MATEMATISK ANALYSE OG STATISK OPTIMERING
EN LØSNINGSMANUAL

Den definitive guide til H2(mat.) kurset MASO
ved Copenhagen Business School

København, 2013–2014

Forfattet af

SIMON ELLERSGAARD NIELSEN
Københavns Universitet
Matematisk Institut

2013, Første Udgave

Contents

Indledning

Følgende løsningsmanual er skrevet i forbindelse med mit virke som TA i Matematisk Analyse og Statisk Optimering ved Copenhagen Business School, efteråret 2013. De associerede spørgsmål kan findes på Jesper Michael Møllers hjemmeside: `http://www.math.ku.dk/~moller/undervisning/MASO2010/maso2013.html`.

Om manualens pålidelighed konstateres følgende: idet løsningerne er produktet af en enkelt mands arbejde (tilmed en non-matematiker), vil der utvivlsomt forekomme fejl, slåfejl og upræcise vendinger i teksten. Disse rudimenter kan rapporteres til forfatteren via e-mail: `s_ellersgaard@yahoo.com`. Så vidt muligt vil nyeste version af manualen være at finde på `http://www.s-ellersgaard.com`.

CHAPTER 1

Ugeseddel 1, Uge 36

Der er ingen opgaver i denne uge. Til gengæld en emneoversigt, som omtrent linker hver ugeseddel med et fagligt område samt relevant tekstbogmateriale.

Uge	Emne	Afsnit i lærebog
37	De reelle tal, max og min, sup og inf,	
	Kontinuerte funktioner, Følger	GG§1 GG §2
38	Rækker	GG §3 (til og med p. 26)
39	Konvergenskriterier for rækker	GG §3 (resten)
40	Komplekse tal	GG §4 springes over,
		GG §5 (til p. 42 midt)
41	Topologi i euklidiske rum, Åbne,	
	afsluttede og kompakte mængder, Kontinuitet	Sydsæter 7.1
		(ikke lim inf og lim sup)
42	Følger i euklidiske rum, Ekstremværdisætningen,	
	Kontinuitet af ekstremværdifunktion	Sydsæter 7.2
		(ikke Sætning 7.2.9)
43	N/A	N/A
44	Differentiable funktioner, Kædereglen,	
	Lineær approximation, Invers Funktion Sætning	Sydsæter 4.1,
		Sydsæter 5.1,
		Sydsæter 5.2
45	Implicit Funktion Sætning	Sydsæter 5.3
46	Ikke-lineær optimering, Lagrange Sætning,	
	Karush-Kuhn-Tucker Sætning	Sydsæter 8.7,
		Sydsæter 8.8
47	Karush-Kuhn-Tucker betingelser,	
	Modeller i matematisk økonomi, Lineær optimering,	
	Kanoniske programmer, Basisløsninger	Sydsæter 8.9,
		Fuglede §1,2
48	Generelle lineære programmer, Det duale program,	
	Den svage Dualititetssætning	Fuglede §3 Fuglede §4
49	Program på standardform, Farkas' alternativ,	
	Den stærke Dualititetssætning	Fuglede §5 Fuglede §6
50	Repetition	N/A

CHAPTER 2

Ugeseddel 2, Uge 37

Opgave 1

DEFINITION 1. Lad M være en mænde af reelle tal. Vi definerer $\sup M$ som det mindste reelle tal, som er større end eller lig med ethvert tal i M.

DEFINITION 2. Lad M være en mænde af reelle tal. Vi definerer $\inf M$ som det største reelle tal, som er mindre end eller lig med ethvert tal i M.

Mængde A. For $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < 2\}$ ses det let at uligheden kun er opfyldt, dersom x ligger i mængden $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Således er

- $\sup A = \sqrt{2}$.
- $\inf A = -\sqrt{2}$.

A har imidlertid intet maximum, idet vi for ethvert tal $a \in A$ kan finde et tal, som er større (husk på, at maximum af en mængde er et element af mængden, mens dette ikke nødvendigvis gør sig gældende for supremum). A har ej heller et minimum, idet vi for ethvert tal $a \in A$ kan finde et tal, som er mindre (husk minimum af en mængde skal være et element af mængden).

Mængde B. For $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0, x + 1/x < 3\}$ kan vi skrive den sidste ulighed som

$$x^2 - 3x + 1 < 0 \tag{1}$$

idet $x > 0$. Vestresiden er en smilende (konveks) kvadratisk function. Hvis x skal opfylde (1), kræves det derfor at $x \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Derfor er

- $\sup B = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
- $\inf B = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Igen har B hverken et maksimum eller et minimum.

KOMMENTAR 1. Når man løser disse opgaver, er det en god idé, at tegne funktionerne som i opgavesættet.

Opgave 2

DEFINITION 3. En talfølge $\{x_n\}$ i $\mathbb{R}$ siges at *konvergere* mod a når $n \to \infty$, dersom $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \epsilon$ for alle $n > N$.

Del I. Udsagnet

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n}\right)=3$$

er identisk med

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}:\left|-\frac{2}{n}\right|<\epsilon \text{ for alle } n>N.$$

Dette udsagn er sandt. Ligegyldigt hvilket positivt ϵ vi vælger skal vi blot sætte $N\geq 2/\epsilon$ for at uligheden holder. Er ϵ eksempelvis 0,0001 sæt da $N=20.000$ og så fremdeles.

Del II. Udsagnet

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\sin(n)}{n}\right)=0$$

er identisk med

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+\exists N\in\mathbb{N}:\left|\frac{2\sin(n)}{n}\right|<\epsilon \text{ for alle } n>N.$$

Som det bemærkes er $|\sin(x)|\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}$. Derfor kan vi konkludere, at ligegyldigt hvilket ϵ vi vælger kan det maksimalt være tilfældet, at vi skal sætte $N\geq 2/\epsilon$ for at uligheden holder. Dette kan naturligvis altid lade sig gøre.

Opgave 3

Kommentar 2. Benyt regnereglerne fra sætning 2.7. Endvidere, fra eksempel 2.9 har vi at $1/n^a\to 0$ når $a>0$.

Divider igennem med n^4:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^4+2n}{3n^4-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{2}{n^3}}{3-\frac{7}{n^4}}$$

Vi har

$$\lim_{n\to\infty}(8+\tfrac{2}{n^3})=8+\lim_{n\to\infty}\tfrac{2}{n^3}=8$$

og

$$\lim_{n\to\infty}(3-\tfrac{7}{n^4})=3-\lim_{n\to\infty}\tfrac{7}{n^4}=3$$

Så fra sætning 2.7 (vi) kan vi konkludere at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^4+2n}{3n^4-7}=\frac{8}{3}.$$

Divider igennem med n^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{-2n^3+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^3}}{-2+\frac{7}{n^3}}$$

Vi har

$$\lim_{n\to\infty}(\tfrac{3}{n}-\tfrac{4}{n^3})=\lim_{n\to\infty}\tfrac{3}{n}-\lim_{n\to\infty}\tfrac{4}{n^3}=0-0=0$$

og

$$\lim_{n\to\infty}(-2+\tfrac{7}{n^3})=-2+\lim_{n\to\infty}\tfrac{7}{n^3}=-2.$$

Igen følger det fra sætning 2.7 at

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{-2n^3+7}=0.$$

I sidste opgave bemærker vi, at nævneren er af lavere grad end tælleren. For at undgå at den omskrevne nævner konvergerer mod nul, dividerer vi derfor kun igennem med n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n-13}{7n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+2-\frac{13}{n}}{7-\frac{4}{n}}$$

Tydeligvis går nævneren mod 7 og tælleren mod det uendelige når $n \to \infty$. Så

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3+2n-13}{7n-4} = \infty.$$

Øvelse 2.2

Ansku formlen

$$K_n(m) = K(0)\left(1+\frac{r}{n}\right)^{m\cdot n}. \tag{2}$$

Fortolkningen er som følger: vi sætter $K(0)$ kr. i banken på tidspunkt 0. Rentefoden i banken er r per årlig bases. Der er n terminer i løbet af året, dvs. rentefoden per termin er derfor r/n. I en "rentes rente" beregning følger det, at vi efter én termin har $K(0)(1+\frac{r}{n})$ kr., efter to terminer har $K(0)(1+\frac{r}{n})^2$, ... og efter det første år (n terminer) har $K(0)(1+\frac{r}{n})^n$ kr. Lader vi dette passere i m år, har vi ergo $K_n(m)$ kr., hvor $K_n(m)$ er givet i udtryk (2).

