MASO Uge 4

Komplekse tal

Jesper Michael Møller

Department of Mathematics
University of Copenhagen

Uge 4

Formålet med MASO

Oversigt

Problem

$x^2 + 1 = 0$ har ikke nogen løsning i **R**

De komplekse tal **C**

- De komplekse tal **C** er en en udvidelse af de reelle tal **R**
- Der er et komplekst tal i so $i^2 + 1 = 0$
- De komplekse tal er 2-dimensionale og ligger i en plan
- De komplekse tal har ikke nogen ordning $<$
- De komplekse tal har konjugering

Addition og multiplikation

Vi definerer addition og multiplikation med (a, b) til at være

$$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$$

$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- addition er vektor addition
- multiplikation med $(a, b) \neq (0, 0)$ er en drejning med (a, b)s vinkel efterfulgt af en radial skalering med (a, b)s længde.

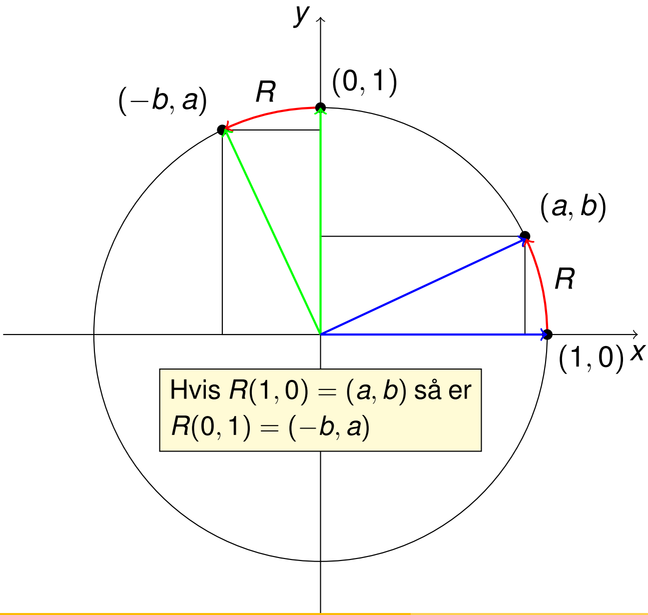
$$\boxed{(0,1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)}$$

Geometrisk betydning af multiplikation

Lad R være den drejning fulgt af radial skalering som sender $(1,0)$ i $R(1,0) = (a,b)$. Så er $R(0,1) = (-b,a)$ og

$$\begin{aligned} R(x,y) &= xR(1,0) + yR(0,1) \\ &= x(a,b) + y(-b,a) = (ax - by, bx + ay) \end{aligned}$$

Vi ser igen formlen for produktet af to komplekse tal.



Hvis $R(1,0) = (a,b)$ så er
$R(0,1) = (-b,a)$

Komplekse tal på standardform

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbf{R}, \qquad i^2 = -1$$

$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z), \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \arg(z) = \frac{y}{x}$$

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Potenser af i

$i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^{2k} = (-1)^k, i^{2k+1} = (-1)^k i$

Regning med komplekse tal

Alle regneregler for reelle tal som

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 & z_1 z_2 &= z_2 z_1 \\ z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 & z_1(z_2 z_3) &= (z_1 z_2) z_3 \\ z_1(z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

gælder også for komplekse tal.

Eksempel

$(3 + 2i) \cdot (1 - 4i) = 11 - 10i$, $(3 + i)^2 = 9 + 6i - 1 = 5 + 6i$

Complex numbers

Formler i **C**

Regneregler

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Lineært ligningsssytem

$$\begin{aligned} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 &= b_1 \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 &= b_2 \end{aligned} \iff z_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad z_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Endelig og uendelig kvotientrække i **C**

$$a + aq + \cdots + aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Kvotientrækken $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ er konvergent med sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} = a + aq + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q}$$

når $|q| < 1$ og divergent når $|q| > 1$ og $a \neq 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1+i}{2})^n = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1 - i$$

