MASO Uge 2 & 3

Rækker

Jesper Michael Møller

Department of Mathematics
University of Copenhagen

Uge 2 og 3

Formålet med MASO

Oversigt

Hvad er en uendelig række?

Følge: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
Række: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
Rækkens afsnitsfølge: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$

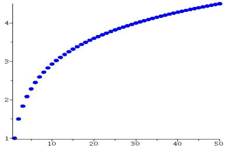
Konvergente og divergente rækker

- Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent hvis afsnitsfølgen s_n er konvergent
- Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent hvis afsnitsfølgen s_n er divergent

Summen af en konvergent uendelig række er

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Den harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

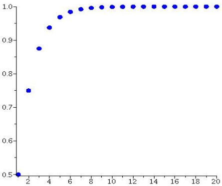


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots = \infty$$

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \\ &\geq 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Kvotientrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$: Når sneglen Zenon frem?



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$$

fordi afsnitsfølgen

$$s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, s_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \ldots, s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots$$

har grænseværdien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (1 - 2^{-n}) = 1$$

Hvilke rækker er konvergente og hvilke er divergente?

Hurtig test for konvergens af en række

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ er konvergent} \implies a_n \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

$$a_n \not\to 0 \text{ for } n \to \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ er divergent}$$

Man kan ikke vende $\implies$. Feks er $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Regneregler for konvergente rækker

Hvis rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergente, så er

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($c \in \mathbf{R}$ er en konstant)

Eksempel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1/3}{1-1/3} + \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Kvotientrækker

$$(1-q)(a+aq+aq^2+\cdots+aq^N)=a-aq^{N+1}=a(1-q^{N+1})$$

$$(1-q)(a+aq+aq^2+\cdots)=a$$

$$\sum_{n=0}^{N} aq^n=\frac{a}{1-q}(1-q^{N+1})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} aq^n=\lim_{N\to\infty}\frac{a}{1-q}(1-q^{N+1})\overset{0\le q<1}{=}\frac{a}{1-q}$$

- $0,581581581\ldots=0,581+0,000581+\cdots=\frac{0{,}581}{1-0{,}001}=\frac{581}{999}$
- $0,9999\ldots=0,9+0,09+\cdots=\frac{0{,}9}{1-0{,}1}=\frac{0{,}9}{0{,}9}=1$
- $\frac{1}{0{,}9}=\frac{1}{1-0{,}1}=1+0,1+0,01^2+\cdots=1,111\ldots$

Værdi af annuitetsbetalingsrække med fast rente r

Nuværende værdi af udbetaling A om n år er

$$\frac{A}{(1+r)^n}$$

Værdien af udbetaling A om $n = 1, 2, \ldots, N$ år er

$$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+r)^N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{A}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^N}\right)$$

Værdien af udbetaling A om $n = 1, 2, \ldots$ år er

$$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{A}{r}$$

Definition

En række med positive led er en række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hvor $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbf{N}$.

En række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ med positive led

- har en voksende afsnitsfølge $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \cdots + a_n$
- er konvergent hvis og kun hvis afsnitsfølgen er opad begrænset. (Se 'Voksende Følger' i F1)

Summen af en uendelig række med positive led

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j = \sup\{\sum_{j\in E} a_j \mid E \subset \mathbf{N} \text{ endelig}\}$$

$$= \text{mindste tal} \geq \text{alle endelige delsummer} \sum_{j\in E} a_j$$

Omordning af leddene

I en række med positive led kan man permutere leddene uden at ændre rækkens sum.

Parenteser

I en række med positive led kan man sætte eller hæve parenteser uden at ændre rækkens sum.

$0 = 1$

Lad $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være to rækker.

Sammenligningskriteriet

appendix

Antag $a_n \leq b_n$ fra et vist trin.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent

Grænseværdi-sammenligningskriteriet

Antag ($b_n > 0$ og) $\frac{a_n}{b_n} \to c$ for $n \to \infty$ hvor $0 < c < \infty$.

$$\sum a_n \text{ er konvergent } \iff \sum b_n \text{ er konvergent}$$

$$\sum a_n \text{ er divergent } \iff \sum b_n \text{ er divergent}$$

Kvotientkriteriet

appendix

1. Hvis der findes et $q < 1$ så $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ fvt (fra vist trin) så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent
2. Hvis $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ fvt så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent

Grænseværdi-kvotientkriteriet

Antag at $a_{n+1}/a_n \to q$ for $n \to \infty$.

$q < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent

$q = 1$??? ($\sum \frac{1}{n}$ og $\sum \frac{1}{n^2}$ har begge $q = 1$)

$q > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent

Rodkriteriet

appendix

1. Hvis der findes et $k < 1$ så $\sqrt[n]{a_n} \leq k$ fvt så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent
2. Hvis $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ for uendeligt mange n så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent

Grænseværdi-rodkriteriet

Antag at $\sqrt[n]{a_n} \to k$ for $n \to \infty$.

