Eksamen sommer 2007, opg. 1

Lad talfølgerne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være givet ved:

$$a_n = \frac{2^n + n^2}{e^n + n^3}, \qquad b_n = \frac{2^n + n}{n2^n + n^3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a)

Vis, at begge følger er konvergente og bestem deres grænseværdier.

Idé: divider igennem med en faktor, så de enkelte leds grænseværdi kan findes. Det ses, at følgende resultat fra 'Berømte grænseværdier' [1] kan benyttes i forbindelse med ovenstående følger:

$$\frac{n^b}{a^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty \text{ når } b > 0 \text{ og } a > 1. \tag{1}$$

Leddene i følgen a_n divideres derfor med 2^n:

$$\frac{2^n + n^2}{e^n + n^3} = \frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{\frac{e^n}{2^n} + \frac{n^3}{2^n}} = \frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{\left(\frac{e}{2}\right)^n + \frac{n^3}{2^n}}$$

Ifølge (1) vil $\frac{n^2}{2^n}$ og $\frac{n^3}{2^n}$ begge have grænseværdi nul. Nævneren $\left(\frac{e}{2}\right)^n$ vil da gå mod uendeligt[2] for $n \to \infty$ og tælleren være konstant. Dermed har følgen a_n grænseværdi 0.

Leddene i følgen b_n divideres ligeledes med 2^n:

$$\frac{2^n + n}{n2^n + n^3} = \frac{1 + \frac{n}{2^n}}{n + \frac{n^3}{2^n}}$$

Ifølge (1) vil $\frac{n}{2^n}$ og $\frac{n^3}{2^n}$ begge have grænseværdi nul. Nævneren n vil da gå mod uendeligt for $n \to \infty$ og tælleren være konstant. Dermed har følgen b_n grænseværdi 0.

b)

Gør rede for at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent og at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er divergent.

[1] Slides F1 s. 25.
[2] Slides F1 s. 25.

Da $0 < a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ kan grænseværdi-kvotientkriteriet[3] benyttes til at vise konvergens af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}+(n+1)^2}{e^{n+1}+(n+1)^3}}{\frac{2^n+n^2}{e^n+n^3}} = \frac{2^{n+1}+(n+1)^2}{2^n+n^2} \cdot \frac{e^n+n^3}{e^{n+1}+(n+1)^3}$$
$$= \frac{2+\frac{(n+1)^2}{2^n}}{1+\frac{n^2}{2^n}} \cdot \frac{1+\frac{n^3}{e^n}}{e+\frac{(n+1)^3}{e^n}} \overset{(*)}{\to} \frac{2+0}{1+0} \cdot \frac{1+0}{e+0} = \frac{2}{e} \approx 0.7358 \text{ for } n \to \infty$$

$(*)$ følger af (1). Da kvotienten har grænseværdi $\frac{2}{e} < 1$ vil rækken ifølge kriteriet være konvergent.

Da $0 < b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$ kan man ligeledes finde kvotienten for rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{2^{n+1}+(n+1)}{(n+1)2^{n+1}+(n+1)^3}}{\frac{2^n+n}{n2^n+n^3}} = \frac{2^{n+1}+(n+1)}{2^n+n} \cdot \frac{n2^n+n^3}{(n+1)2^{n+1}+(n+1)^3}$$
$$= \frac{2+\frac{(n+1)}{2^n}}{1+\frac{n}{2^n}} \cdot \frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{\frac{n+1}{n}2+\frac{(n+1)^3}{n \cdot 2^n}} \overset{(*)}{\to} \frac{2+0}{1+0} \cdot \frac{1+0}{1 \cdot 2+0} = \frac{2}{2} = 1 \text{ for } n \to \infty$$

$(*)$ følger af (1) samt $\frac{(n+1)^3}{n} = n^2+3n+3+n^{-1}$. Da kvotienten har værdi 1 kan man ikke vha. grænseværdi-kvotientkriteriet konstatere hvorvidt rækken er konvergent eller divergent.

I stedet kan sammenligningskriteriet [4] benyttes til at vise divergens af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Fra udregningerne i a) får vi den ide, at sammenligne b_n med $\frac{1}{n}$, da rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som bekendt er divergent. Det ses hurtigt vha. Mathematica, at uligheden: $\frac{1}{n} < b_n$ først gælder fra et vist trin. Derfor benyttes grænseværdi-sammenligningskriteriet i stedet:

$$\frac{\frac{1}{n}}{b_n} = \frac{1}{n}\frac{n2^n+n^3}{2^n+n} = \frac{2^n+n^2}{2^n+n} = \frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{n}{2^n}} \overset{(*)}{\to} \frac{1+0}{1+0} = 1 \text{ for } n \to \infty.$$

$(*)$ ifølge (1). Da grænseværdien af kvotienten er $0 < 1 < \infty$ vil divergensen af $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ medfører divergens af $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

[3] Slides F2 s. 16.

[4] Slides F2 s. 15.

c)

Afgør for hver af rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, om den er konvergent eller divergent.

Benytter grænseværdi-kvotientkriteriet som i opgave b) til at vise konvergens af $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$:

$$\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_n b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{b_{n+1}}{b_n} \overset{(*)}{\to} \frac{2}{e} \cdot 1 \approx 0.7358 \text{ for } n \to \infty.$$

$(*)$ følger af resultaterne fra b). Da kvotienten er < 1 vil er rækken konvergere ifølge kriteriet.

For rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ kan grænseværdi-kvotientkriteriet ikke benyttes, da kvotienten vil have grænseværdi $1 \cdot 1$ ifølge b). Brug i stedet grænseværdi-sammenligningskriteriet med $\frac{1}{n^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{n^2}}{b_n^2} &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n2^n + n^3}{2^n + n}\right)^2 = \left(\frac{n2^n + n^3}{n(2^n + n)}\right)^2 = \left(\frac{2^n + n^2}{2^n + n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{n}{2^n}}\right)^2 \overset{(*)}{\to} \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^2 = 1^2 \text{ for } n \to \infty.\end{aligned}$$

$(*)$ følger af (1). Da kvotienten er $0 < 1 < \infty$ og rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er konvergent ifølge eks 3.20.2 (GG) vil rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ ligeledes være konvergent.