbb{Q}$  ved

$$f(a_1, a_2, \dots, a_r) = n! \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_i - x_j)}{\prod_{1 \leq i \leq r} x_i!}, \quad (6)$$

hvor  $x_i$  er givet ved (5) og  $n = \sum_{i=1}^r a_i$ . Specielt ses, at hvis  $\lambda = (a_1, \dots, a_r)$ , så er  $f_\lambda = f(a_1, \dots, a_r)$ . Fra definitionen kan man let regne ud, hvad der sker med  $f$ , når man erstatter et  $a_k$  med  $a_k - 1$ :

$$\begin{aligned} & f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_r) \quad (7) \\ &= (n - 1)! \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq r, k \neq i, j} (x_i - x_j) \prod_{j > k} (x_k - 1 - x_j) \prod_{i < k} (x_i - x_k + 1)}{(\prod_{1 \leq i \leq r, i \neq k} x_i!) (x_k - 1)!} \\ &= \frac{x_k}{n} f(a_1, \dots, a_r) \prod_{\{j | j \neq k\}} \frac{x_k - 1 - x_j}{x_k - x_j} \end{aligned}$$

Lad os bemærke, at hvis  $a_k = a_{k+1}$  så indgår faktoren  $x_k - 1 - x_{k+1} = 0$  i det ovenstående produkt, således at  $f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_r) = 0$ . Vi har derfor at

$$\sum_{k=1}^r f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_r) = \sum_{\{k | a_k \neq a_{k+1}\}} f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_r) \quad (8)$$

Sætningen bevises ved induktion efter  $n$  under anvendelse af forgreningsreglen for antallet af standardtableauer og vil blive reduceret til et "analytisk" resultat, Sætning 8.9.

For  $n = 1, 2$  er det let at checke resultatet direkte. Antag, at vi har vist sætningen for partitioner af alle  $k \leq n - 1$ .

Lad  $\lambda = (a_1, \dots, a_r) \vdash n$ . For  $1 \leq k \leq m$  sættes  $\lambda_k = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_r)$ , hvis  $a_k \neq a_{k+1}$ . Idet  $f_\lambda$  er antallet af  $\lambda$ -standard tableauer ses nu let, at

$$f_\lambda = \sum_{\{k | a_k \neq a_{k+1}\}} f_{\lambda_k}. \quad (9)$$

Man skal bare i et  $\lambda$ -standardtableau bemærke, i hvilken boks der står  $n$ . Hvis denne boks er i den  $k$ -te række så er  $a_k \neq a_{k+1}$  og hvis boksen fjernes, får man et standard

tableau for  $\lambda_k$ . Hvis vi nu anvender induktionsantagelsen på alle  $\lambda_k$ 'er og bruger formlerne (7) og (8) fås

$$f_\lambda = \sum_{k=1}^r f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots, a_r)$$

Hvis vi nu anvender (5) fås at

$$f_\lambda = \frac{1}{n} f(a_1, \dots, a_r) \sum_{k=1}^r x_k \prod_{\{j|j \neq k\}} \frac{x_k - x_j - 1}{x_k - x_j}.$$

Derfor er beviset for sætningen reduceret til at vise følgende ligning:

$$n = \sum_{k=1}^r x_k \prod_{\{j|j \neq k\}} \frac{x_k - x_j - 1}{x_k - x_j}. \quad (10)$$

Lad os betragte et polynomium

$$g(x) = \prod_{j=1}^r (x - x_j)$$

med  $x_j$ erne som rødder. Idet

$$g(x_k - 1) = - \prod_{\{j|j \neq k\}} (x_k - x_j - 1)$$

og

$$g'(x_k) = \prod_{\{j|j \neq k\}} (x_k - x_j)$$

får vi, at

$$\sum_{k=1}^r x_k \prod_{\{j|j \neq k\}} \frac{x_k - x_j - 1}{x_k - x_j} = \sum_{k=1}^r \frac{(-x_k)g(x_k - 1)}{g'(x_k)}.$$

Så (10) er ensbetydende med

$$n = \sum_{k=1}^r \frac{(-x_k)g(x_k - 1)}{g'(x_k)}. \quad (11)$$

Da  $\lambda \vdash n$  fås fra (5) at

$$n = \sum_{k=1}^r x_k - \binom{r}{2}.$$

Derfor er vores sætning nu reduceret til det følgende “analytiske” resultat, som vi giver et separat bevis for.  $\square$

**Sætning 8.9.** Lad  $x_1, \dots, x_r \in L \setminus \{0\}$  være forskellige elementer i et (vilkaarligt) legeme  $L$ . Definer et polynomium  $g(x)$  ved

$$g(x) = \prod_{i=1}^r (x - x_i) \in L[x]$$

Da gælder

$$\sum_{i=1}^r (-x_i) \frac{g(x_i - 1)}{g'(x_i)} = \sum_{i=1}^r x_i - \binom{r}{2}$$

*Bevis.* Vi sætter  $\alpha = \sum_{i=1}^r x_i$ ,  $\beta = \sum_{1 \leq i < j \leq r} x_i x_j$ , så  $\alpha, \beta \in L$ . Fra definitionen fås

$$g(x) = x^r - \alpha x^{r-1} + \beta x^{r-2} + (\text{led af grad } \leq r-3). \quad (12)$$

Endvidere er  $g(x-1) = \prod_{i=1}^r (x - (x_i + 1))$ , så en let udregning viser, at

$$g(x-1) = x^r - (\alpha + r)x^{r-1} + (\beta + (r-1)\alpha + \binom{r}{2})x^{r-2} + (\text{led af grad } \leq r-3). \quad (13)$$

Vi dividerer polynomiet  $x^2 g(x-1)$  med polynomiet  $g(x)$

$$x^2 g(x-1) = a(x)g(x) + b(x), \quad (14)$$

hvor  $a(x)$  har grad 2 og restleddet  $b(x)$  grad  $\leq r-1$ . Skriv  $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$  med passende koefficienter  $a_0, a_1, a_2 \in L$ . Fra (12) fås

$$a(x)g(x) = a_2 x^{r+2} + (a_1 - \alpha a_2)x^{r+1} + (a_0 - \alpha a_1 + \beta a_2)x^r + (\text{led af grad } \leq r-1) \quad (15)$$

og fra (13) fås

$$x^2 g(x-1) = x^{r+2} - (\alpha + m)x^{r+1} + (\beta + (r-1)\alpha + \binom{r}{2})x^{r-2} + (\text{led af grad } \leq r-1). \quad (16)$$