Betragt nu hvad der sker når antallet af årlige terminer går mod det uendelige: $n \to \infty$.

$$K_\infty(m) = \lim_{n\to\infty} K(0)\left(1+\frac{r}{n}\right)^{m\cdot n}$$

Dette kan omskrives som

$$K_\infty(m) = K(0)\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right]^m\right\}. \tag{3}$$

Fra eksempel 2.11.2 ved vi allerede at $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$. Imidlertid er (3) en funktion af denne serie:

$$K_\infty(m) = K(0)\left\{\lim_{n\to\infty} f\left((1+\tfrac{r}{n})^n\right)\right\},$$

hvor $f(x) = x^m$. Dette ville derfor være rart, hvis vi kunne retfærdiggøre at flytte grænseværdien indenfor funktionen: $\lim f(...) = f(\lim ...)$. Dette kan heldigvis gøres via sætning 2.10:

THEOREM 1. Lad $x_1, x_2, ..., x_n \to a$ være en konvergent følge i $\mathbb{R}^k$, hvor følgens elementer samt grænsepunktet a er elementer i $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Hvis $f : A \mapsto \mathbb{R}^m$ er en funktion, som er *kontinuert* i a da gælder det at $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n) \to f(a)$.

Funktionen $f(x) = x^m$ er naturligvis kontinuert i x. Derfor følger det, at

$$K_\infty(m) = K_0(e^r)^m = K_0 e^{rm}.$$

Opgave 4

Ihukom $n^a/b^n \to 0$ når $a > 0$, $b > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+2n}{e^n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\frac{n^4}{e^n}+2\frac{n}{e^n}}{1-7\frac{1}{e^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(5\tfrac{n^4}{e^n}+2\tfrac{n}{e^n}\right) = 5\lim_{n\to\infty}\tfrac{n^4}{e^n}+2\lim_{n\to\infty}\tfrac{n}{e^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-7\tfrac{1}{e^n}\right) = 1-7\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{e^n} = 1.$$

Så fra sætning 2.7:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+2n}{e^n-7} = 0.$$

Vi benytter resultatet $\log(n)/n^a \to 0$ når $a > 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{(\ln n)^4+6n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{(\ln n)^4}{n^5}+6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{(\ln n)^4}{n^5}+6\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{(\ln n)}{n^{5/4}}\right)^4+6 = 6$$

idet $\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)}{n^{5/4}} = 0$ og $f(x) = x^4$ er kontinuert i x. Således følger det, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{(\ln n)^4+6n^5} = \frac{1}{6}.$$

Opgave 5

(a) Lad $a_n = \frac{1}{n^2}$ og $b_n = \frac{1}{n}$ da er $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$.
(b) Lad $a_n = \frac{1}{n}$ og $b_n = \frac{1}{n^2}$ da er $\frac{a_n}{b_n} = n \to \infty$ når $n \to \infty$.
(c) Lad $a_n = -\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}$ og $b_n = \frac{1}{n}$ da er $\frac{a_n}{b_n} = -2+\frac{1}{n} \to -2$ når $n \to \infty$.

Opgave 6

Der gives et stort vink, idet det fastslås at $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq n!/n^n \leq 1/n$. Vi ved fra eksempel 2.9 at $\lim_{n\to\infty} 1/n^a = 0$ når $a > 0$ (eksempelvis $a = 1$). Ergo, $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$ thi $0 \leq \lim_{n\to\infty} n!/n^n \leq 0$ (sandwichsætningen).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{(\ln n)^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3\frac{1}{n}}{\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+3\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} m+3\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n} = \infty.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2-1 = -1$$

jf. eksempel 2.9 (iii) og det faktum at $f(x) = x^2$ er kontinuert i x. Derfor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{(\ln n)^2-n} = -\infty.$$

CHAPTER 3

Ugeseddel 3, Uge 38

THEOREM 2. **Induktion** Når vi skal bevise matematiske udsagn af formen $\forall n \in \mathbb{N}_d : \varphi(n)$, hvor φ er et givent prædikat og $\mathbb{N}_d = \{d, d+1, d+2, ...\} \subseteq \mathbb{N}_0$, er det oplagt at anvende matematisk induktion.
Bevisalgoritmen består af disse trin:

(1) **Basisskridt**: I basisskridtet beviser man at udsagnet er sandt ved det mindste tal i mængden (vi benævner dette tal d): $\varphi(d)$.
(2) **Induktionsskridt**: I induktionsskridtet beviser man, at hvis udsagnet gælder for et vilkårligt k (induktionsantagelsen), $\varphi(k)$, så gælder det også for $k+1$, $\varphi(k+1)$.
(3) **Konklusion**: Deraf følger det, at $\varphi(n)$ gælder for alle $n \in \mathbb{N}_d$. Thi $\varphi(d)$, $\varphi(d) \Rightarrow \varphi(d+1)$, ergo $\varphi(d+1)$, $\varphi(d+1) \Rightarrow \varphi(d+2)$, ergo $\varphi(d+2)$ og så fremdeles.

Mere kortfattet (og formelt) kan vi formulere matematisk induktion som et axiom i et andenordenslogisk sprog:

$$\forall \varphi \left[[\varphi(d) \;\&\; \forall k \in \mathbb{N}_d[\varphi(k) \Rightarrow \varphi(k+1)]] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_d[\varphi(n)] \right].$$

Typiske eksempler hvor matematisk induktion er velegnet inkluderer

- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}_4 : n! > 2^n$.

Opgave 7

Lad følgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ være givet ved $a_0 = 0$ og $\forall n \in \mathbb{N}_1 : a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1$.

(a) Udsagnet $a_n \in [0, 2]$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ er oplagt at eftervise via induktion

(1) **Basisskridt**: For $n = 0$ er $a_0 = 0$ per definition. Ergo er $a_0 \in [0, 2]$ sandt.
(2) **Induktionsskridt**: Antag nu at udsagnet holder for et vilkårligt k: $a_k \in [0, 2]$ (induktionsantagesen). Vi ønsker at bevise at $a_k \in [0, 2] \Rightarrow a_{k+1} \in [0, 2]$. Dette gøres som følger: $a_{k+1} = \frac{1}{2}a_k + 1$ per definition. Fra induktionsantagelsen ved vi, at $a_k \in [0, 2]$, hvorfor a_{k+1} som minimum er $\frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1$ og som maksimum er $\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$. Dette fuldender induktionsskridtet.
(3) **Konklusion**: Idet $a_0 \in [0, 2]$ og $a_k \in [0, 2] \Rightarrow a_{k+1} \in [0, 2]$ konkluderer vi, at $a_n \in [0, 2]$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$.

For at vise at følgen er *monotont voksende*, skal vi bevise at $a_n \leq a_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned} \text{For } n = 0: \;\; & a_0 = 0 \leq a_1 = 1. \\ \text{For } n \in \mathbb{N}_1: \; & a_n \leq a_{n+1} \\ & \Leftrightarrow a_n \leq \tfrac{1}{2}a_n + 1 \\ & \Leftrightarrow 2a_n \leq a_n + 2 \\ & \Leftrightarrow a_n \leq 2 \end{aligned}$$

Sidstnævnte udtryk er sandt for all $n \in \mathbb{N}_1$ (jf. $a_n \in [0, 2]$). Ergo er følgen monotont voksende.

(b) Talgølgen er konvergent, da den er opad begrænset $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \leq 2$ (se F1 side 22).

Grænseværdien findes som følger. Tydeligvis, hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ da er $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \alpha$. Ydermere, idet funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ er kontinuert, specielt i α, implicerer sætning 2.10 at $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}a_{n-1} + 1\right)$ kan skrives som $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$ dvs. $\alpha = 2$.

Opgave 8

THEOREM 3. Kvotientrækken $s_\infty = a + aq + aq^2 + aq^3 + ...$ konvergerer for $|q| < 1$ til

$$s_\infty = \sum_{j=0}^{\infty} aq^j = \frac{a}{1-q}.$$

Når $|q| \geq 1$ er kvotientrækken divergent.

