MASO Uge 8

Invers funktion sætning og Implicit given funktion sætning

Jesper Michael Møller

Department of Mathematics
University of Copenhagen

Uge 43

Formålet med MASO

Oversigt

Invertibel funktion $f\colon U \to V$

En funktion $f\colon U \to V$ er invertibel hvis der for ethvert $y \in V$ findes netop et $x \in U$ så $f(x) = y$.
Funktionen $f\colon U \to V$ er invertibel hvis og kun hvis der findes en invers funktion $U \leftarrow V\colon f^{-1}$ sådan at $f^{-1} \circ f$ og $f \circ f^{-1}$ er identitetsfunktioner.

Den inverse funktion: For $y \in V$ find det $x \in U$ så $f(x) = y$. Da er $f^{-1}(y) = x$.

Lokalt invertibel funktion $f\colon (\mathbf{R}^n, x_0) \to (\mathbf{R}^n, y_0)$

En funktion $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ er lokalt invertibel nær $x_0 \in \mathbf{R}^n$ hvis der findes omegne $U \subseteq \mathbf{R}^n$ af x_0 og $V \subseteq \mathbf{R}^n$ af $f(x_0)$ så $V|f|U\colon U \to V$ er invertibel.

Den lokale inverse nær x_0: For $y \approx f(x_0)$ find det $x \approx x_0$ så $f(x) = y$. Da er $f^{-1}(y) = x$.

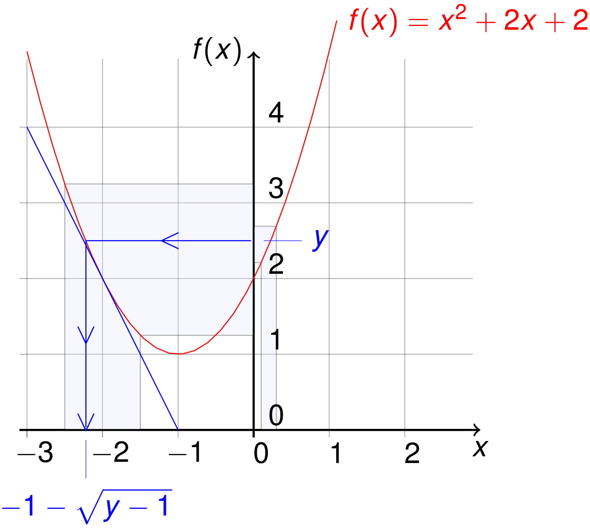
Invertible og lokalt invertible funktioner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

- $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$, er invertibel med invers $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.
- $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, er ikke invertibel.
- $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, er lokalt invertibel nær ethvert $x_0 \neq 0$. Den lokale inverse nær x_0 er

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & x_0 > 0, y \approx x_0^2 \\ -\sqrt{y} & x_0 < 0, y \approx x_0^2 \end{cases}$$

- $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, er ikke lokalt invertibel nær $x_0 = 0$: For $y \approx 0$ findes ikke et entydigt bestemt $x \approx 0$ så $x^2 = y$.

Eksempel på lokal invers



Invers funktion sætning for $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$y = ax + b \text{ har en entydig løsning for } x \iff a \neq 0$$

$$y = f(x) \text{ har nær } x_0 \text{ en entydig løsning for } x \iff f'(x_0) \neq 0$$

Hvis $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er C^1 og $x_0 \in \mathbf{R}$ så gælder:

$$f \text{ har en lokal invers nær } x_0 \iff f'(x_0) \neq 0$$

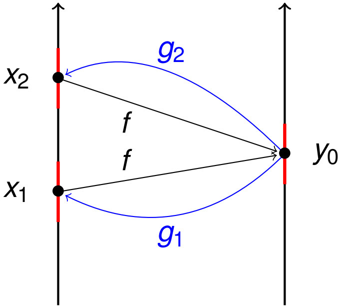
og den lokale inverse f^{-1} har i $f(x_0)$ differentialkvotient

$$\frac{df^{-1}}{dy}(f(x_0)) = \frac{df}{dx}(x_0)^{-1}$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx y_0 + a\Delta x$$

$$x_0 + a^{-1}\Delta y \approx f^{-1}(y_0 + \Delta y)$$

Lokale inverse



Hvis $f(x_1) = y_0$ og $f(x_2) = y_0$ og $f'(x_1) \neq 0$, $f'(x_2) \neq 0$, så findes lokale inverse defineret nær y_0 og med værdier nær x_1 og x_2.

$$g_1(y_0 + \Delta y) \approx x_1 + f'(x_1)^{-1} \Delta y$$
$$g_2(y_0 + \Delta y) \approx x_2 + f'(x_2)^{-1} \Delta y$$

Invertible funktioner $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$

Invers funktion sætning handler om at løse ligninger

Antag at vi har en ligning af formen

$$f(x) = y, \qquad f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^n$$

Kan vi finde x udtrykt ved y?