Da differencen mellem venstresiderne i (16) og (15) er  $b(x)$ , ifølge (14), og da  $b(x)$  har grad  $\leq r-1$  må koefficienterne til  $x^{r+2}, x^{r+1}$  og  $x^r$  være ens i (16) og (15). Det giver os 3 ligninger med 3 "ubekendte"  $a_0, a_1, a_2$ . Ved at løse dem fås

$$a_2 = 1, a_1 = -r, a_0 = -\alpha + \binom{r}{2} = a(0) \quad (17)$$

Ved at sætte  $x = 0$  i (14) fås  $0 = a(0)g(0) + b(0)$  eller

$$-a_0 = \frac{b(0)}{g(0)}. \quad (18)$$

Lad os definere  $y_i = b(x_i)$ . Da  $g(x_i) = 0$  for  $1 \leq i \leq r$  fås ifølge (14)

$$y_i = b(x_i) = x_i^2 g(x_i - 1).$$

Vi kender nu  $r$  værdier for polynomiet  $b(x)$ , som har grad  $\leq r-1$ . Lagrange's interpolationsformel giver derfor, at

$$b(x) = \sum_{i=1}^r y_i \prod_{\{j|j \neq i\}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (19)$$

idet polynomiet på højre side har samme værdier for  $x_1, \dots, x_r$  som  $b(x)$ , nemlig  $y_1, \dots, y_r$ . Nu er

$$g'(x_i) = \prod_{\{j|j \neq i\}} (x_i - x_j) \quad (20)$$

og ved indsættelse af  $x = 0$  i (19) fås så, at

$$b(0) = (-1)^{r-1} \sum_{i=1}^r \frac{x_i^2 g(x_i - 1)}{g'(x_i)} \prod_{\{j|j \neq i\}} x_j. \quad (21)$$

Da  $g(0) = (-1)^r \prod_{i=1}^r x_i$  får vi

$$\frac{b(0)}{g(0)} = - \sum_{i=1}^r \frac{x_i g(x_i - 1)}{g'(x_i)}.$$

Hvis man sammenholder dette med (17) og (18), så er sætningen bevist. □

## 9 Kerner og kvotienter for partitioner

Vi beskriver her en bemærkelsesværdig variation af ”division med rest” for partitioner.

Når  $\lambda \vdash n$  og  $e \in \mathbb{N}$  beskriver vi en  $e$ -kerne  $\lambda_{(e)}$  af  $\lambda$ , som kan ses som ”rest efter division med  $e$ ”, og vi beskriver en  $e$ -kvotient  $\lambda^{(e)}$  af  $\lambda$ , som reflekterer det antal gange ” $e$  går op i  $\lambda$ ”. Der vil gælde

$$|\lambda| = e|\lambda^{(e)}| + |\lambda_{(e)}|$$

hvor vi for en partition  $\lambda \vdash n$  definerer  $|\lambda| = n$ , og for et  $e$ -tupel  $P = (\lambda_1 \vdash w_1, \dots, \lambda_e \vdash w_e)$ , af partitioner, som  $\lambda^{(e)}$  er, sættes  $|P| = w_1 + \dots + w_e$ .

Teorien blev udviklet for at tillade en systematisk udnyttelse af Murnaghan-Nakayama formelen, og er et helt essentielt hjælpemiddel i den modulære repræsentationsteori (dvs. over legemer af karakteristisk  $\neq 0$ ) for  $S_n$ . Den har også vakt en del opmærksomhed blandt talteoretikere og kombinatorikere. Især har  $e$ -kernerne været genstanden for adskillige forskningsartikler.

Indholdet af dette kapitel er en ændret version af Kapitel 3 i mine Lecture Notes. Hvad angår beviser, refererer vi derfor til denne kilde som [LN].

### 9.1 $e$ -kernen

Det er relativt let at beskrive  $e$ -kernen for en partition  $\lambda$ :

For et  $e \in \mathbb{N}$  opstår  $e$ -kernen ved at man succesivt fjerner  $e$ -hooks fra  $\lambda$ , indtil der ikke er flere tilbage. Denne algoritme er a priori ikke nødvendigvis entydig, idet en given partition kan have adskillige  $e$ -hooks, og at der derfor vil være mange forskellige måder at fjerne dem succesivt. Men vi skal se at slutresultatet, når vi succesivt fjerner *alle*  $e$ -hooks, altid er det samme! Dette er så  $e$ -kernen  $\lambda_{(e)}$ .

Vi minder om at

$$\mathcal{Y}(\lambda)_e = \{(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda) \mid h_{ij}^\lambda = e\}$$

**Definition 9.1.** ( $e$ -kernen) Lad  $\lambda \vdash n$  og  $e \in \mathbb{N}$ . Vi inddeler i to tilfælde:

$\mathcal{Y}(\lambda)_e = \emptyset$ : Da defineres  $\lambda_{(e)} = \lambda$ .

$\mathcal{Y}(\lambda)_e \neq \emptyset$ : Betrag en følge af partitioner  $\lambda_0 = \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_w$  som opfylder

$$\lambda_s = \lambda_{s-1} \setminus \mathcal{H}_{ij}^{\lambda_{s-1}}, \quad (i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda_{s-1})_e$$

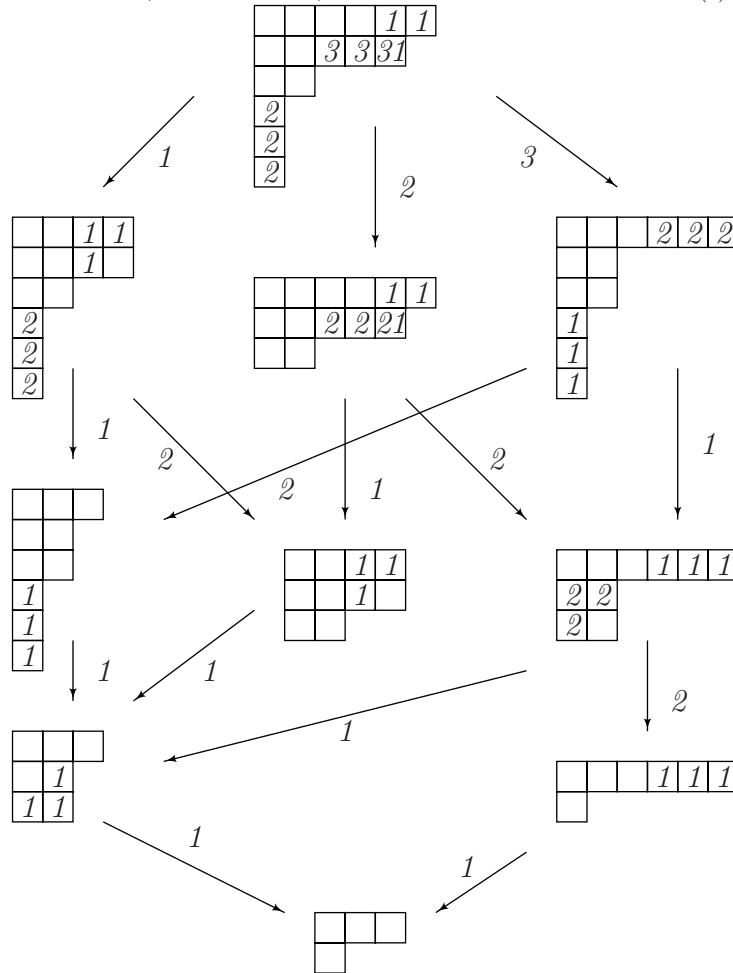
for  $s = 1, \dots, w$ , som har maksimal længde  $w$ , forstået på den måde, at følgende sidste element  $\lambda_w$  er kendetegnet ved ikke at have nogen  $e$ -hook. Vi definerer så

$$\lambda_{(e)} = \lambda_w.$$

Det er altså ikke umiddelbart klart, at  $e$ -kernen er veldefineret, hvis  $\mathcal{Y}(\lambda)_e \neq \emptyset$ , jfr. bemærkningen ovenfor. Vi vil give et bevis, for at  $e$ -kernen er entydig ved hjælp af et ”abacus”-argument.

