MASO

UGE 2

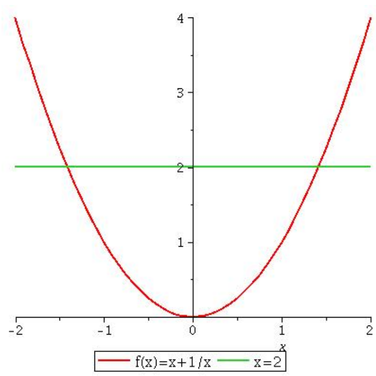
JMM

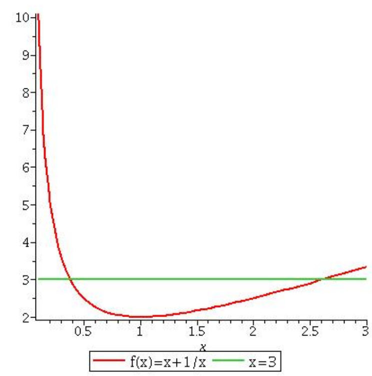
Regneøvelser i uge 2

Opgave 1 Bestem supremum og infimum for følgende to mængder:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x^2 < 2\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x > 0\,, \ x + \frac{1}{x} < 3\}$$

Har disse mængder et maksimum eller minimum?





Opgave 2 Bestem følgende grænseværdier:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^4 + 2n}{3n^4 - 7} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 4}{-2n^3 + 7} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + 2n - 13}{7n - 4}$$

Se lige på Opgave 4 inden du svarer! *Vink.*

$$\frac{3n^2 - 4}{-2n^3 + 7} = \frac{\frac{3}{n} - \frac{4}{n^3}}{-2 + \frac{7}{n^3}}$$

Opgave 3 Bestem følgende grænseværdier:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^4 + 2n}{e^n - 7} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{(\ln n)^4 + 6n^5}$$

Date: September 13, 2017.

Vink. Ved brug af grænseværdierne i Eksempel 2.9 i GG kan samme fremgangsmåde som i Opgave 2 anvendes.

Opgave 4 Find eksempler på følger (a_n) og (b_n), således at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ og $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, og således at

$$a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad b)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \qquad c)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -2$$

Opgave 5 (Kan springes over) Lad talfølgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ være givet iterativt ved

$$a_0 = 0\,, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\,a_n + 1\,.$$

a) Find de første fem led i følgen.
b) Eftervis, at $0 \leq a_n \leq 2$ for alle n, og at følgen er monotont voksende.
c) Gør rede for, at følgen er konvergent og find dens grænseværdi.
d) Kan du finde et eksplicit udtryk for a_n?

Se 'Følger' $\to$ 'Konvergenskriterier' $\to$ 'Iterativ følge $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$' i F1)

Opgave 6 til skriftlig aflevering. Gå nu ikke i panik. Forsøg stille og roligt at argumentere så overbevisende som muligt. Det gør du ved at bruge det du har hørt ved forelæsningerne – det kan faktisk bruges til noget! Du vil nok blive overrasket over hvor svært det er at selv formulere en besvarelse. Den erfaring er vigtig.

Argumenter for at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n-(\ln n)^2} = \infty$$

Her er et vink til den første opgave

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{n\cdot n\cdot n\cdots n} = \frac{1}{n}\,\frac{2\cdot 3\cdots n}{n\cdot n\cdots n} \leq \frac{1}{n}\,\frac{n\cdot n\cdots n}{n\cdot n\cdots n} = \frac{1}{n}$$

og til den anden

$$\frac{n^2+3}{n-(\ln n)^2} = \frac{n+\frac{3}{n}}{1-\frac{(\ln n)^2}{n}} \text{ hvor } \frac{(\ln n)^2}{n} = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2$$