(a) Kvotienten er $q = -\frac{1}{3}$ så rækken er konvergent. Initialelementet er $a = 1$. Derfor er summen

$$s_\infty = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

(b) Kvotienten er $q = \frac{1}{7}$ så rækken er konvergent. Initialelementet er $a = 14$. Derfor er summen

$$s_\infty = \frac{14}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{7^2}{3}.$$

(c) Kvotienten er $q = -\frac{1}{6}$ så rækken er konvergent. Initialelementet er $a = 4$. Derfor er summen

$$s_\infty = \frac{4}{1 + \frac{1}{6}} = \frac{24}{7}.$$

Opgave 9

Igen: dersom en kvotientrække er konvergent, gør det sig gældende, at $|q| < 1$.

(a) $q = -x$, så vi kræver $|-x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$. $a = 1$ så $s_\infty = 1/(1 + x)$.
(b) $q = x^2$, så vi kræver $|x^2| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$. $a = 1$ så $s_\infty = 1/(1 - x^2)$.
(c) $q = 1 - x$, så vi kræver $|1 - x| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - x < 1 \Leftrightarrow 2 > x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$. $a = 1$ så $s_\infty = 1/x$.

(d) $q = -3/\sqrt{x}$, så vi kræver $|-3/\sqrt{x}| < 1 \Leftrightarrow |3/\sqrt{x}| < 1 \Leftrightarrow 3 < \sqrt{x} \Leftrightarrow 9 < x$. $a = 1/x$ så $s_\infty = 1/(x + 3\sqrt{x})$.

Opgave 10

Sætning 3.3 proklamerer, at en nødvendig (men ej tilstrækkelig) betingelse for, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, er, at $a_n \to 0$ når $n \to \infty$. Herfra kan vi straks konkludere, at (a), (b) og (c) er divergente, idet leddene konvergerer til henholdsvis 1, 1 og e (jf. definitionen af Euler's konstant).
For opgave (d) ser vi at $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+7}{2n-1} = 0$, så hér må vi tænke lidt mere kreativt for at påvise divergens. Sammenligningskriteriet er et oplagt alternativ!

$$\frac{\sqrt{n}+7}{2n-1} > \frac{\sqrt{n}}{2n-1} > \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ er divergent, så det er halvdelen af den også. Vores serie er altså større end en divergent serie, hvorfor den i sig selv må være divergent.

Øvelse 3.2

Del I Vi skal vise, at

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}}$$

er konvergent. Bemærk at for $n \geq 2$

$$\frac{1}{2n^2 - \sqrt{n}} < \frac{1}{2n^2 - 2n} = \frac{1}{2n(n-1)}$$

Fra eksempel 3.14 ved vi, at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

konvergerer. Sætning 3.6 fortæller os ydermere, at konvergens er uforandret når vi multipicerer med en konstant $\lambda \in \mathbb{R}$. Derfor kan vi fra sammenligningskriteriet konkludere, at S konvergerer.

Del II Vi skal vise, at

$$S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

divergerer. Det gælder, at for $n \geq 1$

$$\frac{1}{n + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{n + n} = \frac{1}{2n}.$$

Naturligvis er serien

$$\tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$$

divergent, så sammenligningskriteriet garanterer, at S' er divergent.

Opgave 11

Opgaven minder meget om opgave 7. Lad $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ være gived ved $a_1 = 3$ og $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$.

(i) Udsagnet $a_n \in [2,3]$ for alle $n \in \mathbb{N}_1$ er oplagt at eftervise via induktion

(1) **Basisskridt**: For $n = 1$ er $a_1 = 3$ per definition. Ergo er $a_1 \in [2,3]$ sandt.

(2) **Induktionsskridt**: Antag nu at udsagnet holder for et vilkårligt k: $a_k \in [2,3]$ (induktionsantagesen). Vi ønsker at bevise, at $a_k \in [2,3] \Rightarrow a_{k+1} \in [2,3]$. Dette gøres som følger: $a_{k+1} = \sqrt{3a_k - 2}$ per definition. Fra induktionsantagelsen ved vi, at $a_k \in [2,3]$, hvorfor a_{k+1} som minimum er $\sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$ og som maksimum er $\sqrt{3 \cdot 3 - 2} = \sqrt{7}$. Dette fuldender induktionsskridtet.

(3) **Konklusion**: Idet $a_1 \in [2,3]$ og $a_k \in [2,3] \Rightarrow a_{k+1} \in [2,3]$ konkluderer vi, at $a_n \in [2,3]$ for alle $n \in \mathbb{N}_1$.

For at vise at følgen er *monotont aftagende* skal vi bevise at $a_n \geq a_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}_1$.

$$
\begin{aligned}
\text{For } n = 1 : a_1 = 3 \geq a_2 &= \sqrt{3 \cdot 3 - 2} = \sqrt{7}. \\
\text{For } n \in \mathbb{N}_2 : a_n &\geq a_{n+1} \\
&\Leftrightarrow a_n \geq \sqrt{3a_n - 2} \\
&\Leftrightarrow a_n^2 - 3a_n + 2 \geq 0 \\
&\Rightarrow \{a_n \leq 1\} \cup \{a_n \geq 2\}
\end{aligned}
$$

Sidstnævnte udtryk er sandt for all $n \in \mathbb{N}_1$ (jf. $a_n \in [2,3]$). Ergo er følgen monotont aftagende.

(ii) Talgølgen er konvergent, da den er nedad begrænset $\forall n \in \mathbb{N}_1 : a_n \geq 2$ (se F1 side 22).

Grænseværdien findes som følger. Tydeligvis, hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ da er $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \alpha$. Ydermere, idet funktionen $f(x) = \sqrt{3x-2}$ er kontinuert, specielt i α, implicerer sætning 2.10 at $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_{n-1} - 2}$ kan skrives som $\alpha = \sqrt{3\alpha - 2}$ dvs. $\alpha = 1 \vee 2$. Men da $a_n \geq 2$ må det gælde, at grænseværdien er 2.

CHAPTER 4

Ugeseddel 4, Uge 39

Opgave 12

(a)

$$\frac{7n^2+3}{4n^3-2} > \frac{7n^2}{4n^3-2} > \frac{7n^2}{4n^3} = \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{n}.$$

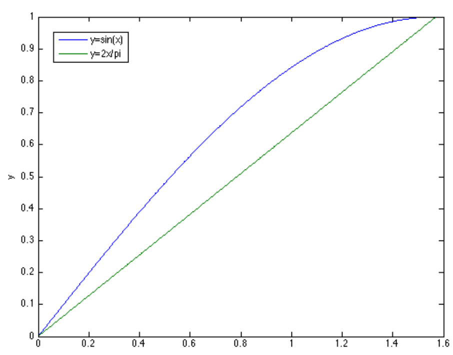
Idet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergerer, implicerer sammenligningskriteriet, at serie (a) divergerer.

(b)

$$\frac{2n-7}{4n^3+8} < \frac{2n}{4n^3+8} < \frac{2n}{4n^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

Idet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergerer, implicerer sammenligningskriteriet, at serie (a) konvergerer.

(c) Der gives følgende vink: $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ for $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Dette er "klart" fra følgende graf:



Talserien $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\} \subset [0, \frac{\pi}{2}]$. Derfor har vi, at $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sin\frac{1}{n} \geq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}.$$

Idet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergerer, implicerer sammenligningskriteriet, at serie (c) divergerer.

Opgave 13

Grænse-kvotientkriteriet dikterer, at hvis $a_{n+1}/a_n \to q$ for $n \to \infty$, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent hvis $q < 1$, men divergent hvis $q > 1$. Når $q = 1$ kan alt ske.

(a)

$$\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}=\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{3},\quad \text{når } n\to\infty.$$

Så serien konvergerer da $q<1$.

(b)

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{10}}\cdot\frac{n^{10}}{3^n}=3\frac{n^{10}}{(n+1)^{10}}=3\frac{n^{10}}{n^{10}+10n^9+...+1}=3\frac{1}{1+\frac{10}{n}+...+\frac{1}{n^{10}}}\to 3,\quad \text{når } n\to\infty.$$

Så serien divergerer da $q>1$.

(c) Husk $n!=n(n-1)(n-2)...1$ og $(n!)^2=n!n!$. Derfor er $(n+1)!=(n+1)n!$ og $(2n+2)!=(2n+2)(2n+1)(2n)!$.

$$\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}\to\frac{1}{4},\quad \text{når } n\to\infty.$$

Så serien konvergerer da $q<1$.