Her er først et eksempel.

**Eksempel 9.2.** Lad  $\lambda = (6, 5, 2, 1, 1, 1) \vdash 16$ . Vi finder 3-kernen  $\lambda_{(3)}$ :



Altså er  $\lambda_{(3)} = (3, 1) \vdash 4$

For at bevise entydigheden af  $e$ -kernen skal vi bruge følgende definition:

**Definition 9.3.** Lad  $X$  være en  $\beta$ -mængde,  $e \in \mathbb{N}$ .

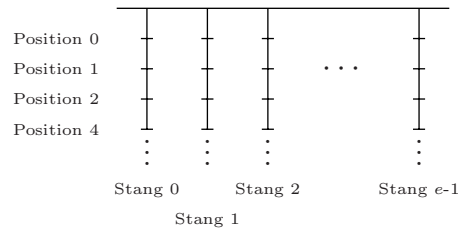
For  $0 \leq i \leq e - 1$  lad

$$x_{(e)}^i = |\{l \in X \mid l \equiv_e i\}|$$

og sæt

$$X_{(e)} = \bigcup_{i=0}^{e-1} \{ae + i \mid 0 \leq a < x_{(e)}^i, a \in \mathbb{N}\}$$

Vi kan visualisere  $X$  på en  $e$ -abacus med  $e$  stænger (*runners*), der er nummereret  $0, 1, \dots, e - 1$ . Hver stang er udstyret med "positioner" der, oppefra og nedefter, er nummereret med de ikke-negative hele tal  $\mathbb{N}_0$ :



Vi markerer  $\beta$ -mængden  $X$  på denne  $e$ -abacus ved at repræsentere et element  $l \in X$  ved en kugle på den  $a$ 'te plads på den  $i$ 'te stang, når  $l = ae + i$ .

Den  $i$ 'te stang vil da indeholde netop  $x_{(e)}^i$  kugler.

Hvis nu  $X$  er en  $\beta$ -mængde for  $\lambda$  (dvs.  $\Pi(X) = \lambda$ ) og hvis  $\mu$  opnås fra  $\lambda$  ved at fjerne en  $e$ -hook, vil der ifølge 6.19 eksistere  $l \in X$  således at

$$l - e \geq 0, l - e \notin X$$

og således at

$$Y = (X \setminus \{l\}) \cup \{l - e\}$$

er en  $\beta$ -mængde for  $\mu$ . Den eneste forskel på  $e$ -abacuserne for  $X$  og  $Y$  er, at  $i$   $Y$ 's abacus er en kugle placeret én position højere på den samme stang, end den er på abacussen for  $X$ . Vi ser altså, at hvis  $\Pi(X) = \lambda$ , så gælder:

$\lambda$  har en  $e$ -hook  $\Leftrightarrow$  En kugle på  $e$ -abacussen har en tom plads over sig.

Fjernelse af  $e$ -hooks

$$\lambda_0 \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \dots$$

som beskrevet i definitionen af  $e$ -kerner, svarer til successivt at flytte kugler en position op på samme stang i de  $e$ -abacuser, der hører til  $\beta$ -mængderne (når disse alle har samme antal elementer). Processen med at fjerne  $e$ -hooks stopper, når *alle kugler i abacussen er i deres højest mulige position*. Vi vil så have en abacus, hvor den  $i$ -te stang stadig har det samme antal kugler, nemlig  $x_{(e)}^i$ . De er nu i de øverste positioner. Resultatet afhænger altså kun af tallene  $x_{(e)}^i$  og ikke af, hvordan der er fjernet  $e$ -hooks! Den tilsvarende  $\beta$ -mængde er  $X_{(e)}$ .

Dette viser:

**Sætning 9.4.** Lad  $\Pi(X) = \lambda, e \in \mathbb{N}$ . Så er

$$\Pi(X_{(e)}) = \lambda_{(e)}$$

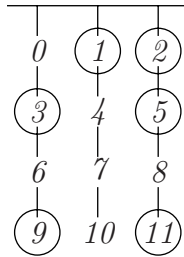
den mindste partition, der kan opnås fra  $\lambda$  ved at fjerne en serie af  $e$ -hooks.

Så  $\lambda_{(e)}$  i denne sætning er netop  $e$ -kernen af  $\lambda$ . Specielt har vi et korollar:

**Korollar 9.5.** Hvis  $\mu$  er opnået fra  $\lambda$  ved fjernelse af nogle  $e$ -hooks, da er

$$\mu_{(e)} = \lambda_{(e)}.$$

**Eksempel 9.6.** Lad igen  $\lambda = (6, 5, 2, 1, 1, 1)$ , og lad  $e = 3$ . Som  $\beta$ -mængde kan vælges  $X = \{11, 9, 5, 3, 2, 1\}$  (hooklængderne i første søjle af for  $\lambda$ ). 3-abacussen for  $X$  er da



hvor vi har slået en cirkel om de positioner der er en kugle på. Er der ingen cirkel, så er positionen tom. Kuglerne med 3, 9 og 11 har tomme pladser lige over sig. De repræsenterer hver en mulighed for at fjerne en 3-hook i  $\lambda$ .

At flytte kuglen med 3 op, svarer til trækkes "2" i eksempel 9.2.

At flytte kuglen med 9 op, svarer til trækkes "3" i eksempel 9.2.

At flytte kuglen med 11 op, svarer til trækkes "1" i eksempel 9.2.

Vi har altså

$$x_{(3)}^0 = 2, x_{(3)}^1 = 1, x_{(3)}^2 = 3$$

så

$$X_{(3)} = \{0, 3\} \cup \{1\} \cup \{2, 5, 8\}$$

Heraf fås  $\lambda_{(e)} = \Pi(X_{(3)}) = (3, 1)$ .

### 9.1.1 Eksistensen af $e$ -kerner

Før vi går videre, omtales et interessant problem vedrørende kerner af partitioner.

**Definition 9.7.**  $e$ -kerne for  $n$  En  $e$ -kerne for  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , er en partition af  $n$  med  $\lambda = \lambda_{(e)}$ .

Så  $e$ -kernene for  $n$  er netop de partitioner af  $n$ , der ikke har hooks af længde  $e$ . Man kan så spørge:

Givet  $e \in \mathbb{N}$ . For hvilke  $n$  findes der en  $e$ -kerne for  $n$ ?

Tilfældene, hvor  $n$  er lille, kan let klares.

Den eneste 1-kerne er den tomme partition 0.