Problemet er altså

- Hvornår kan vi entydigt løse ligningen $f(x) = y$ for x?
- Findes der en funktion $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ så

$$f(x) = y \iff x = g(y)$$

Invers Funktion Sætning

Antag at $X, Y \subseteq \mathbf{R}^n$ er åbne, $f\colon X \to Y$ er C^1.

$$f \text{ er lokalt invertibel nær } x_0 \iff Df(x_0) \text{ er invertibel}$$
$$\iff \det Df(x_0) \neq 0$$

Den lokale invers f^{-1} nær x_0 er C^1 med Jacobi matrix i $f(x_0)$

$$D(f^{-1})(f(x_0)) = Df(x_0)^{-1}$$

Den lineære approximation til den lokale inverse nær x_0 er

$$f^{-1}(f(x_0) + \Delta y) \approx x_0 + Df(x_0)^{-1}\Delta y$$

for $\Delta y \approx 0$.

Implicit givne lineære funktioner

A $m \times n$ matrix, B invertibel $m \times m$ matrix

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - B^{-1} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Hvis matricen B foran y er invertibel, så kan vi bruge ligningen $Ax + By = b$ til at finde y udtrykt ved x. De fri variable x parametriserer løsningsmængden og y er implicit givet som funktion af x.

$$\begin{pmatrix} m \text{ ligninger} \\ n + m \text{ variable} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m \text{ bundne variable} \\ n \text{ fri variable} \end{pmatrix}$$

Implicit givne funktioner for begyndere

Antag at $F\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er funktionen $F(x,y) = ax + by$ hvor $\frac{\partial F}{\partial y} = b \neq 0$.

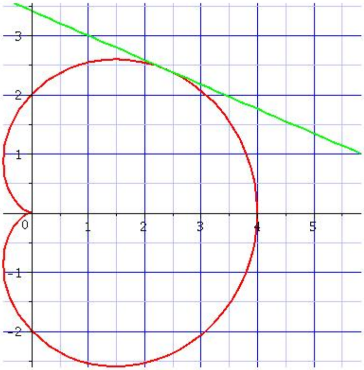
1. Vi kan løse ligningen $F(x,y) = c$ for y. Vi får nemlig at
$$F(x,y) = c \iff y = \frac{1}{b}c - \frac{1}{b}ax$$
2. Den afledte funktion af funktionen $y(x)$ implicit givet ved ligningen $F(x,y) = c$ er
$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{a}{b} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$$
3. Den lineære approksimation til funktionen $y(x)$ er
$$y(x_0 + \Delta x) \approx y_0 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x$$

Implicit Funktion Sætning i $1+1$ variable

Antag at $F\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ er C^1, $F(x_0,y_0)=0$ og $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

1. Der findes en omegn U af x_0 og en omegn V af y_0 så ligningen $F(x,y)=0$ for ethvert x i U har netop en løsning $y=y(x)$ i V.
2. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))+\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\dfrac{\partial y}{\partial x}(x)=0$ for alle $x\in U$ (implicit differentiation)
3. $\dfrac{\partial y}{\partial x}(x)=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\right)^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))$ for alle $x\in U$
4. $y(x_0+\Delta x)\approx y_0-\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x$ for Δx tæt ved 0 (lineær approksimation)

Cardioide



Tangenten til $F^{-1}(0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

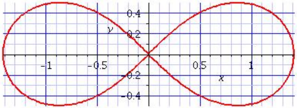
er graf for funktionen

$$y = y_0 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}(x - x_0) \text{ når}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

$$F(x,y) = (x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4(x^2 + y^2),$$
$$(x_0, y_0) = (1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 4(x_0^2 + y_0^2 - 2x_0)(x_0 - 1) - 8x_0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 4y_0(x_0^2 + y_0^2 - 2x_0) - 8y_0$$

Lemniscate



$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$
$$DF(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big| \frac{\partial F}{\partial y}\right) =$$
$$(4x_0(x_0^2+y_0^2-1) | 4y_0(x_0^2+y_0^2+1))$$

0-niveauet for F omkring (x_0, y_0) er en graf hvis $y_0 \neq 0$.
Hvis $y_0 \neq 0$ så er $F^{-1}(0)$ nær (x_0, y_0) graf for en funktion $y = y(x)$ med $y(x_0) = y_0$ og

$$y'(x_0) = \frac{x_0(1-x_0^2-y_0^2)}{y_0(1+x_0^2+y_0^2)}$$

Implicit givne funktioner for let øvede

Med et (lineært) ligningssystem bestående af 2 ligninger med 5 ubekendte

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + y_1 + y_2 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2y_2 - 3y_2 &= 4 \end{aligned} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

kan vi bruge de to ligninger til at udtrykke to variable (y_1 og y_2) ved de andre tre (fri) variable (x_1, x_2 og x_3) – hvis matricen foran y_1 og y_2 er invertibel. Løsningsmængden kan parametriseres ved de tre fri variable x_1, x_2, x_3.