Øvelse 3.4

Konvergens/divergens af $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^a}$ kan deduceres via konvergens/divergens af

$$I=\int_2^{\infty}\frac{1}{t(\ln(t))^a}dt=\left[\frac{\ln(t)^{1-a}}{1-a}\right]_2^{\infty}=\frac{1}{1-a}\left\{\infty^{1-a}-\ln(2)^{1-a}\right\}$$

Når $a<1$ går $I\to\infty$ (første led er af formen "∞^k" hvor $k>0$). Hvis $a>1$ er I konvergent (første led er af formen "$1/\infty^k$" hvor $k>0$). Når $a=1$ er det relevante integral $\int_2^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)}=[\ln(\ln(n))]_2^{\infty}=\infty$ dvs. vores sum divergerer.

Øvelse 3.5

Vi benytter igen grænse-kvotientkriteriet: $a_{n+1}/a_n\to q$, hvor $q<1$ for konvergens og $q>1$ for divergens.

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}$$

hvor vi har brugt definitionen af e i det sidste trin. Siden $q<1$ er serien konvergent.

Når vi betragter den samme serie med faktor 2^n går grænse-kvotienten naturligvis mod $2/e$ (konvergens), medens en faktor på 3^n giver en grænse-kvotient på $3/e$ (divergens).

Opgave 14

(a) 0,231 er det samme som $231\cdot10^{-3}$. 0,000231 er det samme som $231\cdot10^{-6}$ og $0,\underbrace{0...0}_{3n-3}231$ er det samme som $231\cdot10^{-3n}$. Således har vi

$$\begin{aligned}0,231231231... &= 0,231+0,000231+0,000000231+...\\ &= 231\cdot10^{-3}+231\cdot10^{-6}+231\cdot10^{-9}+...\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{231}{1000^n}\end{aligned}$$

(b) Summen af en uendelig kvotientrække er $s_\infty = a/(1-r)$, hvor a er første led og r er kvotienten.

$$s_\infty = \frac{231 \cdot 10^{-3}}{1-10^{-3}} = \frac{231}{10^3-1} = \frac{231}{999}.$$

(c)

$$\begin{aligned} 0,473181818... &= 473 \cdot 10^{-3} + 18 \cdot 10^{-5} + 18 \cdot 10^{-7} + 18 \cdot 10^{-9} + ... \\ &= \frac{473}{1000} + \frac{18 \cdot 10^{-5}}{1-10^{-2}} = \frac{473}{1000} + \frac{18}{10^5 - 10^3} \\ &= \frac{473}{1000} + \frac{18}{99000} = \frac{5205}{11000} = \frac{1041}{2200} \end{aligned}$$

Opgave 15

(a) Serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

konvergerer $\forall x \in \mathbb{R}$, idet grænse-kvotientkriteriet giver

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to x \cdot 0 = 0$$

når $n \to \infty$. Grænseværdien er derfor klart < 1, som det kræves for konvergens.

(b) Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$$

er konvergent for $x \in [0, 1[$ og divergent for $x \geq 1$. Igen ses dette bedst ved grænse-kvotientkriteriet:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = x \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-1} = \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \to x$$

når $n \to \infty$. Konvergens er defor klar for $x < 1$. Endvidere er divergens klar for $x > 1$. Det specielle tilfælde $x = 1$ må undersøges separat: vi får $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, som er en etableret divergent serie.

CHAPTER 5

Ugeseddel 5, Uge 40

Øvelse 5.1

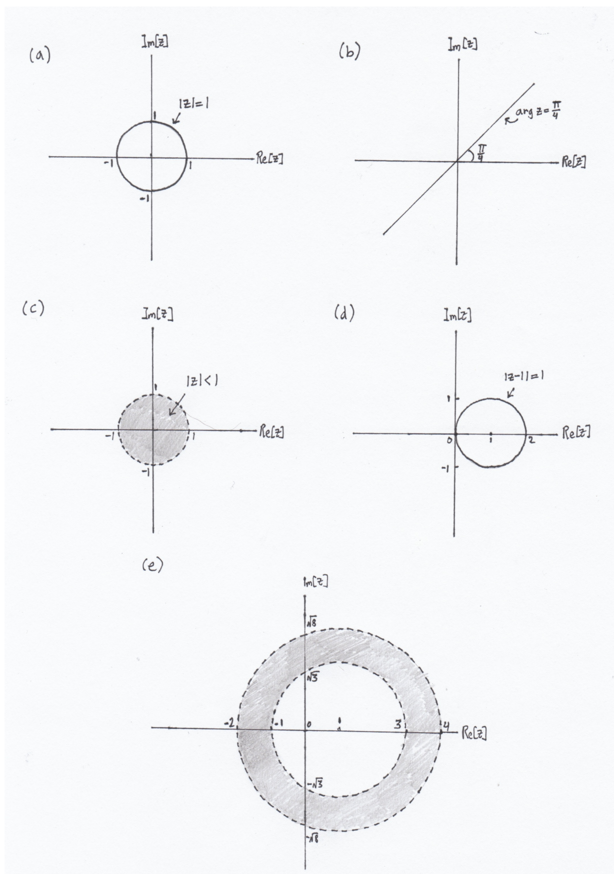


FIGURE 1. **Argand diagrammer** Lad $z \in \mathbb{C}$ da repræsenterer $|z|$ afstanden fra punktet z i det komplekse plan til origo. Mere konkret, da z har den generelle form $x + iy$, da er $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\arg z$ måler, per konvention, vinklen (fra den positive "x-akse" [dvs. den reelle akse]) mod uret hen til zs afstandsvektor. **Speciel bemærkning ang. (a):** opgaven specificerer $z \in \mathbb{Z}$ så i givet fald skal man markere tallene -1 og 1 på en tallinje. Men: idet vi beskæftiger os med komplekse tal, burde der måske stå $z \in \mathbb{C}$ i stedet, hvilket er illustreret i ovenstående graf.

Øvelse 5.3

(a) Mængden $\mathbb{A}_4 = \{+1, -1, +i, -i\}$ danner en cycklisk gruppe under multiplikation, "$\cdot$", med generator element i.

$\cdot$	$+1$	-1	$+i$	$-i$
$+1$	$+1$	-1	$+i$	$-i$
-1	-1	$+1$	$-i$	$+i$
$+i$	$+i$	$-i$	-1	$+1$
$-i$	$-i$	$+i$	$+1$	-1

Heraf følger det, at $i = i^5 = i^9 = ... = i^{1+4n} = ...$ og (relevant for vores tilfælde) at $i^8 = 1$.

$$\begin{aligned}(1+2i)^2 + \tfrac{1}{2}(1+i)(1+i^8) &= (1+2i)^2 + (1+i)\\ &= (1+4i-4) + (1+i)\\ &= -2+5i\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}i\sqrt{5}(1-i\sqrt{5}) - (\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}i)(-2+2i) &= (i\sqrt{5}+5) - (-1+i-\sqrt{5}i-\sqrt{5})\\ &= (6+\sqrt{5}) + i(2\sqrt{5}-1)\end{aligned}$$

(d) Første brøk:

$$F_1 = \frac{6+7i}{7i-3} = \frac{(6+7i)(-3-7i)}{(7i-3)(-3-7i)} = \frac{-18-42i-21i+49}{9+49} = \frac{31-63i}{58}.$$

Anden brøk:

$$F_2 = \frac{2+5i}{3+7i} = \frac{(2+5i)(3-7i)}{(3+7i)(3-7i)} = \frac{6-14i+15i+35}{9+49} = \frac{41+i}{58}.$$

Sidste brøk:

$$F_3 = \frac{30-23i}{58}.$$

Vi betragter $F_1 - F_2 + F_3$ (bemærk, at der er tale of MINUS F_2!):

$$F_1 - F_2 + F_3 = \frac{20-87i}{58} = \frac{10}{29} - \frac{3}{2}i.$$

Øvelse 5.4

(a) $z = -4-4i$. Modulus: $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. z ligger i tredie kvadrant. $\arg z = \pi + \tan^{-1}(\frac{-4}{-4}) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

(d) $z = 3 + \sqrt{3}i$. Modulus: $|z| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. z ligger i første kvadrant. $\arg z = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$.