$k < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent

$k = 1$??? ($\sum \frac{1}{n}$ og $\sum \frac{1}{n^2}$ har begge $k = 1$).

$k > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er divergent

Hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ så er $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$: Rod $\implies$ Kvotient

Vurdering af sum med Kvotientkriteriet

Antag at der findes et $q < 1$ så $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ for all $n > N$.

Vurdering af $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_1 + \cdots + a_N + a_{N+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + \cdots + a_N + \frac{a_{N+1}}{1-q}$$

fordi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_{N+1} q^n = \frac{a_{N+1}}{1-q}$$

Eksempel på vurdering af sum

Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$ er konvergent (feks) iflg Kvotientkriteriet da $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n n}{2^{n+1} n+1} = \frac{1}{2} \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ for alle n. Med $s_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2^n n}$ er

$$s_{10} + a_{11} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} \leq s_{10} + 2a_{11}$$

og det giver

$$0,69310 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} \leq 0,69315$$

Den rigtige værdi er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} = \ln(2) = 0,69314\ldots$$

Et integral

Lad $f(x)$ være en positiv (aftagende) kontinuert funktion.
Integralet

$$\int_N^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_N^x f(t)\,dt$$

tolkes som arealet mellem grafen og den vandrette akse regnet fra N og ud i uendelig.

Integralet $\int_N^\infty \frac{1}{t^a}\,dt$ for $N \geq 1$ og $a \geq 0$

$$\int_N^\infty \frac{1}{t^a}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{(a-1)N^{a-1}} & a > 1 \\ \infty & a \leq 1 \end{cases}$$

Integralkriteriet $f\colon [1,\infty[\to [0,\infty[$ aftagende kontinuert

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \iff \int_1^{\infty} f(t)dt < \infty$$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(t)dt \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N}^{\infty} f(t)dt$$

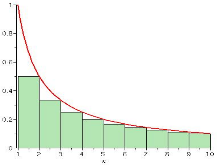
Rækkerne $\sum \frac{1}{n^a}$ for $a \in \mathbf{R}$

bevis

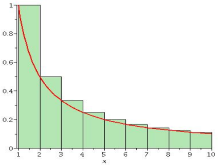
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ konvergent} \iff a > 1$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^a} + \frac{1}{(a-1)(N+1)^{a-1}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^a} + \frac{1}{(a-1)N^{a-1}}$$

Over- og undersummer



$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{N}^{\infty} f(t)dt$$



$$\int_{N}^{\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n)$$

$$f(N+1) + f(N+2) + \cdots \leq \int_{N}^{\infty} f(t)dt \leq f(N) + f(N+1) + \cdots$$

$$\int_{N+1}^{\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{N}^{\infty} f(t)dt$$

Hvor tæt er $s_N = \sum_{n=1}^{N} f(n)$ på $s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$?

$$s_N + \int_{N+1}^{\infty} f(t)\,dt \leq s_\infty \leq s_N + \int_{N}^{\infty} f(t)\,dt$$

fordi

$$s_\infty - s_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)$$

▸ eksempel

Eksempel på fejlestimat med Integralkriteriet

Hvor tæt er $s_{10} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2}$ på $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

Da $\int_N^\infty \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{N}$ er

Eks 2011*A*, Opg 1

$$s_{10} + \frac{1}{11} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq s_{10} + \frac{1}{10}$$

Det giver vurderingen

$$1,640 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1,649$$

Det rigtige tal er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1,644\ldots$$

teori

Appendix

Teleskop-sum og harmoniske tal $H_a = \sum_{n=1}^{a} \frac{1}{n}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n(n+a)} = H_a} \qquad a = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$$

$$s_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} + \cdots + \frac{1}{n+a}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{a} + \frac{1}{1+a} + \cdots + \frac{1}{n}\right) -$$

$$\left(\frac{1}{1+a} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{1+n} + \cdots + \frac{1}{n+a}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{a}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+a}\right)$$

Anvendelse af sammenligningskriteriet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

er konvergent efter Grænseværdi-sammenligningskriteriet fordi

$$\frac{1/n^2}{1/n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} \to 1 \text{ for } n \to \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$$

er divergent efter Grænseværdi-sammenligningskriteriet da $\lim_{n\to\infty} \frac{n/1+n^2}{1/n} = 1$.

Anvendelse af sammenligningskriteriet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

er divergent efter Sammenligningskriteriet fordi $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ og den harmoniske række er divergent.
Comparison test

Anvendelse af sammenligningskriteriet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$$

konvergent efter Sammenligningskriteriet fordi

$$\frac{\sqrt{n}}{1+n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Anvendelse af kvotientkriteriet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

er konvergent efter Kvotientkriteriet fordi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2} \text{ for } n \to \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$$

kan ikke afgøres med Kvotientkriteriet da $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Ratio test

Anvendelse af kvotientkriteriet

Kvotienkriteriet giver konvergens for de to rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \geq 0, \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad 0 < x < 1,$$

da $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0$ og $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} n}{(n+1) x^n} = x < 1$.

