MASO Uge 7

Differentiable funktioner

Jesper Michael Møller

Department of Mathematics
University of Copenhagen

Uge 7

Formålet med MASO

Oversigt

Differentiable funktioner $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

- C^1-funktioner $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$
- C^1-funktioner $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$
- C^1-funktioner $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

Differentiable funktioner $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

En funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er differentiabel i $x_0 \in \mathbf{R}$ hvis der findes et tal $f'(x_0) \in \mathbf{R}$ og en funktion ε, defineret nær 0 så $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ for $\Delta x \to 0$, sådan at

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

Hvis $f(x)$ er differentiabel i x_0 så er

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\varepsilon(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

En funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er C^1 hvis den er differentiabel i alle punkter $x \in \mathbf{R}$ og den afledte funktion $f'(x)$ er kontinuert.

Den lineære approximation til funktionen f i punktet x_0

Den lineære approximation til f i x_0 er

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

eller

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Tangentlinjen for grafen $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbf{R}\}$ for f i punktet $(x_0, f(x_0))$ har ligningen

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nødvendig betingelse for lokalt extremum

$$f \text{ har lokalt extremum i } x_0 \implies f'(x_0) = 0$$

Antag at $f'(x_0) \neq 0$. Da

$$f(x_0 + f'(x_0)t) \approx f'(x_0) + f'(x_0)^2 t$$

er $> f(x_0)$ for $t > 0$ og $< f(x_0)$ for $t < 0$ er der hverken lokalt maksimum eller minimum i x_0.

Kædereglen

Differentialkvotienten af en sammensat funktion $\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ er

$$\frac{\mathrm{d}(g \circ f)}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(f(x_0))\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$
$$g(y_0 + \Delta y) \approx g(y_0) + g'(y_0)\Delta y$$
$$g(f(x_0 + \Delta x)) \approx g(f(x_0) + f'(x_0)\Delta x)$$
$$\approx g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)\Delta x$$

Approximation til fordoblingstid

Den lineære approximation til $f(x) = \ln(x)$ nær $x_0 = 1$ er

$$\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x$$

da $f(1) = 0$ og $f'(1) = 1$.
Kapitalen K er efter tid t vokset til

$$K(t) = K(1 + r)^t$$

hvor $r = \frac{p}{100}$ er renten. Fordoblingstiden er

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + r)} \approx \frac{\ln(2)}{r} = \frac{100 \ln(2)}{p} \approx \frac{70}{p}$$

Med en rente på $p = 5$ procent er fordoblingstiden cirka 14.

Marginale omkostninger

Lad $\mathrm{TC}(x)$ være de totale omkostninger ved at producere x enheder af en vare. De *marginale omkostninger* ved en produktion på x_0 enheder er

$$\mathrm{MC}(x_0) = \frac{\mathrm{dTC}}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

Ændringen i de totale omkostninger ved produktionen af $x_0 + \Delta x$ enheder er

$$\mathrm{TC}(x_0 + \Delta x) - \mathrm{TC}(x_0) \approx \mathrm{MC}(x_0)\Delta x$$

Hvis totale omkostninger ændres med $\Delta\mathrm{TC}$ fra $\mathrm{TC}(x_0)$, så er $\frac{\Delta\mathrm{TC}}{\mathrm{MC}(x_0)}$ ændringen i antal producerede enheder.

Partielt differentiable funktioner $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ er partielt differentiabel i $x_0 \in \mathbf{R}^n$ i retning $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ hvis $t \to f(x_0 + te_i)$ er differentiabel i 0 og så er

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + te_i)\big|_{t=0}$$

den $i$te partielle afledte af f i x_0.

Gradienten for f i x_0 er vektoren

$$\nabla f(x_0) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0))$$

af de n partielle differentialkvotienter i x_0.

Lineære approximation til $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

Den lineære approximation til $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ i $x_0 \in \mathbf{R}^n$ er

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &\approx f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot \Delta x \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i \end{aligned}$$

Funktionen $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ har partielle afledte $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 x_2$ og $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2$. Gradienten og den lineære approximation i $(1, 1)$ er

$$\begin{aligned} &\nabla f(1, 1) = (2, 1) \\ &(1 + \Delta x_1)^2(1 + \Delta x_2) \approx 1 + 2\Delta x_1 + \Delta x_2 \end{aligned}$$

Nødvendig betingelse for lokalt extremum.