(e) $z = 4/(1+i)$ kan omskrives til $z = 2-2i$. Modulus: $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. z ligger i fjerde kvadrant. $\arg z = 2\pi + \tan^{-1}(\frac{-2}{2}) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.

Opgave 16

(a)

$$
\begin{aligned}
& (1+i)z+3 = 1-i \\
\Leftrightarrow \quad & (1+i)z = -2-i \\
\Leftrightarrow \quad & z = \frac{-2-i}{1+i} = \frac{(-2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\
& = \frac{-2+2i-i-1}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2}.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
& \frac{z-2}{z+1} = 3i \\
\Leftrightarrow \quad & z-2 = (3i)z + 3i \\
\Leftrightarrow \quad & z(1-3i) = 2+3i \\
\Leftrightarrow \quad & z = \frac{2+3i}{1-3i} = \frac{(2+3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} \\
& = \frac{2+6i+3i-9}{10} = -\frac{7}{10} + \frac{9}{10}i.
\end{aligned}
$$

Opgave 17

Ligning (I): $z+w=2i$. Ligning (II): $z-w=3+i$. (I)+(II): $2z=3+3i \Rightarrow z=1.5+1.5i$. Endvidere, (I)-(II): $2w=-3+i \Rightarrow w=-1.5+0.5i$.

Opgave 18

(a) Brug grænse-kvotientkriteriet! Konvergens følger dersom $a_{n+1}/a_n \to q$ hvor $q<1$ når $n\to\infty$.

$$
\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)2^{-(n+1)^2}}{n2^{-n^2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)2^{-2n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 1\cdot 0.5\cdot 0 = 0
$$

når $n\to\infty$. Dette demonstrerer, at $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n^2}$ er konvergent.

(b) For $n\in\mathbb{N}$ gælder det at $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$. En måde at se dette på kunne være at kigge på funktionerne $f(x)=\sin x$ og $g(x)=x$ for intervallet $[0,1]$. $f(0)=g(0)$ og f og g har samme hældning kun i punktet $x=0$. Især gælder det, at $f(x)$ har sin maksimale hældning i netop dette punkt. Så $\sin x \le x \ \forall x\in[0,1]$. Se Figure 1 i opgavesættet.

Ihukom nu, at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ er konvergent. Idet $\sin^3\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n^3}$ implicerer sammenligningskriteriet således, at $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ er konvergent.

CHAPTER 6

Ugeseddel 6, Uge 41

Øvelse 5.8

- (a) $z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$.
- (b) $z^2 + 2z + 10 = 0$ er en andengradsligning med løsning
$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i.$$
- (c) $z^3 = i$. Omskriv i som $\exp\{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\}$, hvor $n \in \mathbb{Z}$. Da er
$$z = \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n\right)\right\}.$$
I de tre distinkte tilfælde $n \in \{-1, 0, 1\}$ får vi således
$$z = \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\right\} \vee z = \exp\left\{i\frac{\pi}{6}\right\} \vee z = \exp\left\{i\frac{5\pi}{6}\right\}.$$
Fra identiteten $\exp\{ix\} \equiv \cos x + i \sin x$ fås da
$$z = -i \vee z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \vee z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Øvelse 5.4

Ved inspektion har $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ tydeligvis (mindst) een reel rod, nemlig $z = -1$. Resten fås ved faktorisering (divider $z^3 + z^2 + z + 1$ med $z + 1$), hvorfra det følger at $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ kan skrives som $(z + 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (z + 1)(z - i)(z + i) = 0$. De tre løsninger er altså $z = -1$, $z = i$ og $z = -i$.

Sydsæter 7.1.1

Definition 4. Ihukom

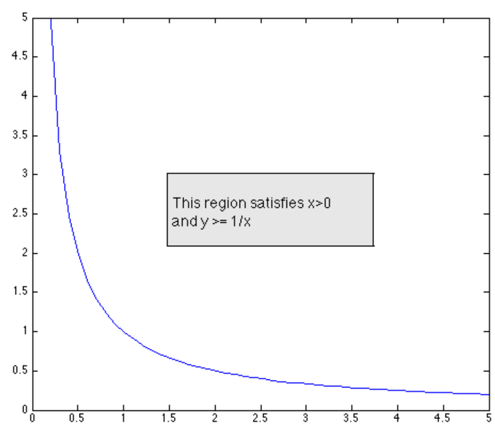
(1) Punkt $\boldsymbol{a} \in S$, hvor S er en delmængde af $\mathbb{R}^n$, er et **indre punkt** i S, dersom der eksisterer et tal $r > 0$, således at n-kuglen $B(\boldsymbol{a}, r) \subseteq S$.
(2) En mængde S er **åben** dersom alle punkter i S er indre punkter i S.
(3) Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ er et **randpunkt** for mængden S, dersom enhver n-kugle med centrum $\boldsymbol{x}_0$, $B(\boldsymbol{x}_0, r)$, indeholder mindst eet punkt som ligger i S og mindst eet punkt, som ikke ligger i S.
(4) En mængde S kaldes **lukket**, dersom den indeholder alle sine randpunkter. Ækvivalent kan vi sige, at S er lukket, dersom komplementærmængden er åben.

(5) En mængde S kaldes **begrænset**, dersom der eksisterer et tal m, således at $||\boldsymbol{x}|| \leq m$ for alle $\boldsymbol{x}$ i S. Fortolk $||\boldsymbol{x}||$ som afstanden mellem $\boldsymbol{x}$ og origo $\mathbf{0}$. En mængde som ikke er begrænset er naturligvis **ubegrænset**.

(6) En **kompakt** mængde S er en mængde som er både lukket og begrænset.

Ved brug af disse definitioner ser vi, at (i) S_1 er åben og begrænset, (ii) S_2 er lukket og begrænset (kompakt), (iii) S_3 er lukket og ubegrænset, (iv) S_4 er begrænset, men hverken lukket eller åben, (v) S_5 er åben og ubegrænset.

Sydsæter 7.1.3



Mængden er lukket (jf. $\geq$) og ubegrænset (vilkårligt store tal ligger i mængden).

Sydsæter 7.1.6

Del 1: åbne mængder. Lad S og T være åbne mængder in $\mathbb{R}^n$. Ansku nu et vilkårligt element $\boldsymbol{x} \in A \cup T$. Det må gælde, at $\boldsymbol{x}$ ligger i (mindst) en af mængderne S og T. Uden tab af generalitet, antag at $\boldsymbol{x} \in S$. Da findes der en kugle med centrum $\boldsymbol{x}$ og radius $r > 0$ således at $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq S$. Og fra definitionen af union, $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq S \cup T$. Dvs. $S \cup T$ er også en åben mængde.

Antag nu at $\boldsymbol{x} \in S \cap T$ i stedet. Hvis $S \cap T = \varnothing$ er $S \cap T$ trivielt åben. Hvis $S \cap T \neq \varnothing$ så eksisterer der et $\boldsymbol{x} \in S \cap T$. Siden S og T er åbne, findes der positive tal, r_S og r_T, således at $B(\boldsymbol{x}, r_S) \subseteq S$ og $B(\boldsymbol{x}, r_T) \subseteq T$. Definer nu $r = \min\{r_S, r_T\}$ og du kan være sikker på, at $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq S \cap T$. Dvs. $S \cap T$ er en åben mængde.

Del 2: lukkede mængder. Brug del 1: Hvis S og T er lukkede mængder, så er $\mathbb{R}^n \backslash S$ og $\mathbb{R}^n \backslash T$ åbne $\Rightarrow \{\mathbb{R}^n \backslash S\} \cup \{\mathbb{R}^n \backslash T\}$ er åben og $\{\mathbb{R}^n \backslash S\} \cap \{\mathbb{R}^n \backslash T\}$ er åben. Fra De Morgans lov[1] kan vi således konstatere, at hhv. $\mathbb{R}^n \backslash \{S \cap T\}$ og $\mathbb{R}^n \backslash \{S \cup T\}$ er åbne. Deraf følger det $S \cap T$ er lukket og $S \cup T$ er lukket.

[1]Lad $A^{\complement}$ være den komplementære mængde til A (dvs. "ikke A"), da siger De Morgans lov at $A^{\complement} \cap B^{\complement} = (A \cup B)^{\complement}$ samt $A^{\complement} \cup B^{\complement} = (A \cap B)^{\complement}$.

