MASO

UGE 3

JMM

Regneøvelser

I de første tillader vi os også at se på kvotientrækker med negative led: En kvotientrække $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, med en kvotient q som er er reelt tal, er konvergent hvis og kun hvis $-1 \le q \le 1$, og summen er så

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

Feks er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$ og $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1+1/3} = \frac{3}{4}$.

Opgave 1 Følgende tre rækker er kvotientrækker. Hvad er første led og hvad er kvotienten i de tre tilfælde? Er kvotientrækkerne konvergente? Se 'Rækker' → 'Kvotientrækker' i F2

a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$
b) $14 + 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{49} + \dots$
c) $4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{54} + \dots$

Opgave 2 Afgør for hvilke værdier af $x \in \mathbb{R}$ følgende kvotientrækker er konvergente og bestem deres sum.

a) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$
c) $1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + \dots$
d) $\frac{1}{x} - \frac{3}{x\sqrt{x}} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^2\sqrt{x}} + \dots, \quad x > 0\,.$

Opgave 3 Gør rede for, at følgende rækker er divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n+3}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+7}{2n-1}$

Date: September 20, 2017.

Vink. Se ‘Rækker med positive led’ → ‘Sammenligningkriteriet’ i F2

Opgave 4 Er rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

konvergente? Er rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergent? Se Youtube. Enhver kan se at

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!n!}{n! \cdot (n+1) \cdot \cdots \cdot (n+n)} = \frac{n!}{(n+1) \cdot \cdots \cdot (n+n)} \leq \frac{n!}{n^n}$$

Regn nu **Øvelse 3.3** i GG pp 50.

Opgave 5

a) Forklar, hvorfor

$$0,231231231\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{231}{1000^n}$$

b) Vis, at $0,231231231\ldots = \frac{231}{999}$

c) Brug samme fremgangsmåde til at skrive $0,473181818...$ som en brøk.

Vink. ‘Rækker’ → ‘Kvotientrækker’ i F2

Opgave 6 til skriftlig aflevering.

Forsøg at besvare så meget du kan af MASO 2011A Opgave 1. Du kan svare på (a) ved at differentiere på begge sider af lighedstegnet. Meningen med denne opgave er at vise hvordan Integralkriteriet kan bruges til at bestemme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n^4}$ rimelig nøjagtigt.