MASO Uge 6

Følger i euklidiske rum
Ekstremværdisætningen

Jesper Michael Møller

Department of Mathematics
University of Copenhagen

Uge 6

Formålet med MASO

Oversigt

Følger i $\mathbf{R}^n$
- Konvergens, delfølger
- Det almindelige konvergensprincip i $\mathbf{R}^n$

Kompakte delmængder af R^n
- Afsluttede delmængder af $\mathbf{R}^n$
- Begrænsede delmængder
- Kompakte delmængder af $\mathbf{R}^n$

Kontinuerte funktioner på $\mathbf{R}^n$
- Følger og kontinuerte funktioner
- Kompakte mængder og kontinuerte funktioner
- Ekstremværdisætningen

Følge og delfølge

1. En følge i $\mathbf{R}^n$ en funktion $x\colon \mathbf{N} \xrightarrow{k \to x_k} \mathbf{R}^n$.
2. En delfølge af følgen $x\colon \mathbf{N} \xrightarrow{k \to x_k} \mathbf{R}^n$ er en følge af formen $\mathbf{N} \xrightarrow{j \to k_j} \mathbf{N} \xrightarrow{k \to x_k} \mathbf{R}^n$ hvor følgen $j \to k_j\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ er voksende.

Konvergens for følger i $\mathbf{R}^n$

Følgen $x\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}^n$ konvergerer mod $x \in \mathbf{R}^n$ hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes K så $|x_k - x| < \varepsilon$ når $k > K$.

Konvergens kan testes på koordinatfølger

En følge x_k i $\mathbf{R}^n$ er konvergent hvis og kun hvis alle n koordinatfølger $\pi_1(x_k), \ldots, \pi_n(x_k)$ i $\mathbf{R}$ er konvergente.

Grænse af delfølge

En delfølge x_{k_j} af en konvergent følge x_k er konvergent og $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = \lim_{k\to\infty} x_k$.

Diameter af $A \subseteq \mathbf{R}^n$

$\mathrm{diam}(A) = \sup\{|x-y| \mid x, y \in A\}$

Det Almindelige Konvergensprincip

x_k konvergent $\iff \mathrm{diam}(\{x_k \mid k \geq N\}) \to 0$ for $N \to \infty$

Begrænsede delmængder af $\mathbf{R}^n$ og følger

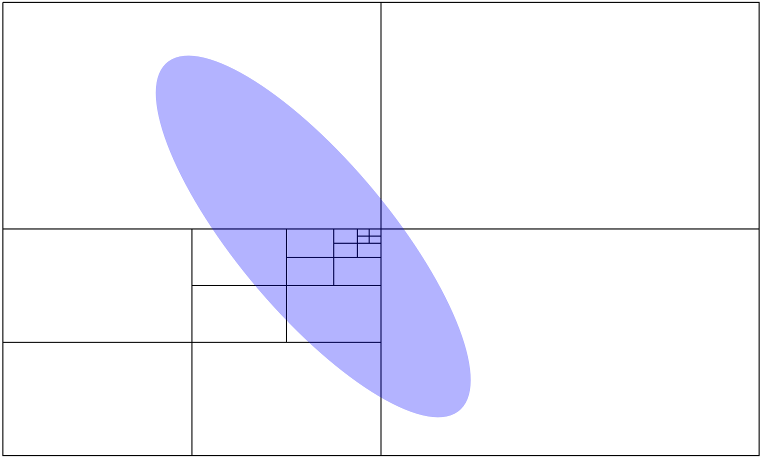
A begrænset $\iff$ Enhver følge i A har en konvergent delfølge

Bevis.

