MASO Uge 1

Relle tal
Følger

Jesper Michael Møller

Department of Mathematics
University of Copenhagen

1. oktober 2019

Oversigt

Mængder

- $\emptyset$
- $a \in A$, $b \notin A$
- $A \subseteq B$ betyder at alle elementer i A er elementer i B
- $A = B$ betyder at alle elementer i A er elementer i B og alle elementer i B er elementer i A

Intervaller

- $[a, b] = \{t \mid a \leq t \leq b\}$
- $]a, b] = \{t \mid a < t \leq b\}$
- $]a, b[= \{t \mid a < t < b\}$

Afbildninger

- $f\colon A \to B$ $A \ni a \xrightarrow{f} f(a) \in B$
- $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Regneregler for mængder

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$$

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

$$X - (X - A) = A$$

$$A \subseteq B \iff X - A \supseteq X - B$$

$$A \subseteq B \iff X = (X - A) \cup B$$

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ og } B \subseteq A$$

Regneregler i logik

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$
$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$
$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$
$$a \implies b = \neg(a \wedge \neg b) = \neg a \vee b = \neg b \implies \neg a$$
$$a \iff b = (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$$

Tal

N De naturlige tal $\{1, 2, 3, \dots\}$

Z De hele tal $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Q De rationale tal $\{\dots, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{233}{455}, \dots\}$

R De reelle tal $\{\dots, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{233}{455}, \pm\pi, \pm\sqrt{2} \dots\}$

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$$

Regneregler for reelle tal

De vigtigste regneregler er

addition $x + y = y + x, \qquad x + (y + z) = (x + y) + z$

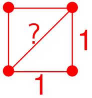
multiplikation $x \cdot y = y \cdot x, \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

samspil $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Q versus **R**

Hvad er galt med de rationale tal Q?

Ligningen $x^2 = 2$ har ikke nogen løsning! Diagonalen i et enhedskvadrat har ikke nogen længde i **Q**!



$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872421$$

er ikke korrekt!

Hvad er godt ved de reelle tal R?

Ligningen $x^2 = 2$ har en løsning!

De rationale tal ligger tæt i de reelle tal be vis

Ethvert reelt interval $]a, b[\subseteq \mathbf{R}$, $a < b$, indeholder et rationalt tal.

Største og mindste element: max og min

En mængde $A \subseteq \mathbf{R}$ har et største element hvis A har et element som er $\geq$ alle elementer i A.
Hvis M er største element i A skriver vi $\max(A) = M$.
Mindste element, $\min(A)$, defineres på tilsvarende måde.

Eksempel (Største eller mindste element findes ikke altid)

- *Intervallet* $[0, 1]$ *har et største element* $\max([0, 1]) = 1$
- *Intervallet* $[0, 1[$ *har ikke noget største element - hvad skulle det være?* $0,99$*?*
- *Intervallet* $]0, 1[$ *har hverken et største eller et mindste element*

Mindste overtal og største undertal: sup og inf

Kontinuitetsaksiomet I

Hvis $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}$ er opad begrænset, så har A et *mindste* overtal:

$$\sup(A) = \min(A^+) \qquad A^+ = \bigcap_{a \in A} [a, \infty[= [\sup(A), \infty[$$

Hvis $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}$ er nedad begrænset, så har A et *største* undertal:

$$\inf(A) = \max(A^-) \qquad A^- = \bigcap_{a \in A}]-\infty, a] =]-\infty, \inf(A)]$$

Eksempel

- $\sup([0,1[) = 1$
- $\inf(]0,1[) = 0$
- $\sup\{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\} = \sqrt{2}$
- $\inf\{1/n \mid n \in \mathbf{N}\} = 0$

Eksempel

Hvis $f(x)$ er en positiv kontinuert funktion skriver vi $\int_a^b f(x)dx$ for supremum af mængden af alle undersummer for $f(x)$.