Nødvendig betingelse for lokalt extremum:

$$f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \text{ har lokalt extremum i } x_0 \implies \nabla f(x_0) = 0$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot \Delta x$$
$$f(x_0 + t\nabla f(x_0)) \approx f(x_0) + t|\nabla f(x_0)|^2$$

Hvis $\nabla f(x_0) \neq 0$ så er $f(x_0 + t\nabla f(x_0)) > f(x_0)$ for $t > 0$ og $< f(x_0)$ for $t < 0$. Punktet x_0 er derfor hverken lokalt maksimum eller minimum.

Optimering uden bibetingelser

$A \subseteq \mathbf{R}^n$ åben, $f\colon A \to \mathbf{R}$.

$$\text{(P) Maksimer } f(x)$$

Mulige og optimale løsninger til optimeringsproblem (P)

$$M(P) = A, \qquad O(P) = \{x^* \in M(P) \mid f(x^*) \geq f(x) \text{ for all } x \in A\}$$

$$O(P) \subseteq \{x \in A \mid \nabla f(x^*) = 0\}$$

Der er lighedstegn hvis A er konveks og f konkav.

Kædereglen for $\mathbf{R} \xrightarrow{x} \mathbf{R}^n \xrightarrow{f} \mathbf{R}$

$$\frac{d}{dt}(f \circ x)(t) = \nabla f(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \nabla f(x(t)) \cdot x'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t)$$

Differentialkvotienten af f i x_0 i retning v

$$f'_v(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x_0 + tv))\bigg|_{t=0} = \nabla f(x_0) \cdot v$$

er størst når v er parallel med $\nabla f(x_0)$: Gradienten viser den retning hvor f har størst vækst.

Gradienten for $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

- peger i den retning hvor f vokser hurtigst.
- står vinkelret på løsningsmængden
- tangenthyperplan har ligning $\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) = 0$

Løsningsmængder for $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2$

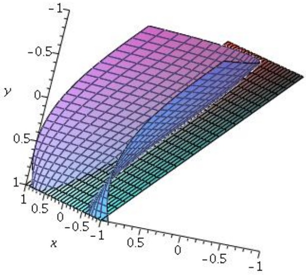
Antag at $f(x_0, y_0) = d$. Løsningsmængden $f^{-1}(d)$ er en ellipse gennem (x_0, y_0). Gradienten i (x_0, y_0) er

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_0 & 2y_0 \end{pmatrix}$$

Tangenten i (x_0, y_0) til ellipsen $f^{-1}(d)$ er

$$\frac{1}{2}x_0 x + 2y_0 y = 2d$$

Eksempel på gradient, lineær approximation, sammensat funktion



$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1^2 + x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} 2x_1 \cos(x_1^2 + x_2) & \cos(x_1^2 + x_2) \end{pmatrix}$$

$$f(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \Delta x_2$$

$$\frac{\partial f(t, t^2)}{\partial t} = \begin{pmatrix} 2t\cos(2t^2) & \cos(2t^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = 4t\cos(2t^2)$$

Differentiable funktioner $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er C^1 hvis alle dens m koordinatfunktioner har kontinuerte partielle afledte efter alle n variable, dvs hvis Jacobimatricen

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}}{\partial (x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

eksisterer og er kontinuert $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{nm}$.

Lineær approximation til $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

Den lineære approximation til $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ i $x_0 \in \mathbf{R}^n$ er

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + Df(x_0)\Delta x$$
$$= \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \cdot \Delta x \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \cdot \Delta x \end{pmatrix}$$

eller

$$f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$$

Kædereglen for $\mathbf{R}^n \xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \xrightarrow{g} \mathbf{R}^k$

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0) = \frac{\partial \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix}}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(f(x_0)) \frac{\partial \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x_0)$$

$$\frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x_j} = \nabla g_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_i}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_r} \frac{\partial f_r}{\partial x_j}$$

Jacobi matrix for sammensat funktion $\mathbf{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbf{R}^2$

$$D(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial (g \circ f)_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

Partielle afledte for sammensat funktion $\mathbf{R}^n \xrightarrow{f} \mathbf{R}^m \xrightarrow{g} \mathbf{R}$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(x) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_r}(f(x))\frac{\partial f_r}{\partial x_j}(x)$$