$\Longrightarrow$: Da $\mathrm{diam}(A)$ er endelig findes delmængder

$$A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_j \supseteq \cdots$$

så $x^{-1}(A_j)$ er uendelig og $\mathrm{diam}(A_j) \to 0$ for $j \to \infty$. Vælg delfølge med $x_{k_j} \in A_j$. Iflg det Almindelige Konvergensprincip er x_{k_j} konvergent.
$\Longleftarrow$: Hvis A ikke er begrænset, så findes en følge $x : \mathbf{N} \to A$ med $|x_k| \to \infty$ for $k \to \infty$. $\square$



$$x \in \mathrm{cl}(A) \iff \forall r > 0\colon B(x;r) \cap A \neq \emptyset$$
$$A \text{ er afsluttet} \iff \mathrm{cl}(A) \subseteq A$$

Karakterisering af afslutningen ved følger

$x \in \mathrm{cl}(A) \iff x = \lim x_k$ for en følge x_k i A

Afslutningen af en delmængde A af $\mathbf{R}^n$

$$\mathrm{cl}(A) = \{\lim_{k\to\infty} x_k \mid (x_k) \text{ følge i } A\}$$

består af grænsepunkter for følger i A.

Afsluttede delmængder af $\mathbf{R}^n$ og følger

A afsluttet $\iff$
A indeholder grænserne for alle konvergente følger i A

K er kompakt $\iff$ K er afsluttet og begrænset

Kompakte delmængder af $\mathbf{R}^n$ og følger

K er kompakt $\iff$
Enhver følge i K har en konvergent delfølge med grænse i K

Bevis.

$\Longrightarrow$: Lad x_k være en følge i K. Da K er *begrænset*, har x_k en konvergent delfølge x_{k_j}. Da K er *afsluttet*, vil $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} \in K$.
$\Longleftarrow$: Da enhver følge i K har en konvergent delfølge, er K *begrænset*. Da enhver konvergent følge i K har grænse i K, er K *afsluttet*. □

Kontinuerte funktioner $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ og følger

Følgende betingelser er ækvivalente:

1. f er kontinuert
2. $f^{-1}(V) \subseteq \mathbf{R}^n$ er åben for enhver åben $V \subseteq \mathbf{R}^m$
3. $f^{-1}(F) \subseteq \mathbf{R}^n$ er afsluttet for enhver afsluttet $F \subseteq \mathbf{R}^m$
4. Enhver konvergent følge x_k, med grænse x_0, har et f-billede, som er konvergent med grænse $f(x_0)$
5. Enhver konvergent følge x_k, med grænse x_0, har en delfølge x_{k_j}, hvis f-billede er konvergent med grænse $f(x_0)$

Beviser

En kontinuert funktion sender konvergente følger i konvergent følger og grænsepunkter i grænsepunkter: $f(\lim x_k) = \lim f(x_k)$.

Kompakte delmængder af $\mathbf{R}^n$ og kontinuerte funktioner

$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq \mathbf{R}^n \text{ kompakt} \\ f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \text{ kontinuert} \end{array}\right\} \implies f(K) \text{ kompakt}$$

Bevis.

Lad y_k være en følge i $f(K)$. Vælg x_k i K så $y_k = f(x_k)$. Da K er kompakt, findes en konvergent delfølge x_{k_j}, $j \in \mathbf{N}$. Da f er kontinuert er billedfølgen $f(x_{k_j}) = y_{k_j}$ konvergent. Det er en konvergent delfølge af y_k med grænse i $f(K)$. $\square$

Kompakte delmængder af $\mathbf{R}$

En kompakt delmængde $K \neq \emptyset$ af $\mathbf{R}$ har et maksimum og et minimum: $\max(K) = \sup(K) \in K$, $\min(K) = \inf(K) \in K$.

Kurvesammenhængende mængder

$A \subseteq \mathbf{R}^n$ er kurvesammenhængende hvis der for alle par af punkter a_0, a_1 i A findes en kontinuert kurve $\sigma\colon [0,1] \to A$ som forbinder $\sigma(0) = a_0$ med $\sigma(1) = a_1$.

Kurvesammenh. mængder og kontinuerte funktioner

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \mathbf{R}^n \text{ kurvesammenh.} \\ f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \text{ kontinuert} \end{array}\right\} \implies f(A) \text{ kurvesammenh.}$$