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ så $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

Anvendelse af rodkriteriet

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{100} x^n, \qquad 0 \leq x < 1,$$

er konvergent efter Rodkriteriet fordi

$$\sqrt[n]{n^{100} x^n} = x \sqrt[n]{n^{100}} = x \sqrt[n]{n}^{100} \to x 1^{100} = x \text{ for } n \to \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^n$$

er konvergent efter Rodkriteriet fordi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^n} = 0$.

Root test

Anvendelse af integralkriteriet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n^3}$$

er er konvergent efter Integralkriteriet fordi

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2 + t^3} dt = \left[\ln(1 + \frac{1}{t}) - \frac{1}{t} \right]_1^{\infty} = 1 - \ln(2) < \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

er er divergent efter Integralkriteriet fordi $\int \frac{1}{t \ln(t)} dt = \ln(\ln(t))$.
Integral test

Anvendelse af integralkriteriet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

er konvergent hvis og kun hvis $a > 1$.

$a \leq 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ divergent ifølge Sammenligningskriteriet fordi $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent

$a > 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konvergent ifølge Integralkriteriet fordi

$$\int_1^N \frac{1}{t^a} dt = \frac{1}{1-a} [t^{1-a}]_1^N = \frac{1}{1-a} (N^{1-a} - 1)$$

konvergerer for $N \to \infty$.

Integralkriteriet

Anvendelse af sammenlignings- og integralkriterier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

er konvergent efter Sammenligningskriteriet fordi

$$\frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

eller efter Integralkriteriet fordi

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}(\ln(t)+1) \right]_1^{\infty} = 1 < \infty$$

Eksempel

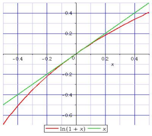
Hvis $a_n \to k$ *for* $n \to \infty$ *hvor* $k < 1$ *(og* $a_n \geq 0$*) så er*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$$

er konvergent efter Rodkriteriet *da* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n^n} = \lim_{n\to\infty} a_n = k$.

Eksempel

Hvis $\sum a_n$ *er konvergent (og* $a_n \geq 0$*) så er*



$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$$

konvergent efter Sammenligningskriteriet *fordi* $\ln(1 + a_n) \leq a_n$.

Eulers produkt formel (1737)

$$
\begin{aligned}
&\prod_{p \text{ primtal}} \frac{1}{1-(1/p)^s} \\
&= \frac{1}{1-(1/2)^s} \cdot \frac{1}{1-(1/3)^s} \cdot \frac{1}{1-(1/5)^s} \cdot \frac{1}{1-(1/7)^s} \cdots \\
&= (1+(1/2)^s+(1/2^2)^s+\cdots)(1+(1/3)^s+(1/3^2)^2+\cdots)\cdots \\
&= 1+(1/2)^s+(1/3)^s+(1/2^2)^s+(1/5)^s+(1/(2\cdot 3))^s+\cdots \\
&= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}
\end{aligned}
$$

Riemanns ζ-funktion

Værdier af ζ-funktionen $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ for $s = 2, 4, 6, 8$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}$$

Riemann hypotesen (mere info her)

Vis at

$$\sum_{d|n} d < H_n + \exp(H_n)\ln(H_n), \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Alternerende rækker (Alternating series)

Leibniz' kriterium for alternerende rækker

Hvis

- a_n er en aftagende følge af positive tal
- $a_n \to 0$ for $n \to \infty$

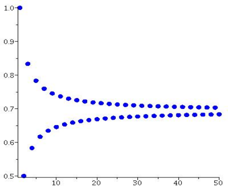
så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konvergent.

Fordi

1. $s_{2k} = s_{2k-1} - a_{2k} \leq s_{2k-1}$
2. $s_{2k+2} = s_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq s_{2k}$ (aftagende følge)
3. $s_{2k+3} = s_{2k+1} - (a_{2k+2} - a_{2k+3}) \leq s_{2k+1}$ (voksende følge)

$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2k} \leq s_{2k-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1$
$\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} - \lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty}(s_{2k+1} - s_{2k}) =$
$\lim a_{2k+1} = 0.$

Den *alternerende* harmoniske række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \ln(2)$$

Omordning af leddene: $\frac{1}{2}\ln(2) = \ln(2)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ln(2) &= \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\cdot(2-1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}) - \cdots \\
+ - - \quad &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots
\end{aligned}$$

Parenteser: $0 = 1$

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\
&= (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots \\
&= 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \\
&= 1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \cdots \\
&= 1 + 0 + 0 + \cdots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Advarsel

Summen af en uendelig række kan ændre sig hvis man bytter om på leddene eller sætter/hæver parenteser!