Implicit Funktion Sætning handler om at løse ligninger

Hvis vi har m ligninger med $n+m$ ubekendte skrevet på formen

$$F(x,y)=0, \qquad F\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m, \quad x \in \mathbf{R}^m, y \in \mathbf{R}^n$$

kan vi bruge dem til at udtrykke m variable ved de resterende n fri variable? Kan vi isolere y på den ene side af lighedstegnet?

$$F(x,y)=0 \iff \begin{pmatrix} F_1(x,y)=0 \\ \vdots \\ F_m(x,y)=0 \end{pmatrix} \overset{?}{\iff} \begin{pmatrix} y_1 = y_1(x) \\ \vdots \\ y_m = y_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\iff y = y(x)$$

Findes der en funktion $y\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ så

$$F(x,y)=0 \iff y=y(x)$$

Kan vi parametrisere løsningsmængden $F^{-1}(0)$ ved de n fri x-variable?

Linearisering

Antag $F(x_0, y_0) = b$. Ligningen

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = b$$

lineariserer til ligningen

$$\left(\tfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \tfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = 0$$

som vi kan bruge til at bestemme

$$\Delta y = -\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x$$

hvis matricen $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ er invertibel.

Implicit Funktion Sætning

Antag at $F\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ er C^1, $F(x_0, y_0) = 0$ og $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ er invertibel.

1. Der findes en omegn U af x_0 og en omegn V af y_0 så ligningen $F(x, y) = 0$ for ethvert $x \in U$ har netop en løsning $y = y(x) \in V$.
2. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\dfrac{\partial y}{\partial x}(x) = 0$ for alle $x \in U$ (implicit differentiation)
3. $\dfrac{\partial y}{\partial x}(x) = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\right)^{-1} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))$ for alle $x \in U$
4. $y(x_0 + \Delta x) \approx y_0 - \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x$ for Δx tæt ved 0 (lineær approksimation)

Koodinatfunktioners gradienter er ortogonale til $F^{-1}(0)$

Antag $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og $F(x_0) = 0$ hvor

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla F_m(x_0) \end{pmatrix}$$

har fuld rang. Tangentrummet i x_0 til $F^{-1}(0)$

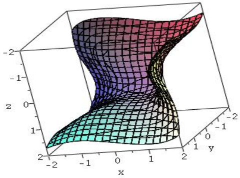
$$T_{x_0}F^{-1}(0) = x_0 + DF(x_0)^{-1}(0) = x_0 + \{\nabla F_1(x_0), \dots, \nabla F_m(x_0)\}^{\perp}$$

er det $(n-m)$-dimensionale underrum af $\mathbf{R}^n$ med ligning

$$DF(x_0)(x - x_0) = 0$$

for det består af de vektorer der afsat fra x_0 er vinkelret på gradienterne for de m koordinatfunktioner.

Hvis $x^3 - y^3 + 2z^3 - xyz = 1$ kan vi finde z?



$$F(x,y,z) = x^3 - y^3 + 2z^3 - xyz$$
$$F(1,1,1) = 1$$
$$\frac{\partial F}{\partial (x,y)}(1,1,1) = (2,-4)$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = (5)$$

Løsningsmængden $F^{-1}(1)$ nær $(1,1,1)$ kan parametriseres med fri variable (x,y) og en funktion $z = z(x,y)$ med

$$\frac{\partial z}{\partial (x,y)}(1,1) = -\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)^{-1}\frac{\partial F}{\partial (x,y)}(1,1,1) = (-2/5, 4/5)$$

$$z(1+\Delta x, 1+\Delta y) \approx 1 - \frac{2}{5}\Delta x + \frac{4}{5}\Delta y$$

$$F(1+\Delta x, 1+\Delta y, 1 - \frac{2}{5}\Delta x + \frac{4}{5}\Delta y) \approx 0$$

Hvis $x^3 - xy + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$ kan vi finde y, z?

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 - xy + z^2 \\ x + y + z \end{pmatrix}, \qquad F(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løsningsmængden $F^{-1}(1,1)$ er en kurve i $\mathbf{R}^3$

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(1,0,0)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,0) = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(y,z)(1+\Delta x) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}(\Delta x) = \begin{pmatrix} 3\Delta x \\ -4\Delta x \end{pmatrix}$$

$$F(1+\Delta x, 3\Delta x, -4\Delta x) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Implicit FS = Invers FS

Lad $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ med invertibel $Df(y_0)$. Funktionen $F\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $F(x,y) = x - f(y)$ har invertibel $\frac{\partial F}{\partial y}$. Derfor findes $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ så

$$x = f(y) \iff F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

Lad $F\colon \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^m$ med invertibel $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$. Så har $(x,y) \to (x, F(x,y))$ en invers, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$. Vi har

$$\begin{aligned} F(x,y) = 0 &\iff (x, F(x,y)) = (x,0) \\ &\iff (x,y) = \Phi(x,0) \iff (x,y) = (\Phi_1(x,0), \Phi_2(x,0)) \\ &\iff x = \Phi_1(x,0),\ y = \Phi_2(x,0) \end{aligned}$$