Ekstremværdisætningen

En kontinuert reel funktion $f\colon K \to \mathbf{R}$ på en kompakt mængde $K \subseteq \mathbf{R}^n$ har et minimums- og et maksimumspunkt: Der findes punkter $m \in K$ og $M \in K$ så

$$\min f(K) = f(m) \leq f(x) \leq f(M) = \max f(K)$$

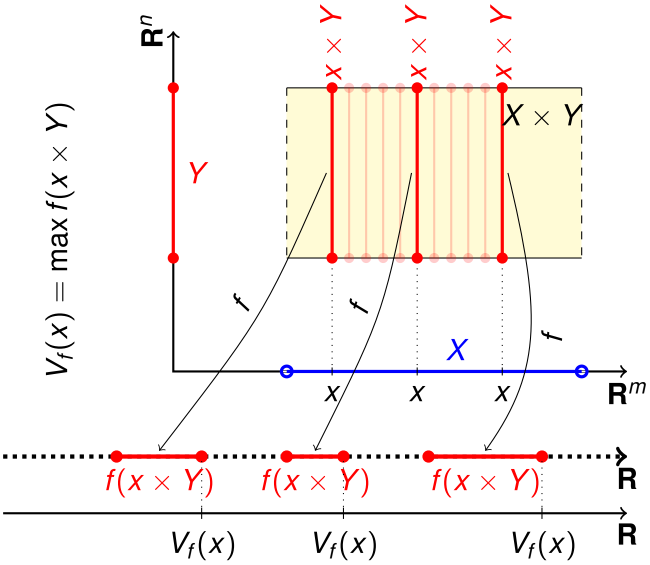
for alle $x \in K$. Hvis K også er kurvesammenhængende, så er $f(K) = [f(m), f(M)]$ et afsluttet og begrænset interval.

Kontinuitet af ekstremværdifunktionen (Claude Berge)

$X \subseteq \mathbf{R}^m$, $K \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt
$f\colon X \times K \to \mathbf{R}$ kontinuert

$V_f(x) = \max_{y \in K} f(x, y)$
$V_f\colon X \to \mathbf{R}$ er kontinuert

▸ Bevis for kontinuitet af ekstremværdifunktion


$V_f(x) = \max f(x \times Y)$
$\mathbf{R}^n$
Y
$x \times Y$
$x \times Y$
$x \times Y$
$X \times Y$
f
f
f
X
x
x
x
$\mathbf{R}^m$
$f(x \times Y)$
$f(x \times Y)$
$f(x \times Y)$
$\mathbf{R}$
$V_f(x)$
$V_f(x)$
$V_f(x)$
$\mathbf{R}$

Min første økonomiske model

- I et produkt indgår m råvarer til priser $(s_1, \dots, s_m)$;
- Produktets salgspris er r;
- Ved produktionsmønster $(y_1, \dots, y_m)$, $0 \leq y_i \leq K_i$, fremstilles $g(y_1, \dots, y_m)$ enheder af produktet;

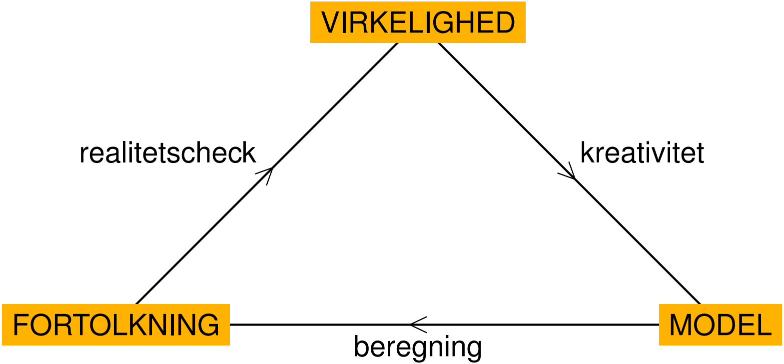
Fortjenesten ved produktionen er

$$f(r, s_1, \dots, s_m, y_1, \dots, y_m) = rg(y_1, \dots, y_m) - \sum_{i=1}^{m} s_i y_i$$

Den maksimale fortjeneste (som findes!)

$$V_f(r, s_1, \dots, s_m) = \max_{0 \leq y_i \leq K_i} f(r, s_1, \dots, s_m, y_1, \dots, y_m)$$

varierer kontinuert med salgspris og råvarepriser.