De eneste 2-kerner er partitionerne på formen

$$(k, k - 1, k - 2, \dots, 1), k \geq 0.$$

Det ses som følger. Den sidste del  $a_k$  af en 2-kerne  $\lambda$  må være 1, da der ellers ville være en 2-hook i sidste række. Hvis  $k > 1$  betragtes differensen  $d = a_{k-1} - a_k$ . Vi kan ikke have  $d = 0$ , for så ville der være en lodret 2-hook i rækkerne  $k - 1, k$ . Vi kan heller ikke have  $d > 1$ , for så ville der være en vandret 2-hook i række  $k - 1$ . Så  $d = 1$ . Hvis  $k > 2$  kan argumentet gentages og vi får  $a_{k-2} - a_{k-1} = 1$ . Således fortsættes.

Det er heller ikke svært at beskrive 3-kernerne. Ved at checke direkte kan man se, at der fx. ikke findes en 3-kerne af 7.

Men der gælder:

Når  $e \geq 4$ , så findes der en  $e$ -kerne for alle  $n$ .

Dette blev bevist af talteoretikerne A. Granville og K. Ono i 1996:

*Defect zero  $p$ -blocks for finite simple groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 1, 331–347.

Titlen antyder, at et spørgsmål i den modulære repræsentationsteori for endelige grupper (eksistensen af ”defekt 0-blokke” for simple grupper) har været en del af motivationen for arbejdet. Hvis  $p$  er et primtal, så er  $p$ -defekt 0-blokke in en gruppe netop de irreducible karakterer, hvis grad er delelig med ordenen af en  $p$ -Sylogruppe. De kan også karakteriseres som de irreducible karakterer, der antager værdien 0 på alle elementer, hvis orden er delelig med  $p$ . Hook-formlen (Sætning 8.7) viser, at det netop er  $p$ -kerner, der beskriver  $p$ -defekt 0-blokke i  $S_n$ . Murnaghan-Nakayama formelen viser så også, at sådanne karakterer antager værdien 0 på alle elementer i  $S_n$ , hvis orden er delelig med  $p$ . (Overvej dette! Her kan også korollar 6.20 være nyttig.)

## 9.2 $e$ -kvotienten

Det næste, vi skal betragte, er  $e$ -kvotienten af en partition. Som forberedelse ser vi på tilfældet  $e = 1$ . Det er klart at  $\lambda_{(1)} = 0$  for alle  $\lambda$ . Hvis  $X$  er en  $\beta$ -mængde, så er  $X_{(1)} = \{0, 1, \dots, |X| - 1\}$ . 1-abacussen for  $X$  er på formen



hvor der er en cirkel om position  $i$ , hvis  $i \in X$ .

**Bemærkning 9.8.** *Enhver stang med kugler repræsenterer 1-abacussen for en  $\beta$ -mængde, og dermed også en partition, hørende til denne  $\beta$ -mængde!*

I denne situation, hvis  $X$  er en  $\beta$ -mængde og  $\lambda$  den tilhørende partition, kan det være nyttigt at repræsentere 1-abacussen som en sekvens af 0'er og 1'er, hvor de tomme positioner repræsenteres af et 1-tal og de fyldte med 0'er. En sådan sekvens vil naturligvis ende med uendeligt mange 1'ere (tomme positioner).

**Eksempel 9.9.** *Sekvensen*

100110100011 ... 1 ...

er 1-abacussen for  $\beta$ -mængden

$$X = \{9, 8, 7, 5, 2, 1\}$$

med

$$\Pi(X) = (4^3, 3, 1^2)$$

Ethvert 0 med ettaller til venstre for sig, repræsenterer en del,  $l_i$ , af  $\lambda$ . Her er  $l_i$  er netop antallet af ettaller til venstre for dette 0.

I eksemplet ovenfor repræsenterer det fjerde nul (på position 7) delen "4" i  $\lambda$ , idet der er fire ettaller til venstre for det. Fjernelse af en hook i  $\lambda$ , visualiseres i 0,1-sekvensen ved at bytte et 0 og et 1 om, hvor ettallet er til venstre for nullet før ombytningen. (Jfr. Section 2 i Lecture Notes.) Længden af denne hook er i øvrigt differensen mellem positionerne for nullet og ettallet. Benlængden er antallet af nuller mellem nullet og ettallet.

Hermed er vi færdige med tilfældet  $e = 1$ .

For generelt  $e \in \mathbb{N}$  kan vi betragte de  $e$  stænger i  $e$ -abacussen for en  $\beta$ -mængde  $X$ . Hver af disse stænger er en 1-abacus for en vis  $\beta$ -mængde. Vi får  $e$   $\beta$ -mængder  $Y_0, \dots, Y_{e-1}$ . Disse  $\beta$ -mængder giver så, ifølge det overstående,  $e$  partitioner, som (passende ordnet) bliver  $e$ -kvotienten for  $\Pi(X)$ .

**Definition 9.10.** Hvis  $X$  er en  $\beta$ -mængde sættes for  $e \in \mathbb{N}$  og  $0 \leq i \leq e - 1$

$$X_i^{(e)} = \{a \in \mathbb{N}_0 \mid ae + i \in X\}$$

Herved er  $X_0^{(e)}, \dots, X_{e-1}^{(e)}$  netop  $\beta$ -mængderne  $Y_0, \dots, Y_{e-1}$  nævnt ovenfor, hørende til de enkelte stænger i  $e$ -abacussen for  $X$ .

Vi vil gerne have, at det  $e$ -tupel af partitioner, som skal være  $e$ -kvotienten for en partition  $\lambda$ , skal være uafhængig af hvilken  $\beta$ -mængde der vælges.

**Bemærkning 9.11.** Hvis

$$Y = X^+ = \{a + 1 \mid a \in X\} \cup \{0\}$$

så indser man let at der gælder

- $X_i^{(e)} = Y_{i+1}^{(e)}$  for  $0 \leq i \leq e - 2$ .
- $(X_{e-1}^{(e)})^+ = Y_0^{(e)}$

Så partitionssættet  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1})$  for  $X$ , svarende til  $X_0^{(e)}, \dots, X_{e-1}^{(e)}$ , bliver en cyklisk permutation af det tilsvarende sæt for  $Y$ :  $(\lambda_{e-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{e-2})$ .

For at undgå dette problem betragtes ved definitionen af  $e$ -kvotienten kun  $\beta$ -mængder  $X$  for  $\lambda$ , hvor  $e \mid |X|$ :

**Definition 9.12.** ( $e$ -kvotienten) Lad  $X$  være en  $\beta$ -mængde for  $\lambda$  med  $e \mid |X|$ . Da sættes

$$\lambda^{(e)} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1})$$

hvor

$$\lambda_i = \Pi(X_i^{(e)})$$

Så vil  $e$ -kvotienten være veldefineret ifølge bemærkning 9.11.

**Eksempel 9.13.** Lad  $e = 5$  og  $\lambda = (17, 15, 14^2, 12, 9, 8, 6, 4^3, 1) \vdash 108$ . En minimal  $\beta$ -mængde for  $\lambda$  (hooklængderne i første søjle) er

$$Y = \{28, 25, 23, 22, 19, 15, 13, 10, 7, 6, 5, 1\}.$$

Så er  $|Y^{+3}| = 15$  delelig med  $e = 5$ .

