MASO Uge 5

Topologi i euklidiske rum

Jesper Michael Møller

Department of Mathematics
University of Copenhagen

Uge 5

Formålet med MASO

Oversigt

Åben kugle

Den åbne kugle med centrum $a \in \mathbf{R}^n$ og radius $r > 0$ er

$$B(a;r) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x - a| < r\}$$

Åbne og afsluttede mængde

$A \subseteq \mathbf{R}^n$ er

åben hvis A er en forening af åbne kugler

afsluttet hvis komplementet $\mathbf{R}^n - A$ er åbent

$$A \text{ er åben} \iff \mathbf{R}^n - A \text{ er afsluttet}$$
$$A \text{ er åben} \iff \forall a \in A \exists r > 0 \colon B(a;r) \subseteq A$$
$$A \text{ er afsluttet} \iff \forall a \notin A \exists r > 0 \colon B(a;r) \subseteq \mathbf{R}^n - A$$

Åben kasse

En åben kasse i $\mathbf{R}^m$ er en delmængde af formen $U_1 \times \cdots \times U_m$ hvor $U_1, \ldots, U_m$ er åbne intervaller i $\mathbf{R}$.

Enhver åben kasse er en forening af åbne kugler og enhver åben kugle er en forening af åbne kasser. Derfor kan kugler erstattes med kasser.

Åbne mængder

Følgende betingelser er ækvivalente for $A \subseteq \mathbf{R}^n$:

- A er åben
- A er en forening af åbne kugler
- A er en forening af åbne kasser

Det indre, ydre, afslutningen og randen af A

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup\{U \text{ åben} \mid U \subseteq A\} \text{ (indre af A)}$$

$$\operatorname{ext}(A) = \operatorname{int}(\mathbf{R}^n - A) = \bigcup\{U \text{ åben} \mid U \subseteq \mathbf{R}^n - A\} \text{ (ydre af A)}$$

$$\partial(A) = \mathbf{R}^n - (\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{ext}(A)) = \mathbf{R}^n - (\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(\mathbf{R}^n - A))$$

$$\operatorname{cl}(A) = \bigcap\{F \text{ afsluttet} \mid F \supseteq A\} \text{ (afslutningen af } A)$$

1. $\mathbf{R}^n = \operatorname{int}(A) \cup \partial(A) \cup \operatorname{ext}(A)$ (disjunkt forening)
2. $\operatorname{int}(\mathbf{R}^n - A) = \mathbf{R}^n - \operatorname{cl}(A) = \operatorname{ext}(A)$ (indre af komplementet)
3. $\operatorname{cl}(\mathbf{R}^n - A) = \mathbf{R}^n - \operatorname{int}(A)$ (afslutningen af komplementet)
4. $\partial(\mathbf{R}^n - A) = \partial(A)$ (randen af komplementet)
5. $\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \operatorname{cl}(A)$
6. $\operatorname{int}(A)$ og $\operatorname{ext}(A)$ er åbne
7. $\operatorname{cl}(A)$ og $\partial(A)$ er afsluttede (komplementerne er åbne)
8. $\partial(A) = \operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{cl}(\mathbf{R}^n - A) = \operatorname{cl}(A) - \operatorname{int}(A)$
9. $\operatorname{cl}(A) = \operatorname{int}(A) \cup \partial(A)$

beviser

afslutningen af A

afslutningen af $\mathbf{R}^n - A$

$\mathrm{cl}(A)$

$\mathrm{cl}(\mathbf{R}^n - A)$

$$\mathbf{R}^n = \mathrm{int}(A) \cup \partial(A) \cup \mathrm{ext}(A)$$

det indre af A

randen af A

det ydre af A

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{int}(A) &\iff \exists r > 0\colon\ B(x,r) \subseteq A \\
x \in \mathrm{ext}(A) &\iff \exists r > 0\colon\ B(x,r) \cap A = \emptyset \\
x \in \partial(A) &\iff x \notin (\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{ext}(A)) \\
&\iff \forall r > 0\colon\ B(x,r) - A \neq \emptyset, \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset \\
x \in \mathrm{cl}(A) &\iff x \notin \mathrm{ext}(A) \iff \forall r > 0\colon\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset
\end{aligned}$$