VIRKELIGHED
realitetscheck
kreativitet
FORTOLKNING
MODEL
beregning

Bevis for forbindelsen mellem kontinuitet og følger

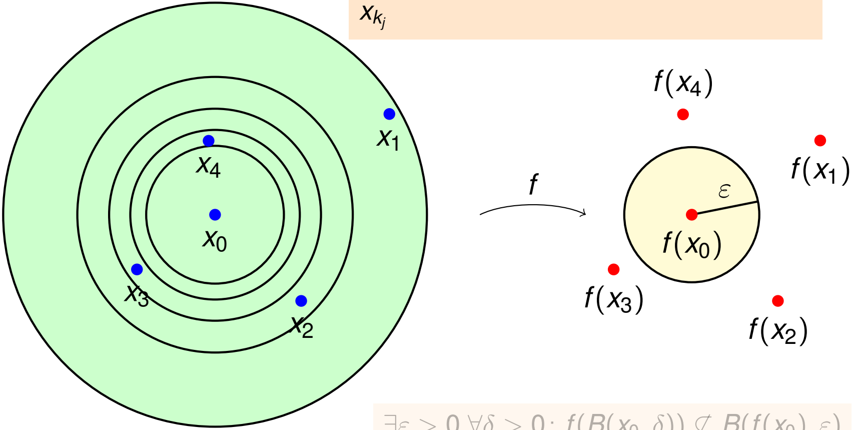
Det er klart at (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5).
(5) $\Longrightarrow$ (1): Hvis f *ikke* kontinuert, så findes et $x_0 \in \mathbf{R}^n$ og et $\varepsilon > 0$ så

$$\forall k > 0 \; \exists x_k \in B(x_0; 1/k) \colon \; f(x) \notin B(f(x_0); \varepsilon)$$

Følgen x_k er konvergent med grænse x_0 og ingen delfølge af x_k har et billede der konvergerer mod $f(x_0)$.

◂ Kontinuitet og følger

Hvis f *ikke* er kontinuert i x_0 så findes en følge $x_k \to x_0$ så $f(x_k) \not\to f(x_0)$; faktisk så $f(x_{k_j}) \not\to f(x_0)$ for delfølger x_{k_j}



$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \colon f(B(x_0, \delta)) \not\subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

Bevis for at ekstremværdifunktionen er kontinuert

Givet konvergent følge i X, $x_k \to x_0$ for $k \to \infty$. Vi skal finde en delfølge x_{k_j} så $V_f(x_{k_j}) \to V_f(x_0)$ for $j \to \infty$.
Vælg $y_k \in Y$ så $f(x_k, y_k) = V_f(x_k)$ Kompakte mængder og følger. Da Y er kompakt, findes konvergent delfølge y_{k_j} med grænse i Y. Lad os sige $y_{k_j} \to y_0$ for $j \to \infty$ Kontinuitet og følger.
For ethvert $y \in Y$ er $f(x_{k_j}, y) \leq f(x_{k_j}, y_{k_j})$ og dermed er

$$f(x_0, y) = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}, y) \leq \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}, y_{k_j}) = f(x_0, y_0) \leq V_f(x_0)$$

Altså er

$$V_f(x_0) = \max_{y\in Y} f(x_0, y) \leq \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}, y_{k_j}) \leq V_f(x_0)$$

eller $V_f(x_0) = \lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}, y_{k_j}) = \lim_{j\to\infty} V_f(x_{k_j})$.

Kontinuitetsquiz

Lad $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ være en kontinuert funktion, $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $B \subseteq \mathbf{R}^m$. Rigtigt eller forkert?

1. A begrænset $\implies$ $f(A)$ begrænset
2. A afsluttet $\implies$ $f(A)$ afsluttet
3. A afsluttet og begrænset $\implies$ $f(A)$ afsluttet og begrænset
4. A åben $\implies$ $f(A)$ åben
5. B begrænset $\implies$ $f^{-1}(B)$ begr.
6. B afsluttet $\implies$ $f^{-1}(B)$ afsluttet
7. B afsluttet og begrænset $\implies$ $f^{-1}(B)$ afsluttet og begrænset
8. B åben $\implies$ $f^{-1}(B)$ åben
9. $f^{-1}(f(A)) = A$ og $f(f^{-1}(B)) = B$

Eksempel 8.5: Eksistens af optimal produktionsstrategi og kontinuitet af værdifunktionen