Karakterisering af supremum

$S = \sup(A)$ er det mindste overtal for A hvis og kun hvis

- $a \leq S$ for alle $a \in A$
- For ethvert $T < S$ findes at $a \in A$ så $T < a$

def

Regneregler for sup og inf

- $A \subseteq B \Longrightarrow \begin{cases} \sup A \leq \sup B \\ \inf A \geq \inf B \end{cases}$
- $-\sup(A) = \inf(-A)$
- $\sup\left(\bigcup_{b\in B} A_b\right) = \sup\{\sup A_b \mid b \in B\}$
- $\inf\left(\bigcup_{b\in B} A_b\right) = \inf\{\inf A_b \mid b \in B\}$

Bevis.

For ethvert $x \in \bigcup_{b\in B} A_b$ findes et $b \in B$ så $x \in A_b$. Dermed $x \leq \sup A_b \leq \sup\{\sup A_b \mid b \in B\}$. Altså er $\sup\left(\bigcup_{b\in B} A_b\right) \leq \sup\{\sup A_b \mid b \in B\}$.
Da $A_b \subset \bigcup_{b\in B} A_b$ er $\sup A_b \leq \sup\left(\bigcup_{b\in B} A_b\right)$ for ethvert $b \in B$.
Altså er $\sup\{\sup A_b \mid b \in B\} \leq \sup\left(\bigcup_{b\in B} A_b\right)$. $\square$

Grænseværdi for en funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

Hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

siger vi at $f(x)$ går mod a når x går mod x_0 og vi skriver

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \qquad \text{eller} \qquad f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_0$$

L'Hôpital

- $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ for $x \to 0$
- $\frac{\ln(1+ax)}{x} \to a$ for $x \to 0$

Kontinuerte funktioner $f\colon A \to \mathbf{R}$

Definition (Kontinuitet)

1. Funktionen $f\colon A \to \mathbf{R}$ er kontinuert i punktet $x_0 \in A$ hvis $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. Funktionen $f\colon A \to \mathbf{R}$ er kontinuert hvis den er kontinuert i alle punkter i A

$f(x)$ er kontinuert i x_0 betyder

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Alle standard-funktioner, polynomier, logaritme, eksponential, og trigonometriske funktioner er kontinuerte. Absolut værdi funktionen $f(x) = |x|$ er kontinuert.

Nye kontinuerte funktioner fra gamle

Hvis $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ og $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er kontinuerte, så er også

1. $f \pm g$
2. $f \cdot g$ og f/g (hvis $g(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathbf{R}$)
3. $g \circ f$

kontinuerte funktioner.

Eksempel

$\exp(x) - \sin(x^2 - 1)$ *er kontinuert.*

Eksempler på ikke-kontinuerte funktioner.

Følger

Følger

En følge (af reelle tal) er en afbildning $x\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$

Der er tradition for at skrive x_n i stedet for $x(n)$

Eksempler på følger

- $x_n = n$
- $x_n = 1/n$
- $x_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- $x_n = \frac{n^2-10}{2n^2+n}$
- $K_{n+1} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ K_n + 0,05K_n & n \geq 1 \end{cases}$
- $P_{n+1} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ P_n + 0,05(1 - \frac{P_n}{100})P_n & n \geq 1 \end{cases}$

What is a sequence?

Grænseværdi af en følge

Lad $x\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ være en følge og $a \in \mathbf{R}$ et reelt tal. Hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0\colon \; n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

siger vi at følgen x konvergerer mod tallet a og vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{eller} \qquad x_n \to a \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

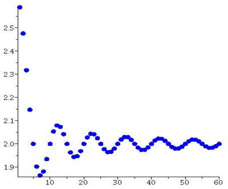
Grænseværdi af gennemsnit (2018B, Opgave 2)

Hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ så er $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = a$

Entydighed af grænseværdi

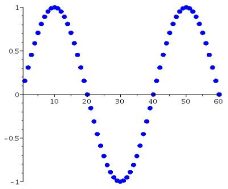
En følge kan ikke konvergere mod to forskellige tal