Example ($\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbf{R}$)

$$f\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2+t^2 \\ s/t \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$$

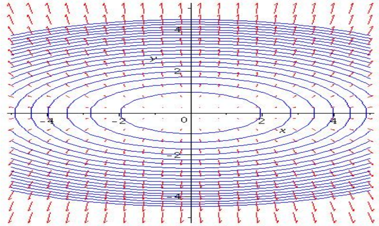
$$\frac{\partial f}{\partial(s,t)}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s & 2t \\ 1/t & -s/t^2 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial g}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial(s,t)}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial(s,t)}\begin{pmatrix} s^2+t^2 \\ s/t \end{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial(s,t)}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s/t & s^2+t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2s & 2t \\ 1/t & -s/t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3s^2+t^2}{t} & \frac{st^2-s^3}{t^2} \end{pmatrix}$$

Løsningsmængden $F^{-1}(c)$ for $F\colon \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^m$



Koordinatfunktionernes gradienter $\perp$ løsningsmængden
$\nabla F_1(x_0), \ldots, \nabla F_m(x_0) \perp F^{-1}(c)$

Lad $u(t)$ være en kurve på $F^{-1}(c)$. Da $F(u(t)) = c$ er konstant er $0 = Df(u(t)))u'(t) = (\nabla F_1(u(t)) \cdot u'(t), \ldots, \nabla F_m(u(t)) \cdot u'(t))$.

Ligning for tangentrummet til løsningsmængden

Tangentrummet i x_0 til løsningsmængden $F^{-1}(c)$ har ligningen $DF(x_0)(x - x_0) = 0$ (forudsat rank $DF(x_0) = m$).

Kæderegel eksempel

Example of Chain Rule

```
> with(VectorCalculus) : with(LinearAlgebra) :
```

```
> f := (s, t) -> (s^2 + t^2, s/t);
```

$$f := (s,t) \rightarrow \left(s^2+t^2,\ s\,\frac{1}{t}\right) \quad (1)$$

```
> g := (x, y) -> x·y;
```

$$g := (x,y) \rightarrow x\,y \quad (2)$$

```
> g(f(s, t));
```

$$\frac{(s^2+t^2)\,s}{t} \quad (3)$$

```
> unapply(Jacobian([g(x, y)], [(x, y)]), (x, y))(f(s, t)), Jacobian([f(s, t)], [s, t]);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{t} & s^2+t^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\,s & 2\,t \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
> unapply(Jacobian([g(x, y)], [(x, y)]), (x, y))(f(s, t)).Jacobian([f(s, t)], [s, t]);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{2\,s^2}{t}+\frac{s^2+t^2}{t} & 2\,s-\frac{(s^2+t^2)\,s}{t^2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

```
> Jacobian([g(f(s, t))], [s, t]);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{2\,s^2}{t}+\frac{s^2+t^2}{t} & 2\,s-\frac{(s^2+t^2)\,s}{t^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

```
> simplify(%);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{3\,s^2+t^2}{t} & -\frac{s\,(-t^2+s^2)}{t^2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

```
>
```

Invers Funktion Sætning

Example: Inverse Function Theorem

```
> with(LinearAlgebra) : with(VectorCalculus) :
> f := (s, t) -> (s^2 + t^2, s/t) :
> f(1, 2);
```

$$5, \frac{1}{2} \tag{1}$$

```
> J := (s, t) -> Jacobian([f(s, t)], [(s, t)]);
```

$$J := (s, t) \rightarrow VectorCalculus{:-}Jacobian([f(s, t)], [s, t]) \tag{2}$$

```
> J(s, t);
```

$$\begin{bmatrix} 2s & 2t \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

```
> unapply(J(s, t), (s, t))(1, 2)^(-1);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \tag{4}$$

```
> unapply(J(s, t), (s, t))(1, 2)^(-1).<h1, h2>;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10} h_1 + \frac{8}{5} h_2 \\ \frac{1}{5} h_1 - \frac{4}{5} h_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

```
> Vector[column]([1, 2]) + unapply(J(s, t), (s, t))(1, 2)^(-1).<h1, h2>;
```

$$\left(1 + \frac{1}{10} h_1 + \frac{8}{5} h_2\right) e_x + \left(2 + \frac{1}{5} h_1 - \frac{4}{5} h_2\right) e_y \tag{6}$$

```
>
```