MASO Uge 9

Ikke-lineær optimering

Jesper Michael Møller

Department of Mathematics
University of Copenhagen

Uge 44, 2010

Formålet med MASO

Oversigt

Differentiable optimeringsprogrammer

Antagelse

- A er en åben delmængde af $\mathbf{R}^n$
- $f, g_1, \ldots, g_p$ er C^1-funktioner defineret på A

Standard ikke-lineært minimeringsprogram

(P) Min $f(x)$ under bibetingelser $g_1(x) \leq 0, \ldots, g_p(x) \leq 0$

Definition (Mulige og optimale løsninger)

- En mulig løsning er en vektor $x \in A$ så $g_j(x) \leq 0$, $1 \leq j \leq p$.
- $M(P) = \{x \in A \mid g_1(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0\}$ er mængden af mulige løsninger.
- En optimal løsning er en mulig løsning $x^* \in M(P)$ så $f(x^*) \leq f(x)$ for alle mulige løsninger $x \in M(P)$
- Den optimale værdi er $\inf(P) = \inf_{x \in M(P)} f(x)$

Aktiv eller slæk?

Bibetingelsen g_j er aktiv i den mulige løsning $x \in M(P)$ hvis $g_j(x) = 0$ og den er slæk hvis $g_j(x) < 0$.

Regularitetsbetingelser

- bibetingelserne g_j er affine, $g_j(x) = a_j \cdot x - b_j$, for $1 \leq j \leq p$
- bibetingelserne g_j er konvekse og der findes mindst et punkt af $M(P)$ hvor de er alle slække (Slater betingelse)
- gradienterne i x^* for de aktive bibetingelser

  $$\{\nabla g_j(x^*) \mid 1 \leq j \leq p,\ g_j(x^*) = 0\}$$

  er lineært uafhængige

Example

Vinter 05/06 Opgave 3.

Karush–Kuhn–Tucker nødvendig betingelse

KKTNB

Antag at x^* er en optimal løsning til minimeringsprogrammet

$$\text{(P)} \qquad \text{Min } f(x) \text{ under bibetingelser } g_1(x) \leq 0, \ldots, g_p(x) \leq 0$$

som opfylder mindst en af de tre regularitetsbetingelser.
Så findes en vektor $u^* \in \mathbf{R}^m$ sådan at (x^*, u^*) opfylder
Karush–Kuhn–Tucker betingelserne

1. $u_j^* \geq 0$ for $1 \leq j \leq p$ (positivitet)
2. $g_j(x^*) \leq 0$ for $1 \leq j \leq p$ (mulig løsning)
3. $u_j^* g_j(x^*) = 0$ for $1 \leq j \leq p$ (komplementær slæk)
4. $\dfrac{\partial}{\partial x}(f + \sum u_j^* g_j)(x^*) = 0$ (optimalitet)

Karush–Kuhn–Tucker tilstrækkelig betingelse

KKTTB

- A er konveks
- (x^*, u^*) opfylder Karush–Kuhn–Tucker betingelserne
- funktionen $A \to \mathbf{R} \colon x \to f(x) + \sum u_j^* g_j(x)$ er konveks

$\Longrightarrow x^*$ er en optimal løsning til minimeringsprogrammet (P).

Karush–Kuhn–Tucker for maksimering

(P) Max $f(x)$ under bibetingelser $g_1(x) \leq 0, \ldots, g_p(x) \leq 0$

KKTNB x^* regulær optimal løsning $\Longrightarrow$

1. $u_j^* \geq 0$ for $1 \leq j \leq p$ (positivitet)
2. $g_j(x^*) \leq 0$ for $1 \leq j \leq p$ (mulig løsning)
3. $u_j^* g_j(x^*) = 0$ for $1 \leq j \leq p$ (komplementær slæk)
4. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f - \sum u_j^* g_j\right)(x^*) = 0$ (optimalitet)

KKTTB

- A er konveks
- (x^*, u^*) opfylder Karush–Kuhn–Tucker betingelserne
- funktionen $A \to \mathbf{R}\colon x \to f(x) - \sum u_j^* g_j(x)$ er konkav

$\Longrightarrow$ x^* er en optimal løsning til maksimeringsprogrammet (P).

Generel Karush–Kuhn–Tucker for minimering

(P) Min f u. bibetingelser $g_1 \leq 0, \ldots, g_p \leq 0$, $h_1 = 0, \ldots, h_q = 0$

KKTNB x^* regulær optimal løsning $\Longrightarrow$

1. $u_j^* \geq 0$ for $1 \leq j \leq p$ og $v_j^* \in \mathbf{R}$ for $1 \leq j \leq q$
2. $g_j(x^*) \leq 0$ for $1 \leq j \leq p$ og $h_j(x^*) = 0$ for $1 \leq j \leq q$ (mulig løsning)
3. $u_j^* g_j(x^*) = 0$ for $1 \leq j \leq p$ (komplementær slæk)
4. $$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{p} u_j^* \nabla g_j(x^*) + \sum_{j=1}^{q} v_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \text{ eller}$$
   $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) + \sum_{j=1}^{p} u_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x^*) + \sum_{j=1}^{q} v_j^* \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x^*) = 0 \text{ for } 1 \leq i \leq n$$
   (optimalitet)