Konvergent følge



$$a_n = 2 + \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$$

Divergent følge



$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{20}\right)$$

Funktionsgrænseværdier giver følgegrænseværdier

1. $f(x) \to a$ for $x \to \infty \implies f(n) \to a$ for $n \to \infty$
2. $f(x) \to a$ for $x \to 0 \implies f(1/n) \to a$ for $n \to \infty$
3. $\left.\begin{array}{l} f(x) \to a \text{ for } x \to x_0 \\ x_n \to x_0 \text{ for } n \to \infty \end{array}\right\} \implies f(x_n) \to a$ for $n \to \infty$

Eksempel

- $n\sin(1/n) \to 1$ *for* $n \to \infty$
- $n\ln(1+\frac{a}{n}) \to a$ *for* $n \to \infty$

fordi $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ *for* $x \to 0$ *og* $\frac{\ln(1+ax)}{x} \to a$ *for* $x \to 0$

Magma calculator

```
[RealField(5)| n*Sin(1/n) : n in [1..50]];
[RealField(5)| n*Log(1+2/n) : n in [1..100]];
```

Regneregler for grænseværdier

Antag at

1. x og y er følger, a og b er reelle tal, og

$$x_n \to a \text{ for } n \to \infty \qquad \text{og} \qquad y_n \to b \text{ for } n \to \infty$$

2. $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er en kontinuert funktion.

Regneregler for grænseværdier

- $r + x_n \to r + a$ for $n \to \infty$ og $rx_n \to ra$ for $n \to \infty$ $(r \in \mathbf{R})$
- $x_n \pm y_n \to a \pm b$ for $n \to \infty$
- $x_n y_n \to ab$ for $n \to \infty$
- $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$ for $n \to \infty$ hvis $b \neq 0$
- $f(x_n) \to f(a)$ for $n \to \infty$

Anvendelser af regneregler for grænseværdier

Da

- $\frac{1}{n} \to 0$ for $n \to \infty$
- $n \ln(1 + a/n) \to a$ for $n \to \infty$ får vi at

giver regneregler

- $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$ for $n \to \infty$
- $\frac{10}{n^2} = 10\frac{1}{n^2} \to 10 \cdot 0 = 0$ for $n \to \infty$
- $\frac{n^2-10}{2n^2+n} = \frac{1-10/n^2}{2+1/n} \to \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$ for $n \to \infty$
- $\sin(1/n) \to 0$ for $n \to \infty$
- $(1 + a/n)^n = \exp(n \ln(1 + a/n)) \to \exp(a)$ for $n \to \infty$

Magma calculator

```
[RealField(5) | (1+1/n)^n : n in [1..200]];
RealField(5)!Exp(1);
```

Voksende og aftagende følger

1. Følgen x_n er voksende hvis $x_n \leq x_{n+1}$ for alle $n \in N$
2. Følgen x_n er aftagende hvis $x_n \geq x_{n+1}$ for alle $n \in N$

Grænseværdi af voksende og aftagende følger

1. Hvis x_n er voksende og opad begrænset, så er x_n konvergent og $x_n \to \sup x(\mathbf{N})$ for $n \to \infty$
2. Hvis x_n er aftagende og nedad begrænset, så er x_n konvergent og $x_n \to \inf x(\mathbf{N})$ for $n \to \infty$

Sandwichsætningen

Antag at x_n, y_n og z_n er tre følger. Hvis

1. $x_n \leq y_n \leq z_n$ for alle $n \in \mathbf{N}$
2. $x_n \to a$ for $n \to \infty$ og $z_n \to a$ for $n \to \infty$

så vil også $y_n \to a$ for $n \to \infty$.

Uligheder bevares i grænsen

Antag at x og y er to konvergente følger. Hvis $x_n \leq y_n$ for alle $n \in \mathbf{N}$ så er $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.

Specialtilfælde

Hvis $x_n \leq a$ for alle $n \in \mathbf{N}$, og x_n er konvergent, så er $\lim_{n\to\infty} x_n \leq a$.