Sydsæter 7.1.7

(a) Lad A_i være åbne mængder $\forall i \in I = \{1, 2, ..., n\}$. Dersom $\boldsymbol{x} \in \cup_{i\in I} A_i$, så findes der en mængde A_i, for et givent i, således at $\boldsymbol{x} \in A_i$. Men A_i er åben, så der findes en kugle med radius > 0 sådan at $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq A_i$. Fra definitionen af union gælder det derfor at $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq \cup_{i\in I} A_i$, hvorfor $\cup_{i\in I} A_i$ er åben.

(b) Lad A_i være lukkede mængder $\forall i \in I$. Da er $\mathbb{R}^n \backslash A_i$ åbne mængder og (fra (a)) $\cup_{i\in I}\{\mathbb{R}^n \backslash A_i\}$ er en åben mængde. De Morgans lov bebuder at $\cup_{i\in I}\{\mathbb{R}^n \backslash A_i\} \equiv \mathbb{R}^n \backslash \{\cap_{i\in I} A_i\}$. Så $\mathbb{R}^n \backslash \{\cap_{i\in I} A_i\}$ er åben, hvorfor $\cap_{i\in I} A_i$ er lukket.

(c)(i) Lad A_i være åbne mængder $\forall i \in I$. Hvis $\cap_{i\in I} A_i = \varnothing$ er intersektionen trivielt åben. Hvis dette ikke er tilfældet, findes der et $\boldsymbol{x} \in \cap_{i\in I} A_i$. Idet hver A_i er åben, har vi $B(\boldsymbol{x}, r_i) \subseteq A_i$ for et givent r_i for alle $i \in I$. Og **da der kun er endeligt mange mængder**, giver det mening at definere $r = \min\{r_1, r_2, ..., r_n\}$, hvorfra vi kan være sikre på at $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq \cap_{i\in I} A_i$. Dvs. $\cap_{i\in I} A_i$ er åben.

(c)(ii) Bevisesteknik som i (b). Brug (c)(i) og De Morgans lov.

Opgave 19

A er begrænset, så der findes et tal m således at $||x|| \leq m$ for alle $x \in A$. Ethvert åbent interval om $\sup A$ indeholder et element fra A, da $\sup A$ er det mindste overtal. Ydermere indeholder det et element udenfor A, da $\sup A$ er et overtal. Altså ligger $\sup A$ i afslutningen af A. Ligeledes bevises inf udsagnet.

Øvelse 5.6

Vi kan skrive ligningerne

$$(3+i)x + (1-2i)y = 1$$
$$(2+i)x + (1-i)y = i$$

i matrix form $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$:

$$\begin{pmatrix} 3+i & 1-2i \\ 2+i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Brug nu formlen for 2×2 matrix inversion:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} 1-i & -1+2i \\ -2-i & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

hvor $\det \boldsymbol{A} = (3+i)(1-i) - (2+i)(1-2i) = i$. Ved at bruge reglen for division af komplekse tal får vi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 2+i \\ -1+2i & 1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 2+3i \end{pmatrix}.$$

Dvs. $x = -2+i$ og $y = 2+3i$.

CHAPTER 7

Ugeseddel 7, Uge 43

Opgave 7.2.1

DEFINITION 5. En følge $\{\boldsymbol{x}_k\}$ in $\mathbb{R}^n$ **konvergerer** mod punktet $\boldsymbol{x}$, dersom der, for ethvert $\epsilon > 0$, findes et $N \in \mathbb{N}$ sådan at $||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}|| < \epsilon$ for alle $k \geq N$. Her definerer vi

$$||\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}||^2 = |x_k^{(1)} - x^{(1)}|^2 + ... + |x_k^{(n)} - x^{(n)}|^2, \tag{4}$$

hvor $x_k^{(j)}$ er det $j$de komponent af $\boldsymbol{x}_k$, medens $x^{(j)}$ er det $j$de komponent af $\boldsymbol{x}$.

THEOREM 4. At bevise konvergensen af $\{\boldsymbol{x}_k\}$ til $\boldsymbol{x}$ er det samme som at bevise konvergensen af hver af komponenterne. Se Sydsæter opg. 7.2.5.

(a) Lad $\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right)$. Følgen konvergerer mod $\boldsymbol{x} = (0, 1)$ thi $x_k^{(1)} = \frac{1}{k} \to 0$ og $x_k^{(2)} = 1 + \frac{1}{k} \to 1$. Et formelt bevis udføres som i ugeseddel 2.

(b) Idet $x_k^{(2)} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \to e$ når $k \to \infty$ (se GG Eksempel 2.11) gælder det, at $\boldsymbol{x}_k = \left(1 + \frac{1}{k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)$ konvergerer mod $\boldsymbol{x} = (1, e)$.

(c) Følgen $\boldsymbol{x}_k = \left(k, 1 + \frac{3}{k}\right)$ konvergerer ikke, thi følgen $x_k^{(1)} = k$ konvergerer ikke (når indeks $k \to \infty$ så går $x_k^{(1)} \to \infty$).

(d) Ved at skrive $x_k^{(1)} = \frac{k+2}{3k}$ som $x_k^{(1)} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{k}\right)$ ser man, at $x_k^{(1)} \to \frac{1}{3}$ når $k \to \infty$. Ydermere, idet $\forall k : (-1)^k \in \{-1, 1\}$ gælder det, at $x_k^{(2)} = \frac{(-1)^k}{2k} \to 0$ når $k \to \infty$. Altså konvergerer $\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{k+2}{3k}, \frac{(-1)^k}{2k}\right)$ mod $\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Opgave 7.2.6

Lad $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en vilkårlig transformation.

(a) Lad U være en universel mængde og $A \subset U$. Vi definerer $A^{\complement}$ som komplementærmængden til A dvs. $A^{\complement} = U \backslash A$. Antag at $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{f}^{-1}(T)]^{\complement}$, da kan vi ækvivalent sige at $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{f}^{-1}(T) \Leftrightarrow \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \neq T \Leftrightarrow \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in T^{\complement} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathbf{f}^{-1}(T^{\complement})$, hvorfor $[\mathbf{f}^{-1}(T)]^{\complement} = \mathbf{f}^{-1}(T^{\complement})$.

(b) Lad $\boldsymbol{x} \in \mathbf{f}^{-1}(A \cap B)$. Da kan vi ækvivalent skrive $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in A \cap B \Leftrightarrow \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in A$ og $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in B \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathbf{f}^{-1}(A)$ og $\boldsymbol{x} \in \mathbf{f}^{-1}(B) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathbf{f}^{-1}(A) \cap \mathbf{f}^{-1}(B)$. Altså er $\mathbf{f}^{-1}(A \cap B) = \mathbf{f}^{-1}(A) \cap \mathbf{f}^{-1}(B)$.

(c) Lad $\boldsymbol{x} \in \mathbf{f}^{-1}(A \cup B)$. Da kan vi ækvivalent skrive $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in A \cup B \Leftrightarrow \mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in A$ eller $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) \in B \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathbf{f}^{-1}(A)$ eller $\boldsymbol{x} \in \mathbf{f}^{-1}(B) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathbf{f}^{-1}(A) \cup \mathbf{f}^{-1}(B)$. Altså er $\mathbf{f}^{-1}(A \cup B) = \mathbf{f}^{-1}(A) \cup \mathbf{f}^{-1}(B)$.

Opgave 7.2.7

Lad $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en vilkårlig transformation.

(a) Vi skal vise at (i) $\mathbf{f}(A \cup B) \subseteq \mathbf{f}(A) \cup \mathbf{f}(B)$ og ligeledes (ii) $\mathbf{f}(A \cup B) \supseteq \mathbf{f}(A) \cup \mathbf{f}(B)$. Betragt første del: antag at $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A \cup B)$ da findes der et $\boldsymbol{x} \in A \cup B$ således at $\boldsymbol{y} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x})$. Idet $\boldsymbol{x} \in A \cup B$ gælder det, at $\boldsymbol{x} \in A$ eller $\boldsymbol{x} \in B$. Hvis $\boldsymbol{x} \in A$ da er $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A)$. Hvis $\boldsymbol{x} \in B$ da er $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(B)$. Dvs. under alle omstændigheder er $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A) \cup \mathbf{f}(B)$. Således har vi bevist at $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A \cup B) \Rightarrow \boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A) \cup \mathbf{f}(B)$, hvilket svarer til del (i). For at bevise del (ii) antager vi, at $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A) \cup \mathbf{f}(B)$. Dvs. $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A)$ eller $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(B)$. Hvis førstnævnte, da eksisterer der et $\boldsymbol{x} \in A$ således at $\boldsymbol{y} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x})$. Hvis sidstnævnte, da findes der et $\boldsymbol{x} \in B$ således at $\boldsymbol{y} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x})$. Dvs. det krævne $\boldsymbol{x}$ med egenskaben $\boldsymbol{y} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x})$ ligger i $A \cup B$, hvorfor $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A \cup B)$.