Sæt

$$X := Y^{+3} = \{31, 28, 26, 25, 22, 18, 16, 13, 10, 9, 8, 4, 2, 1, 0\}.$$

Vi har da

$$\begin{aligned} X_0^{(5)} &= \{5, 2, 0\}, \lambda_0 = (3, 1) \\ X_1^{(5)} &= \{6, 5, 3, 0\}, \lambda_1 = (3^2, 2) \\ X_2^{(5)} &= \{4, 0\}, \lambda_2 = (3) \\ X_3^{(5)} &= \{5, 3, 2, 1\}, \lambda_3 = (2, 1^3) \\ X_4^{(5)} &= \{1, 0\}, \lambda_4 = (0) \end{aligned}$$

hvorved

$$\lambda^{(e)} = ((3, 1), (3^2, 2), (3), (2, 1^3), (0))$$

**Definition 9.14.** ( $e$ -vægt) For  $\lambda^{(e)} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1})$  defineres  $e$ -vægten af  $\lambda$  ved:

$$w_e(\lambda) = |\lambda_0| + \dots + |\lambda_{e-1}|$$

I det ovenstående eksempel 9.13 er  $w(\lambda) = 4 + 8 + 3 + 5 + 0 = 20$ .

**Sætning 9.15.** Lad  $\lambda$  være en partition,  $e \in \mathbb{N}$ . Der gælder

$$|\lambda| = |\lambda_{(e)}| + e \cdot w_e(\lambda)$$

*Bevis.* Se [LN] 3.6 □

I det ovenstående eksempel 9.13 er  $w_5(\lambda) = 20$  og derfor  $|\lambda_{(5)}| = 8$  ifølge Sætning 9.15. Det kan let beregnes, at  $\lambda_{(5)} = (4, 3, 1)$ , en partition af 8.

**Sætning 9.16.** Lad  $\mu$  være en  $e$ -kerne og  $\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1}$   $e$  partitioner. Da findes netop en partition  $\lambda$  med

$$\lambda_{(e)} = \mu \wedge \lambda^{(e)} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1})$$

*Bevis.* Se [LN] 3.7 □

**Definition 9.17.** ( $e$ -blok) To partitioner  $\mu, \lambda$  af  $n$  siges at være i samme  $e$ -blok, dersom

$$\lambda_{(e)} = \mu_{(e)}$$

Hvis  $\mu, \lambda$  er partitioner af  $n$  i samme  $e$ -blok  $B$ , gælder umiddelbart, ifølge 9.15, at

$$w_e(\lambda) = w_e(\mu)$$

Så dette tal er det samme for alle  $\lambda \in B$ .

**Definition 9.18.** Lad  $B$  være en  $e$ -blok. Den for alle partitioner  $i$   $B$  fælles  $e$ -vægt kaldes  $B$ 's vægt og betegnes  $w(B)$ .

Lad som i Kapitel 5  $P(q) = \sum_{n \geq 0} p(n)q^n$  være den frembringende funktion for partitionsfunktionen.

**Definition 9.19.** Lad  $e \in \mathbb{N}$  og  $w \in \mathbb{N}_0$ .  $k(e, w)$  er funktionen givet ved

$$P(q)^e = \sum_{w \geq 0} k(e, w)q^w$$

dvs

$$k(e, w) = |\{(\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1}) \mid \lambda_i \text{ partition, } \sum_{i=0}^{e-1} |\lambda_i| = e\}|$$

Fra Sætning 9.16 fås umiddelbart:

**Sætning 9.20.** Lad  $B$  være en  $e$ -blok af partitioner af  $n$  med  $w(B) = w$ . Da er antallet af partitioner  $i$   $B$  netop  $k(e, w)$ . Antallet er derfor uafhængigt af hvilken  $e$ -kerne partitionerne  $i$   $B$  har.

Det er nu let at beregne den frembringende funktion  $F_e(q)$  for antallet af  $e$ -kerner af  $n$ .

**Definition 9.21.** For  $e \in \mathbb{N}$  og  $n \in \mathbb{Z}$  defineres

$$c(e, n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \text{antallet af } e\text{-kerner af } n, & n \geq 0 \end{cases}$$

Der gælder

**Sætning 9.22.** For alle  $n \in \mathbb{N}_0$  er

$$p(n) = \sum_{w \geq 0} c(e, n - we)k(e, w)$$

*Bevis.* Man opdeler de  $p(n)$  partitioner af  $n$  efter  $e$ -blokkene. For alle  $w \geq 0$  er der  $c(e, n - we)$   $e$ -blokke af  $n$  af vægt  $w$ . Hver af disse blokke indeholder  $k(e, w)$  partitioner.  $\square$

**Korollar 9.23.** Lad  $e \in \mathbb{N}$  være fast. Hvis

$$c(e, w) \doteq F_e(q),$$

så gælder

$$P(q) = F_e(q)P(q^e)^e \text{ eller } F_e(q) = \frac{P(q)}{P(q^e)^e}$$

*Bevis.* Dette er simpelthen den forrige sætning formuleret med frembringende funktioner. (Overvej dette nøje).  $\square$

Det bør bemærkes, at sætning 9.22 kan ses som en rekursionsformel for  $c(e, w)$ , hvis man kender  $p(n)$ . (I øvrigt kan  $p(n)$  jo også beregnes rekursivt, jfr Kapitel 5.) Vi har nemlig

$$\begin{aligned} c(e, n) &= p(n) - \sum_{w \geq 1} c(e, n - we)k(e, w) \\ &= p(n) - c(e, n - e)k(e, 1) - c(e, n - 2e)k(e, 2) - \dots \end{aligned}$$

og tallene  $k(e, w)$  udtrykkes ved partitionsfunktionen som ovenfor.

**Eksempel 9.24.** Lad  $e=3$ . Da  $c(3, 0) = 1 (= p(0))$  (pr. definition) har vi (regn selv efter)

$$c(3, 1) = 1, \quad c(3, 4) = 9$$

samt

$$k(3, 1) = 3, \quad k(3, 2) = 9$$

Vi kan derfor finde:

$$\begin{aligned} c(3, 7) &= p(7) - \sum_{w \geq 1} c(3, 7 - 3w)k(3, w) \\ &= p(7) - c(3, 4)k(3, 1) - c(3, 1)k(3, 2) \\ &= 15 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vi fortsætter nu med yderligere egenskaber ved  $e$ -kvotienterne. Her er et resultat om multimængden  $\mathcal{H}(\lambda)$  for en partition.

**Sætning 9.25.** Lad  $\lambda$  være en partition,  $e \in \mathbb{N}$ .

Så er

$$w_e(\lambda) = |\{h \in \mathcal{H}(\lambda) \mid e \mid h\}|$$

Dette fås umiddelbart fra:

**Sætning 9.26.** Lad  $\lambda$  være en partition,  $e \in \mathbb{N}$ . Der gælder (som multimængde)

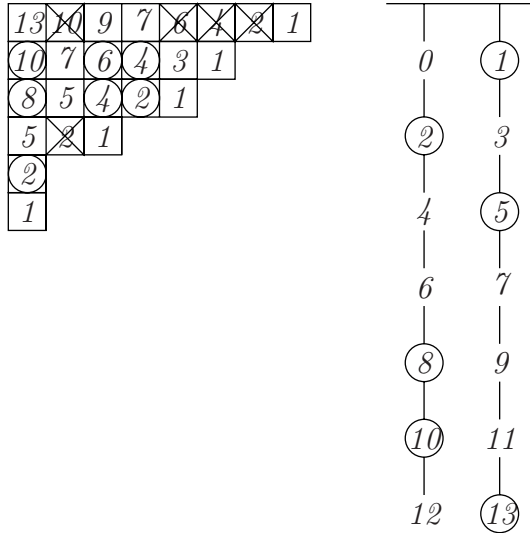
$$\{h \in \mathcal{H}(\lambda) \mid e \mid h\} = \bigcup_{i=0}^{e-1} \{e \cdot f \mid f \in \mathcal{H}(\lambda_i)\}$$

hvor  $\lambda^{(e)} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1})$ .