Regneregler for åbne og afsluttede mængder

1. $A \subseteq B \Longrightarrow \operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B), \quad \operatorname{cl}(A) \subseteq \operatorname{cl}(B)$
2. A afsluttet $\iff A = \operatorname{cl}(A) \iff A \supseteq \operatorname{cl}(A) \iff A \supseteq \partial(A)$
3. A åben $\iff A = \operatorname{int}(A) \iff \mathbf{R}^n - A$ afsluttet $\iff \mathbf{R}^n - A \supseteq \partial(A) \iff A \cap \partial(A) = \emptyset$
4. Foreningsmængder af åbne mængder er åbne
5. Endelige fællesmængder af åbne mængder er åbne
6. Fællesmængder af afsluttede mængder er afsluttede
7. Endelige foreningsmængder af afsluttede mængder er afsluttede
8. Produkter af åbne mængder er åbne
9. Produkter af afsluttede mængder er afsluttede
$\mathbf{R}^{n+m} - (A \times B) = (\mathbf{R}^n - A) \times \mathbf{R}^m \cup \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^m - B)$

Begrænset mængde

$A \subseteq \mathbf{R}^n$ er begrænset hvis A er indeholdt i en kugle

Kompakt mængde

$K \subseteq \mathbf{R}^n$ er kompakt hvis K er afsluttet og begrænset.

Regneregler for kompakte mængder

- Fællesmængden af kompakte mængder er kompakt
- Foreningsmængden af endeligt mange kompakte mængder er kompakt
- Enhver afsluttet delmængde af en kompakt mængde er kompakt
- Produkter af kompakte mængder er kompakte

Kontinuert funktion

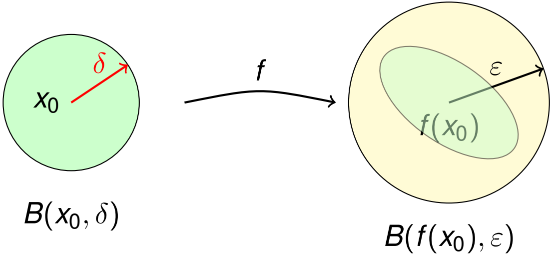
En funktion $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er kontinuert hvis løsningsmængden $f^{-1}(U) \subseteq \mathbf{R}^n$ er åben for enhver åben delmængde $U \subseteq \mathbf{R}^m$.

Ækvivalente betingelser for kontinuitet af $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$:

1. f er kontinuert
2. $f^{-1}(U) \subseteq \mathbf{R}^n$ er åben når $U \subseteq \mathbf{R}^m$ er åben
3. $f^{-1}(F) \subseteq \mathbf{R}^n$ er afsluttet når $F \subseteq \mathbf{R}^m$ er afsluttet
4. $f^{-1}B(y;r)$ er åben for enhver åben kugle $B(y;r)$ i $\mathbf{R}^m$
5. $f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_m)$ er åben for enhver åben kasse $U_1 \times \cdots \times U_m$ i $\mathbf{R}^m$.
6. For alle $x_0 \in \mathbf{R}^n$ og for alle $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ for alle $x \in \mathbf{R}^n$ med $|x - x_0| < \delta$
7. $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0\colon f(B(x_0;\delta)) \subseteq B(f(x_0);\varepsilon)$

Kontinuitet

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \ f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon))$$



Regneregler for kontinuerte funktioner

- Sammensætningen af kontinuerte funktioner er kontinuert
- cf, $f+g$, $f-g$ er kontinuerte hvis $f, g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er det
- $f \cdot g$, f/g er kontinuerte hvis $f, g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ er det

Projektioner er kontinuerte

Projektionerne $\pi_1, \ldots, \pi_n\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ er kontinuerte.

Koordinatfunktioner

$f = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ er kontinuert hvis og kun hvis alle koordinatfunktionerne $f_1, \ldots, f_m\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ er kontinuerte.

Brug $f_j = \pi_j \circ f$ og $f^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_m) = \bigcap_{j=1}^m f_j^{-1}(U_j)$.

Eksempel på en kontinuert funktion $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

Funktionen

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

er kontinuert. Løsningsmængden til et punkt,

$$f^{-1}(1) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} = \partial B(0; 1),$$

er afsluttet. Løsningsmængden til en åben mængde,

$$f^{-1}(]-\infty, 1[) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\} = B(0; 1),$$

er åben.

En ikke-kontinuert funktion $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

Lad A være en delmængde af $\mathbf{R}^n$ og $1_A \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.
Indikatorfunktionen for A

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

er 1 på A og 0 udenfor. Da

$$1_A^{-1}(]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[) = A, \qquad 1_A^{-1}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[) = \mathbf{R}^n - A$$

er f kun kontinuert hvis og kun hvis A er både åben og afsluttet, dvs $A = \emptyset$ eller $A = \mathbf{R}^n$.