(b) Vi skal vise at $\mathbf{f}(A \cap B) \subseteq \mathbf{f}(A) \cap \mathbf{f}(B)$. Antag at $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A \cap B)$, da findes der et $\boldsymbol{x} \in A \cap B$ således at $\boldsymbol{y} = \mathbf{f}(\boldsymbol{x})$. Det gælder altså, at $\boldsymbol{x} \in A$ samt $\boldsymbol{x} \in B$. Således er $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A)$ og $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(B)$, hvorfor $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A) \cap \mathbf{f}(B)$. Vi har altså vist at $\boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A \cap B) \Rightarrow \boldsymbol{y} \in \mathbf{f}(A) \cap \mathbf{f}(B)$.

    BEMÆRK: her gælder det omvendte udsagn (converse statement) ikke, dvs. det er falskt at $\mathbf{f}(A \cap B) \supseteq \mathbf{f}(A) \cap \mathbf{f}(B)$. Bevis: betragt $f(x) = \cos x$ og lad $A = [-\frac{\pi}{2}, \pi]$ og $B = [-\pi, \frac{\pi}{2}]$. Da er $A \cap B = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ og $\cos(A \cap B) \in [0, 1]$. Imidlertid er $\cos A \in [-1, 1]$ og $\cos B \in [-1, 1]$ så $\cos A \cap \cos B \in [-1, 1]$. Ergo: $\cos(A \cap B) \not\supseteq \cos(A) \cap \cos(B)$.

Opgave 7.1.13

Antag S og T er delmængder af $\mathbb{R}^n$.

(a) **Sandt**. Mængden S er **lukket** dersom den indeholder alle sine randpunkter, ∂S. Vi definerer **tillukningen** af (en vilkårlig mængde) S som mængden selv samt alle associerede randpunkter: $\overline{S} = S \cup \partial S$. Det gælder åbenlyst at S er lukket hvis og kun hvis $S = \overline{S}$.

(b) **Sandt**. Det **indre** af mængden S betegnes med S°. S° beskriver alle punkter i S omkring hvilke man kan tegne en n-kugle med radius > 0, men hvor n-kuglen stading er en delmængde af S. Endvidere siger vi, at S er **åben**, dersom alle punkterne i S er indre punkter i S. Det gælder altså at S er åben hvis og kun hvis $S = S^\circ$.

(c) **Falskt**. Antag at S er en åben mængde: dvs. at omkring ethvert punkt $\boldsymbol{x} \in S$ eksisterer der et $r > 0$ således at $B(\boldsymbol{x}, r) \subseteq S$. Imidlertid har enhver n-kugle om et vilkårligt punkt i ∂S både elementer i S og udenfor S. Så generelt gælder det at $\partial S \nsubseteq S$.

(d) **Sandt**. Antag at S er åben og T vilkårlig (åben, lukket eller ingen af delene). Det gælder at $S \cap \overline{T} \subseteq \overline{S \cap T}$. Lad $\boldsymbol{x} \in S \cap \bar{T}$. Tilstrækkelig små åbne kugler om $\boldsymbol{x}$ indeholder punkter fra $S \cap T$: Lad nemlig $R > 0$ være sådan at $B(\boldsymbol{x}, R) \subseteq S$. Enhver kugle om $\boldsymbol{x}$ med radius $< R$ indholder et punkt fra T og det punkt ligger også i S.

Lidt om Kontinuitet

Theorem 5. Lad $f : A \mapsto \mathbb{R}$ hvor $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og antag at $\boldsymbol{a} \in A$. Da siger vi at f er kontinuert i $\boldsymbol{a}$, hvis der for alle $\epsilon > 0$ eksisterer et $\delta > 0$ således at

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < \delta \text{ og } \boldsymbol{x} \in A \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \epsilon.$$

En funktion $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ er kontinuert i en mængde $B \subset A$, hvis den er kontinuert i alle punkter i B, og kontinuert hvis den er kontinuert i alle punkter i domænet A.

Mere intuitivt kan vi sige, at er f kontinert i $\boldsymbol{a}$ dersom følgende gælder: for at alle $f(\boldsymbol{x})$ værdier forbliver i et lille nabolag omkring $f(\boldsymbol{a})$, så skal vi simpelthen bare vælge en region lille nok for $\boldsymbol{x}$ værdier omkring $\boldsymbol{a}$ - og dette kan lade sig gøre uanset hvor lille $f(\boldsymbol{x})$ nabolaget er.

Egenskaber. Det er oppertunt at bruge notationen

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$$

for kontinuitet i $\boldsymbol{a}$ (når græsen eksisterer). Det gælder, at

- Liniaritet 1: $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} cf(\boldsymbol{x}) = c \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})$, hvor c er en konstant.
- Linearitet 2: $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}}(f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) + \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$.
- Produktfunktioner: $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) \cdot \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$.
- Kvotientfunktioner: $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})/g(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})/ \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} g(\boldsymbol{x})$ dersom nævneren er ulig nul.

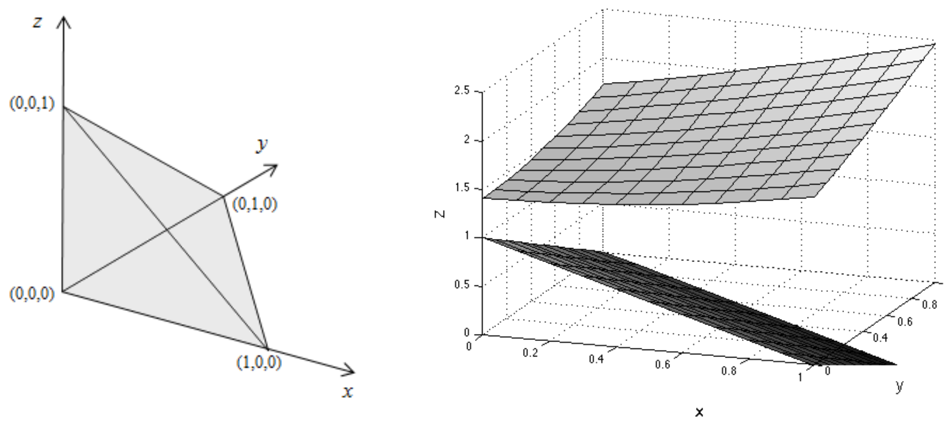
Opgave 20

Vi skal vise at funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = x^3 e^{-x} - \frac{1+x}{5-x^2}$$

antager både en maksimumværdi og en minimumværdi i mængden $S = [-2, 0] \cup [1, 2]$. Vi bemærker følgende:

- S er en kompakt region - dvs. den er både lukket (intervallerne er lukkede) og begrænset (alle $x \in S$ har egenskaben $|x| \leq 2$).
- f er kontinert i S. Godt nok er nævneren i brøken 0 når $x = \sqrt{5}$, men $\sqrt{5} \notin S$. En mere systematisk redegørelse kan foretages ved at vise, at $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = e^{-x}$, $f_3(x) = -(1+x)$ og $f_4(x) = 5 - x^2$ alle er kontinuerte i S og dernæst bruge ovenstående egenskaber.



(a) Mængden S som udgør vores domæne.   (b) Fladerne $z + y + z = 1$ og $2 + (x+y)^2 - z^2 = 0$.

FIGURE 1. **(a)** Den gråskalerede pyramide med hjørnerne $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ og $(0,0,1)$ udgør regionen S. S er defineret som alle koordinater i $\mathbb{R}^3$ som opfylder $x \geq 0, y \geq 0$ og $z \geq 0$ samt $0 \leq x+y+z \leq 1$. $x+y+z = d$ er ligningen for et plan med normalvektor $(1,1,1)/\sqrt{3}$ og afstand $d/\sqrt{3}$ mellem planet og origo. Bemærk at S er lukket (alle pyramidens flader er inkluderet) og begrænset (alle afstande mellem punkter i S og origo er ≤ 1). Altså er S kompakt. **(b)** Nævneren i funktion f er ej nul i domænet S. Plotter vi fladen $2 + (x+y)^2 - z^2 = 0$ ligger den tydeligvis over S.