Bevis. Se [LN] 3.3

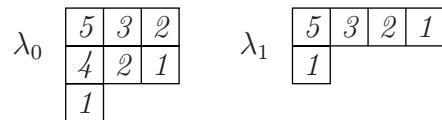
□

**Eksempel 9.27.** Lad  $e = 2$  og  $\lambda = (8, 6, 5, 3, 1^2)$ .



Vi finder 2-kvotienten:

$$\lambda^{(2)} = ((3^2, 1), (4, 1)) = (\lambda_0, \lambda_1)$$



Indgangene svarende til  $e$  "gange" hook-længderne for  $\lambda_0$ , er markeret i Ferrer's diagrammet for  $\lambda$  med en cirkel, mens de for  $\lambda_1$  er markeret med et kryds.

Vi kan gå et skridt videre end i Sætning 9.26, og finde Ferrer's diagrammerne for  $\lambda_i$ 'erne i  $\lambda^{(e)}$ , som naturlige deldiagrammer af diagrammet for  $\lambda$ , jfr. det ovenstående eksempel.

Beviset for sætning 9.26 viser at der er en bijektion mellem hook'ene i  $\lambda$  af længde delelig med  $e$  og foreningsmængden af alle hook'ene i  $\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1}$ .

**Sætning 9.28.** Hvis  $\mathcal{H}_{ik}(\lambda)$  er en hook af længde  $ef$  i  $\lambda$  og den tilsvarende hook er  $\mathcal{H}_{i'k'}(\lambda_j)$  i kvotienten, så gælder

$$(\lambda \setminus \mathcal{H}_{ik}(\lambda))^{(e)} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j \setminus \mathcal{H}_{i'k'}(\lambda_j), \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{e-1})$$

Dette følger af beviset for sætning 9.26. Det er også let at se, hvad  $j$ 'et er i den ovennævnte situation, altså fra hvilken partition i  $\lambda^{(e)}$  man skal fjerne en  $f$ -hook:

**Sætning 9.29.** Lad  $ef \in \mathcal{H}_i(\lambda)$ . Den tilsvarende  $f$ -hook i  $\lambda^{(e)}$  er i  $\lambda_j$ , hvor

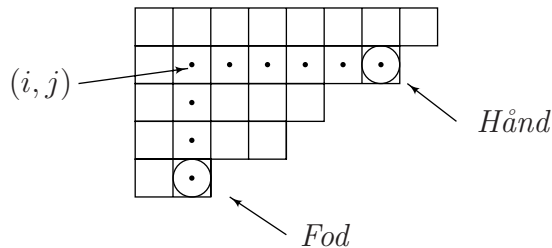
$$j \equiv_e l_i - i$$

hvor  $\lambda = (l_1, \dots, l_m)$ .

Bevis. Se igen [LN] 3.3. □

Vi kan nu også finde  $\mathcal{Y}(\lambda_i)$ 'erne i  $\mathcal{Y}(\lambda)$ :

**Definition 9.30.** Lad igen  $\lambda = (l_1, \dots, l_m)$  og antag at  $\lambda^0 = (n_1, \dots, n_l)$  er den konjugerede til  $\lambda$ . Betragt  $(i, j)$ -hooken i  $\lambda$ .



Punktet  $(i, l_i)$  kaldes hook'ens hånd, og punktet  $(n_j, j)$  hook'ens fod.

**Definition 9.31.** ( $e$ -residue diagrammet)  $e$ -residue diagrammet for  $\lambda$  opnås ved at erstatte punkterne  $(i, j) \in \mathcal{Y}(\lambda)$  med differensen  $j - i$ 's rest modulo  $e$ .

**Eksempel 9.32.** Lad  $\lambda = (8, 6, 5, 3, 1^2)$ . Da er 2- hhv. 3-residue diagrammet for  $\lambda$ :

0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0		
0	1	0	1	0			
1	0	1					
0							
1							

0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1		
1	2	0	1	2			
0	1	2					
2							
1							

**Definition 9.33.** (Hånd/Fod residuet) Håndresiduet af  $\mathcal{H}_{ij}(\lambda)$  er  $l_i - i$ 's rest modulo  $e$ . Fodresiduet af  $\mathcal{H}_{ij}(\lambda)$  er  $j - n_j$ 's rest modulo  $e$ .

Hånd- og fodresiduerne er altså netop de tal i  $e$ -residue diagrammet, der er i  $\mathcal{H}_{ij}(\lambda)$ 's hånd og fod.

Pr. definition er

$$h_{ij}(\lambda) = (l_i - i) + (n_j - j) + 1$$

Heraf ses let

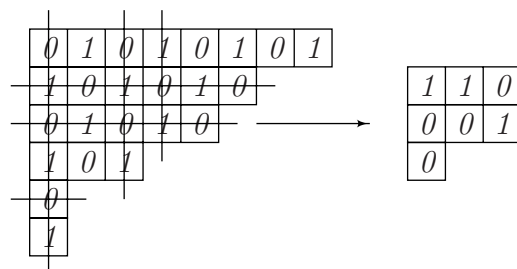
$$e \mid h_{ij}(\lambda) \Leftrightarrow \text{Differensen mellem } \mathcal{H}_{ij}(\lambda)\text{'s hånd og fod residue er } -1$$

Vælg nu et fast  $k$  så  $0 \leq k \leq e - 1$ .

1. Sæt en streg gennem de rækker i  $\lambda$ 's residue diagram der slutter med et  $k$ .
2. Sæt en streg gennem de søjler i  $\lambda$ ' residue diagram som slutter med et  $k - 1$ .

Så danner snitpunkterne mellem disse streger et Ferrer's diagram for partitionen  $\lambda_k$  i  $\lambda^{(e)} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1})!$

**Eksempel 9.34.** Lad igen  $\lambda = (8, 6, 5, 3, 1^2)$ ,  $e = 2$  og  $k = 0$ . Vi tegner stregerne:



Dette er Ferrer's diagrammet  $\mathcal{Y}(3^2, 1)$ .