Regning med $\overline{z}$ og $|z|$

- $\overline{x+iy} = x - iy$
- $\overline{i} = -i$
- $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad |z^n| = |z|^n, \quad |\overline{z}| = |z|$
- $z\overline{z} = |z|^2$, $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)$
- $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad z^{-n} = \frac{\overline{z}^n}{|z|^{2n}}, \qquad z \neq 0, n \in \mathbf{N}$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (trekantsuligheden)
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1, \qquad z \neq 0$

trigonometric addition theorem

Polære koordinater

Komplekse tal i polære koordinater

z har polære koordinater $(\rho\colon\theta)$ betyder $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Multiplikation og konjugering i polære koordinater:

- $(\rho_1 : \theta_1) \cdot (\rho_2 : \theta_2) = (\rho_1\rho_2 : \theta_1 + \theta_2)$ (additionsformler!)
- $(\rho : \theta)^n = (\rho^n : n\theta)$, $n \in \mathbf{Z}$
- $(\rho : \theta)^{-1} = (\rho^{-1} : -\theta)$
- $\overline{(\rho : \theta)} = (\rho : -\theta)$

Transformation mellem cartesiske og polære koordinater

cartesiske koordinater	polære koordinater
$x + iy$	$(\rho : \theta)$
$x = \rho\cos\theta$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho\sin\theta$	$\theta = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & x > 0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & x < 0 \end{cases}$

- $(\rho : \theta) = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$
- $x + iy = (\sqrt{x^2 + y^2} : \arctan\frac{y}{x})$ når $x > 0$,
  $x + iy = (\sqrt{x^2 + y^2} : \pi + \arctan\frac{y}{x})$ når $x < 0$

Binomialformlen

$$
\begin{aligned}
(x+iy)^n &= \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k}(-1)^k x^{n-2k} y^{2k} \\
&\quad + i \sum_{0\le 2k+1\le n} \binom{n}{2k+1}(-1)^k x^{n-2k-1} y^{2k+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(1+i)^4 = -4 & \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
(\sqrt{3}+i)^3 = 8i & \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
(1+i\sqrt{3})^3 = -8 & \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{array}
$$

Løsning ligninger af grad 1

Hvis $a \neq 0$ så gælder

$$az + b = 0 \iff \bar{a}az + \bar{a}b = 0 \iff z = -\frac{\bar{a}b}{|a|^2}$$

$$\begin{aligned}
(2+3i)z + (1-2i) = 5 - i &\iff \\
(2+3i)z = 4 + i &\iff \\
(2-3i)(2+3i)z = (2-3i)(4+i) &\iff \\
13z = 11 - 10i &\iff \\
z = \frac{11}{13} - \frac{10}{13}i &
\end{aligned}$$

Kvadratroden af et komplekst tal $\sqrt{d}$

Ligningen $z^2 - 1 = 0$ har 2 løsninger

$$\sqrt{1} = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\} = \{-1, +1\}$$

Ligningen $z^2 - (\rho : \theta) = 0$, $\rho > 0$, har 2 løsninger

$$\sqrt{(\rho : \theta)} = \{z \in \mathbf{C} \mid z^2 = (\rho : \theta)\} = \pm(\sqrt{\rho} : \theta/2)$$

$$\sqrt{1} = \{-1, +1\}$$

$$\sqrt{-1} = \{-i, i\}$$

$$\sqrt{i} = \{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}\}$$

$$\sqrt{\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \{\pm(\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8))\}$$

$$\sqrt{2-3i} = \{\pm\sqrt[4]{13}e^{-\frac{i}{2}\mathrm{Arctan}(3/2)}\}$$

Løsning af ligninger af grad 2

$$z^2 + az + b = 0 \iff (z + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0 \iff$$
$$(z + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} - b \iff z + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \iff$$
$$z = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Ligningen $z^2 + z + 1 = 0$ har løsninger