Standard åbne og afsluttede mængder

Hvis $f_1, \dots, f_m$ er kontinuerte funktioner $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ og $b_1, \dots, b_m$ er reelle tal, så er

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid f_1(x) < b_1, \dots, f_m(x) < b_m\} = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(]-\infty, b_i[)$$

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid f_1(x) \leq b_1, \dots, f_m(x) \leq b_m\} = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(]-\infty, b_i])$$

åben, afsluttet.

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) < b_i\} &\subseteq \operatorname{int}(\{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) \leq b_i\}) \\
\operatorname{cl}(\{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) < b_i\}) &\subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) \leq b_i\} \\
\partial(\{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) < b_i\}) &\subseteq \{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) = b_i\}
\end{aligned}$$

2017A, Opg 4

Supremum og infimum af en funktion $f\colon A \to \mathbf{R}$

$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup f(A) = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$$
$$\inf_{x\in A} f(x) = \inf f(A) = \inf\{f(x) \mid x \in A\}$$

Regneregler. Se F1

- $A \subseteq B \implies \sup f(A) \le \sup f(B)$
- $\sup(f+g)(A) \le \sup f(A) + \sup g(A)$
- $\inf(f+g)(A) \ge \inf f(A) + \inf g(A)$
- $sup(\lambda f)(A) = \begin{cases} \lambda \sup f(A) & \lambda > 0 \\ -\lambda \inf f(A) & \lambda < 0 \end{cases}$
- $\sup f(A) = \sup_{i\in I} \sup f(A_i)$ hvis $A = \bigcup_{i\in I} A_i$
- $\sup f(A) = \sup\{\sup f(A \cap (x \times \mathbf{R}^n)) \mid x \in \mathbf{R}^m\}$, $A \subset \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$.

1. Klart
2. $\mathbf{R}^n - \mathrm{cl}(A) = \mathbf{R}^n - \bigcap\{F \mid F \text{ afsluttet}, F \supseteq A\} = \bigcup\{\mathbf{R}^n - F \mid \mathbf{R}^n - F \text{ åben}, \mathbf{R}^n - F \subseteq \mathbf{R}^n - A\} = \mathrm{int}(\mathbf{R}^n - A)$
3. $\mathbf{R}^n - \mathrm{int}(A) = \mathbf{R}^n - \bigcup\{U \mid U \text{ åben}, U \subseteq A\} = \bigcap\{\mathbf{R}^n - U \mid \mathbf{R}^n - U \text{ afsluttet}, \mathbf{R}^n - U \supseteq \mathbf{R}^n - A\} = \mathrm{cl}(\mathbf{R}^n - A)$
4. Både $\partial(\mathbf{R}^n - A)$ og $\partial(A)$ er $\mathbf{R}^n - (\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(\mathbf{R}^n - A))$
5. $\mathrm{int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{cl}(A)$ er klart
6. $\mathrm{int}(A)$ er en foreningsmængde af åbne mængder
7. $\mathrm{cl}(A)$ er en fællesmængde af afsluttede mængder
8. $\partial(A) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R}^n - (\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(\mathbf{R}^n - A)) \overset{(3)}{=} \mathrm{cl}(\mathbf{R}^n - A) \cap \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(A) - \mathrm{int}(A))$
9. $\mathrm{cl}(A) \overset{\text{klart!}}{=} \mathrm{int}(A) \cup (\mathrm{cl}(A) - \mathrm{int}(A)) \overset{(8)}{=} \mathrm{int}(A) \cup \partial(A)$

◂ tilbage til definition

Løsningsmængder for funktioner $f\colon X \to Y$

For $B \subseteq Y$ er $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Billed- og løsningsmængder

- $f\left(\bigcup U_j\right) = \bigcup f(U_j)$
- $f\left(\bigcap U_j\right) \subseteq \bigcap f(U_j)$
- $f(X - A) \supseteq f(X) - f(A)$
- $f^{-1}\left(\bigcup U_j\right) = \bigcup f^{-1}(U_j)$
- $f^{-1}\left(\bigcap U_j\right) = \bigcap f^{-1}(U_j)$
- $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
- $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

Hvis $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ kontinuert:

- $f^{-1}(\mathrm{int}(A)) \subseteq \mathrm{int}(f^{-1}(A))$
- $\mathrm{cl}(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(\mathrm{cl}(A))$
- $\partial(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(\partial(A))$

tilbage til kont fkt