**Sætning 9.35.** Lad  $\lambda^0$  være den konjugerede til partitionen  $\lambda$ ,  $e \in \mathbb{N}$ . Der gælder

1.  $(\lambda_{(e)})^0 = (\lambda^0)_{(e)}$
2. Hvis  $\lambda^{(e)} = (\lambda_0, \dots, \lambda_{e-1})$ , så er

$$(\lambda^0)^{(e)} = (\lambda_{e-1}^0, \lambda_{e-2}^0, \dots, \lambda_0^0)$$

*Bevis.* Se [LN] 3.5. □

Til sidst en lille sætning, der "blander" blokke for forskellige  $e$ :

**Sætning 9.36.** Lad  $p$  være et ulige tal, og lad  $B$  være en  $p$ -blok af partitioner med  $w_p(B) = 1$ .

Da er de  $k(p, 1) = p$  partitioner i  $B$  indeholdt i højst 2 forskellige 2-blokke.

*Bevis.* Se [LN] 3.17. □

## 10 Robinson-Schensted-korrespondancen

Hvis vi kombinerer anden del af Sætning 7.7 med den kendsgerning, at  $f_\lambda$ 'erne netop er dimensionerne af de irreducible repræsentationer af  $S_n$  må der gælde

$$\sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda^2 = n!$$

Robinson-Schensted-korrespondancen illustrerer dette ved at give en bijektion mellem mængden af permutationer af  $\{1, 2, \dots, n\}$  og mængden af par af standardtableauer for samme partition af  $n$ .

Robinson-Schensted-korrespondancen er altså en bijektion

$$\begin{aligned} \text{RS} : \quad S_n &\rightarrow \bigcup_{\lambda \vdash n} (\text{ST}(\lambda))^2 \\ \pi &\mapsto (P(\pi), Q(\pi)) \end{aligned}$$

hvor  $P(\pi)$  og  $Q(\pi)$  er standard-tableauer for samme  $\lambda \vdash n$ .

For at kunne forstå korrespondancen skal vi bruge en definition:

**Definition 10.1.** *Et generaliseret standard-tableau (kort skrevet gs-tableau) er et tableau hvori i tallene vokser ned af alle søjler og hen af alle rækker, men tallene i kasserne kan være vilkårlige naturlige tal.*

Robinson-Schensted-korrespondancen er så givet ved følgende algoritme:

Lad  $\pi = [\pi(1), \dots, \pi(n)] \in S_n$  være en permutation skrevet i den direkte fremstilling, jfr. kapitel 1. Vi konstruere da en endelig følge  $P_1, \dots, P_n$ , af gs-tableau'er, hvor det  $i$ 'te følgelement opstår ved at indsætter tallet  $\pi(i)$  i det foregående gs-tableau. Til dette formål skal vi kunne *rokere* på pladserne i et tableau.

Vi skal beskrive hvordan man indsætter et tal  $x$  i et gs-tableau. Først placerer man  $x$  for enden af første række. Dersom denne række nu består af stigende tal, har vi et nyt større gs-tableau og afslutter processen. Hvis rækken *ikke* består af stigende tal (dvs.  $x$  er mindre end det foregående tal i rækken), så lader vi  $x$  erstatte det første tal  $y$  i rækken som opfylder  $x < y$ . Herefter placeres  $y$  for enden af næste række og processen gentages for anden række. Dette fortsættes til vi når et gs-tableau. Erstatningen af et  $y$  med et  $x$  som beskrevet kaldes *rokering*.

**Eksempel 10.2.** *Vi vil gerne føje 3 til gs-tableau'et*

```
1 2 5 8
4 7
6
```

*Vi tilføjer 3 i enden af første række og rokerer derefter, dvs. erstatter 5 med 3 og flytter 5 ned i næste række.*

```
1 2 5 8 3
4 7
6
```

```
1 2 3 8
4 7 5
6
```

Vi skal nu rokere igen, dvs. erstatte 7 med 5 og flytte 7 ned i næste række.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & & \\ 6 & 7 & & \end{array}$$

Her står 7 på rette plads, så *processen er slut*.

Konstruktionsalgoritmen for  $P(\pi)$  er som følger:

$P_1$  defineres til gs-tableauet  $P_1 = \pi(1)$

$P_2$  defineres som gs-tableauet, som opnås ved at indsætte  $\pi(2)$  i  $P_1$ .

For  $2 \leq i \leq n$  defineres induktivt  $P_i$  til gs-tableauet, som opnås ved at indsætte  $\pi(i)$  i  $P_{i-1}$ .

Slutresultatet  $P_n$  er så et standard tableau,  $P(\pi)$ .

Standardtableau'et  $Q(\pi)$  fremkommer på samme måde, men boksene nummere- res efter den rækkefølge de skabes i. Det illustreres bedst ved et eksempel.

**Eksempel 10.3.** Lad  $\pi = [7156324] \in S_7$ . Da er

$$\begin{array}{cc} P_1 = 7 & Q_1 = 1 \\ \\ P_2 = \begin{array}{c} 1 \\ 7 \end{array} & Q_2 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \\ \\ P_3 = \begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 7 & \end{array} & Q_3 = \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & \end{array} \\ \\ P_4 = \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 6 \\ 7 & & \end{array} & Q_4 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & & \end{array} \\ \\ P_5 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 6 \\ 5 & & \\ 7 & & \end{array} & Q_5 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & & \\ 5 & & \end{array} \\ \\ P_6 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 6 \\ 3 & & \\ 5 & & \\ 7 & & \end{array} & Q_6 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & & \\ 5 & & \\ 6 & & \end{array} \\ \\ P_7 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & \\ 5 & & \\ 7 & & \end{array} & Q_7 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & \\ 5 & & \\ 6 & & \end{array} \end{array}$$

Altså er

$$RS(\pi) = (P(\pi), Q(\pi)) = (P_7, Q_7).$$

**Definition 10.4.** En involutorisk bijektion  $a$  på en mængde  $M$ , er en bijektion  $a : M \rightarrow M$  med  $a^2 = id$ .

På  $S_n$  betragtes de involutoriske bijektioner

$$\pi \xrightarrow{i} \pi^{-1}$$

(altså gruppeteoretisk inversdannelse) og

$$\pi \xrightarrow{b} \overleftarrow{\pi}$$

hvor  $\overleftarrow{\pi}$  er permutationen  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{pmatrix}$  når  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ , dvs.  $\overleftarrow{\pi}$  er ” $\pi$  læst bagfra”. Dette er snarere en kombinatorisk bijektion, som ikke passer med gruppestrukturen.

Bemærk, at hvis  $P$  er et standard tableau for  $\lambda$ , så er  $P^0$  (byt rækker og søjler) et  $\lambda^0$ -standard tableau.

På  $\bigcup_{\lambda \vdash n} \text{ST}(\lambda)^2$  betragtes to involutoriske bijektioner:

$$(P, Q) \xrightarrow{\sigma} (Q, P)$$

$$(P, Q) \xrightarrow{t} (P^t, Q^t)$$

**Sætning 10.5.** Lad  $\pi \in S_n$ . For  $RS(\pi) = (P(\pi), Q(\pi))$  gælder

$$RS(\pi^{-1}) = (Q(\pi), P(\pi))$$

dvs.

$$RS \circ i = \sigma \circ RS$$

dvs.

$$P(\pi^{-1}) = Q(\pi), \quad Q(\pi^{-1}) = P(\pi)$$

Beviset er lidt besværligt og udelades. Det er beskrevet udførligt i en bog af B. Sagan: ”The symmetric group”.