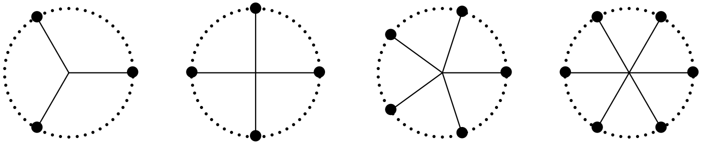
$$z = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3}) = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$$

Den $n$te rod $\sqrt[n]{d}$ af et komplekst tal d

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1} = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\} &= \{(1 : j\frac{2\pi}{n}) \mid j = 0, 1, \ldots, n-1\} \\ &= \{\cos(j\frac{2\pi}{n}) + i\sin(j\frac{2\pi}{n}) \mid j = 0, 1, \ldots, n-1\}\end{aligned}$$

Ligningen $z^n - d = 0$, $d \neq 0$, har n løsninger for alle $n \in \mathbf{N}$

$$\sqrt[n]{(\rho : \theta)} = \sqrt[n]{1} \cdot (\sqrt[n]{\rho} : \theta/n)$$



Algebraens fundamentalsætning for komplekse polynomier

For ethvert (normeret) komplekst polynomium af grad $n \geq 1$

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

findes n komplekse tal $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ så

$$P(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$$

Rødder i polynomier af grad n

Der findes formler med rodtegn for rødderne i polynomier af grad $n \leq 4$ – men ikke for grad $n > 4$! [1, 3.9.5] Galois theory

Algebraens fundamentalsætning for reelle polynomier

For ethvert (normeret) reelt polynomium af grad $n \geq 1$

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

findes u reelle tal, $\alpha_1, \ldots, \alpha_u$ og $2v$ reelle tal $\beta_1, \ldots, \beta_v$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_v$ så $u + 2v = n$ og

$$P(x) = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_u)(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)\cdots(x^2 + \beta_v x + \gamma_v)$$

hvor polynomierne $x^2 + \beta_j x + \gamma_j$, $1 \leq v$, er uden reelle rødder.

$x^3 - x^2 + 2 = (x + 1)(x^2 - 2x + 2)$
$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 4x + 5)$
$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

Polynomier

Polynomiers division

Lad $P(x)$ og $D(x)$ være to polynomier ($D(x)$ er ikke nulpolynomiet). Der findes et polynomium $Q(x)$ og et polynomium $R(x)$ så

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x), \qquad \deg R(x) < \deg D(x)$$

Polynomiet $P(x)$ har tallet r som rod hvis og kun hvis

$$P(x) = (x - r)Q(x)$$

for et polynomium $Q(x)$.

Polynomiers division

Polynomier

Rational rod Sætningen

Lad

- $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ være et polynomium med heltalskoefficienter $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbf{Z}$
- p of q være hele tal, $q \neq 0$, så brøken $\frac{p}{q}$ ikke kan forkortes

Hvis $\frac{p}{q}$ er rod i $P(x)$, så vil p gå op i a_0 og q vil gå op i a_n.

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$
$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Faktorisering af polynomiet $x^3 - x^2 + 2$

De eneste mulige rationale rødder i $x^3 - x^2 + 2$ er $\pm 1, \pm 2$. Faktisk er -1 en rod. Ved polynomiers division finder vi

$$x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$$

Kvotienten $x^2 - 2x + 2$ har ingen reelle rødder. De komplekse rødder er

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = 1 + \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

og derfor er

$$x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x-1+i)(x-1-i)$$

Test dig selv

- Opgave 2 2010A (Løsning)
- Opgave 2 2011A (Løsning)
- Løs ligningen $z^2 + (1 + i)z + 2i = 0$

Trigonometriske additionsformler

$$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha, i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

de Moivres formler

For alle naturlige tal $n \in \mathbf{Z}$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

og derfor er

$$\cos(n\theta) = \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \cos^{n-2k-1}\theta \sin^{2k+1}\theta$$

Referencer

Victor P. Snaith, *Groups, rings and Galois theory*, second ed., World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2003. MR 2016279 (2004i:12001)