Følger der går mod $\pm\infty$

Lad $x\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ være en følge.

1. Hvis
$$\forall K > 0 \exists N > 0\colon \; n > N \implies x_n > K$$
siger vi at følgen x går mod ∞ og vi skriver
$$x_n \to \infty \text{ for } n \to \infty$$

2. Hvis
$$\forall K < 0 \exists N > 0\colon \; n > N \implies x_n < K$$
siger vi at følgen x går mod $-\infty$ og vi skriver
$$x_n \to -\infty \text{ for } n \to \infty$$

Berømte grænseværdier

- $a^n \to \infty$ for $n \to \infty$ når $a > 1$ (eksponentielt voksende)
- $n^b \to \infty$ for $n \to \infty$ når $b > 0$ (polynomielt voksende)
- $\log_a n \to \infty$ for $n \to \infty$ når $a > 1$ (logaritmisk voksende)

logaritme $<$ polynomium $<$ eksponentiel følge

1. $\frac{\log_a n}{n^b} \to 0$ for $n \to \infty$ når $a > 1$ og $b > 0$
2. $\frac{n^b}{a^n} \to 0$ for $n \to \infty$ når $b > 0$ og $a > 1$

$\frac{\log_{1,001}(n)}{n^{0,001}} \to 0$ for $n \to \infty$ og $\frac{n^{1000}}{1,001^n} \to 0$ for $n \to \infty$

Berømte grænseværdier

1. $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & 0 \leq a < 1 \end{cases}$
2. $n \sin(1/n) \to 1$ for $n \to \infty$
3. $n \ln(1 + a/n) \to a$ for $n \to \infty$ for alle $x \in \mathbf{R}$
4. $(1 + a/n)^n \to e^a$ for $n \to \infty$ for alle $x \in \mathbf{R}$
5. $\frac{x^n}{n!} \to 0$ for $n \to \infty$ for alle $x \in \mathbf{R}$
6. $\sqrt[n]{n} \to 1$ for $n \to \infty$

Iterative følger

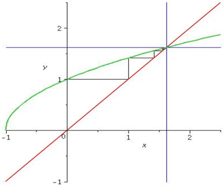
Fibonaccis kaniner

$$F_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & n \geq 3 \end{cases}$$

Logistisk vækst med bærekapacitet K og $\frac{\Delta P}{P} = r(1 - P/K)$

$$P_n = \begin{cases} P_1 & n = 1 \\ (1 + r(1 - P_{n-1}/K))P_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

'Edderkop-følgen' $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$



$$0, f(0), ff(0), \dots, x_n = f^{(n)}(0), \dots$$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$
$$f(x) = x \iff x = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1. Funktionen $f\colon [0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \to [0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ er voksende
2. $0 \le x \le y \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow 0 \le f(x) \le f(y) \le f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
3. $0 \le x_1 \le x_2 \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow 0 \le x_2 \le x_3 \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \cdots$
4. Følgen x_n er voksende og opad begrænset – derfor konvergent.
5. $f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = \lim x_n$
6. $\lim x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

```
[RealField(5) | n gt 1 select Sqrt(1+Self(n-1)) else 1 : n in [1..100]];
RealField(5)!(1+Sqrt(5))/2;
```

Appendix

Beviser

Kommentarer

De rationale tal ligger tæt i de reelle tal

Proposition

Ethvert reelt interval $]a, b[\subseteq \mathbf{R}$*,* $a < b$*, indeholder et rationalt tal.*

Bevis.

Læg mærke til at

$$\frac{m}{n} \in]a, b[\iff m \in]na, nb[$$

Vælg $n \in \mathbf{N}$ så stor at intervallet $]na, nb[$ har længde større end 1 og vælg et helt tal $m \in \mathbf{Z}$ i det. $\square$

Sætning om grænseværdier

Sætningen siger ikke noget hvis en af følgerne går mod $\pm\infty$.
Eksempler paa anvendelser.

tilbage