MASO Uge 11

Lineær optimering

Jesper Michael Møller

Department of Mathematics
University of Copenhagen

Uge 46, 2010

Formålet med MASO

Oversigt

1. Generelle lineære programmer
   - Dualitetssætningen
2. Kanoniske og standard lineære programmer

Definition

Et generelt lineært program er et optimeringsproblem (P) som går ud på at optimere en lineær objektfunktion f under lineære bibetingelser givet ved ligheder eller uligheder.

Definition

- En mulig løsning er en vektor x som opfylder alle bibetingelser i (P)
- Den optimale værdi $\sup(P)$ af et maksimeringsproblem (P) er $\sup f(x)$ taget over alle mulige løsninger x
- En optimal løsning til et maksimeringsproblem (P) er en mulig løsning x^* så $f(x^*) = \sup(P)$
- Den optimale værdi $\inf(P)$ af et minimeringsproblem (P) er $\inf f(x)$ taget over alle mulige løsninger x
- En optimal løsning til et minimeringsproblem (P) er en mulig løsning x^* så $f(x^*) = \inf(P)$

Antagelser

- $I^* \subseteq I = \{1, \ldots, m\}$
- $J^* \subseteq J = \{1, \ldots, n\}$
- A er en $(I \times J)$-matrix
- b, y er I-søjlevektorer
- c, x er J-søjlevektorer

Observationer

- $c^t x = \sum_{j \in J} c_j x_j$ er et tal
- $y^t b = \sum_{i \in I} y_i b_i$ er et tal
- $Ax = \left(\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \right)_{i \in I}$ er en I-søjlevektor
- $y^t A = \left(\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \right)_{j \in J}$ er en J-rækkevektor

Et generelt lineært maksimeringsprogram har formen

(P) Maksimér $c^t x$ under bibetingelser

$$[I^*]Ax \leq [I^*]b, [I - I^*]Ax = [I - I^*]b, [J^*]x \geq 0$$

og det duale program er

(P') Minimér $y^t b$ under bibetingelser

$$y^t A[J^*] \geq c^t[J^*], y^t A[J - J^*] = c^t[J - J^*], y^t[I^*] \geq 0$$

Example (Generelt lineært program)

(P) Maksimér $x_1 + 5x_2 - 2x_3$ under bibetingelserne

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Tableau for generelle lineære programmer

$$I^* = \{1, \dots, i\} \subseteq \{1, \dots, m\} = I$$
$$J^* = \{1, \dots, j\} \subseteq \{1, \dots, n\} = J$$

$$
\begin{array}{cc|cccccc|c}
 & & * & \dots & * & & & & \\
 & & x_1 & \dots & x_j & x_{j+1} & \dots & x_n & \\
\hline
* & y_1 & a_{11} & \dots & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} & \leq b_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
* & y_i & a_{i1} & \dots & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} & \leq b_i \\
 & y_{i+1} & a_{i+11} & \dots & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} & = b_{i+1} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & y_m & a_{m1} & \dots & a_{mj} & a_{mj+1} & \dots & a_{mn} & = b_m \\
\hline
 & & \geq c_1 & \dots & \geq c_j & = c_{j+1} & \dots & = c_n &
\end{array}
$$

Rækker: Bibetingelser i (P) Søjler: Bibetingelser i (P') 5cm

Dualitetssætningen

Netop én af følgende fire situationer vil altid gælde:

(I) (P) og (P') har optimale løsninger og $\sup(P) = \inf(P')$.

(II) $M(P) \neq \emptyset$, $M(P') = \emptyset$ og $\sup(P) = \infty$.

(III) $M(P) = \emptyset$, $M(P') \neq \emptyset$ og $\inf(P') = -\infty$

(IV) $M(P) = \emptyset$, $M(P') = \emptyset$

Følgende fem betingelser er ækvivalente:

1. (P) og (P') har optimale løsninger og $\sup(P) = \inf(P')$
2. $M(P) \neq \emptyset$ og $M(P') \neq \emptyset$
3. (P) har en optimal løsning
4. (P') har en optimal løsning
5. $M(P) \neq \emptyset$ og $\sup(P) < \infty$
6. $M(P') \neq \emptyset$ og $\inf(P') > -\infty$

Dualitetssætningen: Normaltilfældet (I)

Hvis $x \in M(P)$ og $y \in M(P')$ er mulige løsninger så er følgende betingelser ækvivalente:

1. x og y er optimale løsninger til (P) og (P')
2. $c^t x = \sup(P) = \inf(P') = y^t b$
3. $c^t x \geq y^t b$
4. $c^t x = y^t b$
5. $c^t x = y^t A x = y^t b$
6. $(c^t - y^t A)x = 0,\ y^t(Ax - b) = 0$
7. $(c_j - \sum_{i \in I} y_i a_{ij})x_j = 0,\ j \in J$, og $y_i(\sum_{j \in J} a_{ij} x_j - b_i) = 0,\ i \in I$
8. $(c_j - \sum_{i \in I} y_i a_{ij})x_j = 0,\ j \in J^*$, og $y_i(\sum_{j \in J} a_{ij} x_j - b_i) = 0,\ i \in I^*$
9. $\forall j \in J^* : x_j > 0 \implies \sum_{i \in I} y_i a_{ij} = c_j$,
   $\forall i \in I^* : y_i > 0 \implies \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$

Beviset for Dualitetssætningen anvender

Farkas' lemma

Netop et af følgende to tilfælde indtræffer:

(I) Der findes $x \in \mathbf{R}^n$ så $Ax = b$, $x \geq 0$.

(II) Der findes $y \in \mathbf{R}^m$ så $y^t A \geq 0$, $y^t b < 0$

Variant af Farkas' lemma

Netop et af følgende to tilfælde indtræffer:

(I) Der findes $x \in \mathbf{R}^n$ så $Ax \leq b$, $x \geq 0$.

(II) Der findes $y \in \mathbf{R}^m$ så $y^t A \geq 0$, $y^t b < 0$, $y \geq 0$.

Kanoniske lineære programmer

Et kanonisk lineært maksimeringsprogram har formen

(P) Maksimér $c^t x$ under bibetingelser $Ax = b$, $x \geq 0$

og det duale program har formen

$(\hat{P})$ Minimér $y^t b$ under bibetingelser $y^t A \geq c^t$

Basisløsninger for kanoniske programmer

Hvis (P) har en optimal løsning, så har (P) en optimal basisløsning x hvor de benyttede søjler

$$\{A[j] \mid j \in J, \, x_j > 0\}$$

er lineært uafhængige.

Generelt program $\to$ Kanonisk program

Det kanoniske program associeret til det generelle program (P)

$$(\mathrm{P}) \qquad \mathrm{Max} \begin{pmatrix} c \\ -[J - J^*]c \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix} \text{ under bibetingelser}$$

$$\begin{pmatrix} A & -A[J - J^*] & E[I^*] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ u \\ v \end{pmatrix} \geq 0$$

Her er $u = (u_j)_{j \in J - J^*}$, $v = (v_i)_{i \in I^*}$, $[J - J^*]c$ er $J - J^*$ rækkerne i c, $E[I^*]$ er I^*-søjlerne i $I \times I$ enhedsmatricen E, og $A[J - J^*]$ er $J - J^*$ søjlerne i A.

Standard lineære programmer

Et standard lineært maksimeringsprogram har formen

(P) Maksimér $c^t x$ under bibetingelser $Ax \leq b$, $x \geq 0$

og det duale minimeringsprogram er

(P') Minimér $y^t b$ under bibetingelser $y^t A \geq c^t$, $y^t \geq 0$

Generelt program $\rightarrow$ Standard program

Standard programmet associeret til det generelle program (P)

$$\text{Max} \begin{pmatrix} c \\ -[J - J^*]c \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \text{ under bibetingelser}$$

$$\begin{pmatrix} A & -A[J - J^*] \\ -[I - I^*]A & -[I - I^*]A[J - J^*] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ -[I - I^*]b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \geq 0$$

hvor $u = (u_j)_{j \in J - J^*}$.

Duale lineære standardprogrammer

(P) Maksimér $x_1 + x_2$ under bibetingelserne

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$

	x_1	x_2	
y_1	1	2	≤ 4
y_2	4	2	≤ 12
y_3	-1	1	≤ 1
	≥ 1	≥ 1	

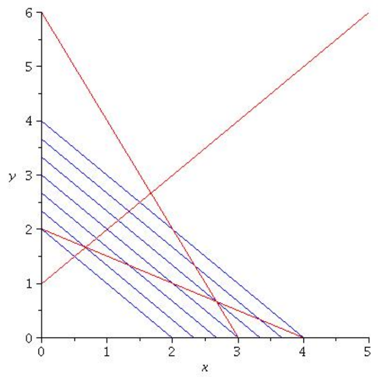
og $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

(P') Minimér $4y_1 + 12y_2 + y_3$ under bibetingelserne

$$y_1 + 4y_2 - y_3 \ge 1$$
$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1$$

og $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$.

Example (Lineært program på standardform)



(P) Maksimér $x_1 + x_2$ under bibetingelserne

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

og $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Mængden af mulige løsninger er et polyeder.
$(x_1^*, x_2^*) = (8/3, 2/3)$ er en optimal løsning og den optimale værdi er $\sup(P) = 8/3 + 2/3 = 10/3$.