Sætningen har en interessant konsekvens:

**Korollar 10.6.** Antallet af permutationer  $\pi \in S_n$ , der opfylder  $\pi^2 = 1$ , er lig  $\sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda$ .

Det skyldes at  $\pi^2 = 1 \iff \pi = \pi^{-1} \iff P(\pi) = Q(\pi)$ , så antallet af  $\pi$ 'er i  $S_n$  med  $\pi^2 = 1$  er lig antallet af standardtableauer af alle partitioner af  $n$ .

**Eksempel 10.7.** For  $n = 4$  er  $f_{(4)} = 1, f_{(3,1)} = 3, f_{(2,2)} = 2, f_{(2,1^2)} = 3, f_{(1^4)} = 1$ , så  $S_4$  indeholder  $9=1+3+2+3$  elementer af orden 2 (og 10 elementer der opfylder  $\pi^2 = 1$ ). De udgøres, i  $S_4$ , af 6 elementer af typen  $(2, 1^2)$ :

$$(12), (13), (14), (23), (24), (34)$$

og tre elementer af typen  $(2^2)$ :

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$$

Desuden har vi følgende identitet:

**Korollar 10.8.**

$$\sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k}.$$

Det skyldes at højresiden af formelen for hvert  $k$  tæller antallet af elementer i  $S_n$  som er et produkt af  $k$  disjunkte 2-cykler.

Vi har beskrevet hvordan inverse elementer i  $S_n$  forholder sig i forhold til RS. Men hvad med  $\overleftarrow{\pi}$ ?

**Sætning 10.9.** Lad  $\pi \in S_n$  og antag  $RS(\pi) = (P(\pi), Q(\pi))$ . Da er

$$RS(\overleftarrow{\pi}) = (P(\pi)^t, ev(Q(\pi)^t))$$

hvor  $ev$  er evakuerings afbildningen (se nedenfor)

**Eksempel 10.10.** Lad  $\pi = [7156324] \in S_7$ . Da er, som vi har set ovenfor

$$RS(\pi) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & & 2 & 7 & \\ 5 & & & 5 & & \\ 7 & & & 6 & & \end{array} \right)$$

men

$$RS(\overleftarrow{\pi}) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & & & 2 & 5 & & \\ 4 & & & & 6 & & & \end{array} \right).$$

Man kunne have håbet at

$$RS \circ b = t \circ RS$$

som analogi til sætning 10.5, men det er ikke muligt, idet bijektionerne  $\sigma$  og  $\tau$  kommuterer på  $\bigcup_{\lambda \vdash n} ST(\lambda)^2$ , altså  $\sigma \circ t = t \circ \sigma$ , mens dette ikke er tilfældet med bijektionerne  $i$  og  $b$  på  $S_n$ :

**Eksempel 10.11.** Lad  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$ . Da er

$$\begin{aligned} b(i(\pi)) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ i(b(\pi)) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dvs.  $b$  og  $i$  kommuterer generelt ikke.

## Om Evakuering

Tableauerne på 1.-koordinaten skal bare transponeres over i hinanden, men ifølge sætning 10.9 anvendt på eksempel 10.10 skal

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & & \\ 4 & & & \end{array} \mapsto \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & & \\ & & & 6 \end{array}$$

ved evakueringsafbildningen. Denne beskrives nu:

*Vi starter med at beskrive evakuering af en kasse i et gs-tableau.*

Antag vi har en kasse på position  $(i, j)$  i et gs-tableau. Nabokasserne, dersom de er med i tableau'et, er kasserne på position  $(i, j + 1)$  og  $(i + 1, j)$  (altså et kassen lige under og kasse til højre for). Vi evakuere  $(i, j)$ -kassen som følger:

- Fjern tallet i kassen.
- Hvis kassen ikke har nogen nabokasser, fjernes den fra tableauet og vi er færdige.
- Hvis der er nabokasser, så flyttes det mindste af tallene i disse ind i kassen. Herved bliver en nabokasse tom og processen gentages indtil vi når til en kasse uden nabokasser.

Således vil evakuering af en kasse i et diagram give os et diagram med en kasse mindre end i det oprindelige diagram.

Den ovenstående algoritme med at flytte tal ind i en tom nabokasse er en variation af en velkendt algoritme, der i litteraturen kaldes "Jeu de taquin". Dette spil (jeu) kaldes på dansk "15-spillet" og er omtalt i Anders Thorup's noter til Algebra 2 (Eksempel (2.25)). Den kombinatoriske Jeu de Taquin er fx. behandlet i B. Sagans bog "The symmetric group".

**Eksempel 10.12.** *Betragt gs-tableau'et, som vi vil evakuere 3 fra:*

$$\begin{array}{cccc} & & 3 & 4 & 8 & 11 \\ & & 7 & 9 & & \\ & & 11 & 14 & & \\ 3 & 4 & 8 & 11 & * & 4 & 8 & 11 & 4 & * & 8 & 11 \\ 7 & 9 & & \rightarrow & 7 & 9 & & \rightarrow & 7 & 9 & & \rightarrow \\ 11 & 14 & & & 11 & 14 & & & 11 & 14 & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & 4 & 8 & * & 11 & 4 & 8 & 11 & * \\ & & & & 7 & 9 & & \rightarrow & 7 & 9 & & \\ & & & & 11 & 14 & & & 11 & 14 & & \end{array}$$

*Her angiver \* den tomme plads, der om muligt skal fyldes med et tal fra en nabokasse. Resultatet af at evakuere 3 fra diagrammet er altså diagrammet*

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & 8 & 11 \\ & & 7 & 9 & \\ & & 11 & 14 & \end{array}$$

*Bemærk, at vi ved at fjerne 3 fik et diagram med en kasse mindre. Kassen på position (1,4) er væk i diagrammet efter evakueringen.*

Evakueringsafbildningen anvendt på et standard tableau  $P$  af  $n$  kan nu beskrives som følger: Start med at evakuere kassen med 1, så kassen med 2 og så fremdeles. Herved fremkommer en endelig følge af stadig mindre gs-tableauer. I hvert skridt registreres positionen af den kasse, der bliver fjernet. Ved denne registrering opnås et nyt standard tableau, som vist i det følgende eksempel.

**Eksempel 10.13.**

1	2	5	6	*	*	*	*
3	7			*	*		
4				*			

Først evakueres 1:

2	5	6	*	*	*	*	7
3	7			*	*		
4				*			

Vi skriver 7 i den kasse, der blev fjernet. Nu evakueres 2 og vi skriver 6 i den kasse, der bliver fjernet, osv:

3	5	6	*	*	*	*	7
4	7			*	*		
*				6			

4	5	6	*	*	*	*	7
7	*			*	5		
*				6			

5	6	*	*	*	*	4	7
7	*			*	5		
*				6			

6	*	*	*	*	3	4	7
7	*			*	5		
*				6			

7	*	*	*	*	3	4	7
*	*			2	5		
*				6			

*	*	*	*	1	3	4	7
*	*			2	5		
*				6			

Hermed er vist at

$$ev \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & & \\ 4 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & & \\ 6 & & & \end{pmatrix}$$