Ud fra dette, kan vi nøjes med at referere til **ekstremværdisætningen** (Sydsæter sætning 7.2.7) som dikterer:

THEOREM 6. Antag at $f(\boldsymbol{x})$ er en kontinuert funktion defineret over en kompakt mængde $S \subset \mathbb{R}^n$. Da har f både maksimums- og minimumspunkter i S, dvs. der findes punkter $\boldsymbol{c}$ og $\boldsymbol{d}$ i S således at $f(\boldsymbol{c}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{d})$ for alle $\boldsymbol{x} \in S$.

Opgave 21

Vi skal vise at funktionen $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x,y,z) = \frac{x^4 y - z e^{x^2}}{2 + (x+y)^2 - z^2}$$

antager både en maksimumværdi og en minimumværdi i mængden $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 0 \leq x+y+z \leq 1\}$. Grafisk kan vi fremstille S som i figur 1(a).

Vi bemærker nu følgende:

- Regionen S er kompakt. En forklaring på dette er givet i billedteksten (a).
- f er kontinuert i regionen S. Dette kræver en smule overvejelse. Som udgangspunkt er tælleren kontinuert, da den udelukkende består af kontinuerte funktioner. Nævneren derimod kan volde propblemer, da den kan gå hen at blive nul. Vi viser nu, at nævneren er $\neq 0$ dersom vi begrænser os til domænet S. Dette kan gøres på følgende vis: betragt nul-hyperfladen $2 + (x+y)^2 - z^2 = 0$. Vi kan

omskrive denne ligning som $z = \pm\sqrt{2 + (x+y)^2}$. Men idet $z \geq 0$ ignorerer vi den negative løsning. Spørgsmålet er nu hvor $z = z(x,y)$ antager sit minimum. En hurtig differentiering viser, at dette sker langs $y = -x$ - altså er den minimale hyperfladeværdi $z = \sqrt{2}$. Men i S kan z maksimalt antage værdien $z = 1$. Nul-hyperfladen skærer altså ikke domænet S af vores funktion f, hvorfra vi konkluderer at f er kontinuert i S.

Ekstremværdisætningen implicerer nu, at der eksisterer et minimum og et minimum i S.

Opgave 2, Eksamen ved HA, sommeren 2007

Betragt polynomiet

$$f(z) = (z + 1 - \sqrt{3}i)^2(z^2 - 2z + 5).$$

(a) Første faktor, $(z+1-\sqrt{3}i)^2$, implicerer at $f(z)$ har roden $z = -1+\sqrt{3}i$ (af multiplicitet 2 jf. eksponenten). For at bestemme de resterende to rødder må vi finde rødderne til andengradsligningen $g(z) = z^2 - 2z + 5$. Ved at bruge den kvadratiske formel finder vi at $g(z) = 0 \Rightarrow z = 1 \pm 2i$. Alt i alt har vi altså følgende tre **distinkte** rødder til $f(z)$:

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i \text{ (multiplicitet 2)}, \quad z_2 = 1 + 2i, \quad z_3 = 1 - 2i.$$

(b) Vi ønsker at bestemme produktet $\alpha = z_1^2 \cdot z_2 \cdot z_3$. Det kan vises, at $z_1^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$ og at $z_2 \cdot z_3 = 5$ (her er der er igen imaginærdel, idet der er tale om et komplekst tal multipliceret med dets konjugerede). Altså er $\alpha = -10 - 10\sqrt{3}i$.

(c) Modulus af et komplekst tal svarer til afstanden mellem mellem origo og det komplekse tal i det komplekse plan. For αs vedkommende betyder det

$$|\alpha| = \sqrt{(-10)^2 + (-10\sqrt{3})^2} = \sqrt{100 + 300} = \sqrt{400} = 20.$$

Argumentet af et komplekst tal svarer til vinklen målt fra den positive reelle akse, mod uret, hen til det komplekse tals afstandsvektor. Det bemærkes at α ligger i tredie kvardrant i det komplekse plan. Altså er må $\arg\alpha$ være vinkel π plus en vinkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, som bestemmes via elementær trigonometri for retvinklede trekanter. Helt konkret:

$$\arg\alpha = \pi + \theta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{10\sqrt{3}}{10}\right) = \pi + \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

CHAPTER 8

Ugeseddel 8, Uge 44

Opgave 22

Lad $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, hvor

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x - 2y^2 \\ x^2 + 5y \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{g}(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \end{pmatrix}$$

Per definition er $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(u,v) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{g}(u,v))$. Sætter vi $x = u+v$ og $y = u-v$ ind i $\mathbf{f}$ får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \circ \mathbf{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 3(u+v) - 2(u-v)^2 \\ (u+v)^2 + 5(u-v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3u + 3v - 2(u^2 - 2uv + v^2) \\ (u^2 + 2uv + v^2) + 5u - 5v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3u + 3v - 2u^2 + 4uv - 2v^2 \\ u^2 + 2uv + v^2 + 5u - 5v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Således er Jacobi-matricen for $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(u,v)$:

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g}'(u,v) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f \circ g_1}{\partial u} & \frac{\partial f \circ g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f \circ g_2}{\partial u} & \frac{\partial f \circ g_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4u + 4v & 3 + 4u - 4v \\ 2u + 2v + 5 & 2u + 2v - 5 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Kædereglen dikterer at $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}'(u,v) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(u,v))\mathbf{g}'(u,v)$, hvor

$$\mathbf{g}'(u,v) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{f}'(\mathbf{g}(u,v)) \equiv \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(g_1,g_2)}$$

dvs.

$$\mathbf{g}'(u,v) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{f}'(\mathbf{g}(u,v)) \equiv \left.\begin{pmatrix} 3 & -4y \\ 2x & 5 \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(u+v,u-v)} \tag{6}$$

hvorfor

$$\mathbf{f}'(\mathbf{g}(u,v))\mathbf{g}'(u,v) = \begin{pmatrix} 3 & -4(u-v) \\ 2(u+v) & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 4u + 4v & 3 + 4u - 4v \\ 2u + 2v + 5 & 2u + 2v - 5 \end{pmatrix},$$

hvilket naturligvis er identisk med (5). Vi har altså demonstreret kædereglens *generelle* validitet for funktionerne $\mathbf{f}$ og $\mathbf{g}$.

Vi anskuer nu det konkrete tilfælde hvor $(u,v) = (1,1)$ og $(x,y) = (u+v, u-v) = (2,0)$. Her gælder det for ligning (5) at

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g}'(1,1) = \begin{pmatrix} 3 - 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 + 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ydermere, ved at bruge matricerne i ligning (6) får vi, at

$$\mathbf{f}'(2,0)\mathbf{g}'(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & -4\cdot 0 \\ 2\cdot 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix},$$

hvilket til ingens overraskelse er i overensstemmelse med $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}'(1,1)$.

Opgave 23

Lad $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, og $\mathbf{g} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ hvor

$$\mathbf{f}(x,y) = x^3 + y^2 + xy \quad \text{og} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$\mathbf{f}'(x,y) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + y & 2y + x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) = t^3 + (t^2)^2 + t\cdot t^2 = t^4 + 2t^3$. Således er

$$\mathbf{f}\circ\mathbf{g}'(t) = \frac{\partial \mathbf{f}\circ\mathbf{g}}{\partial t} = 4t^3 + 6t^2.$$

Ydermere er

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(\mathbf{g}(t))\mathbf{g}'(t) &= \begin{pmatrix} 3x^2 + y & 2y + x \end{pmatrix}|_{(x,y)=(t,t^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3t^2 + t^2 & 2t^2 + t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4t^2 & 2t^2 + t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \\ &= 4t^2 + 4t^3 + 2t^2 = 4t^3 + 6t^2, \end{aligned}$$

så kædereglen, $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(t))\mathbf{g}'(t)$, holder altså også her.

Opgave 24

Lad $\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h},\mathbf{k} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ hvor

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \\ -x^4 + 2x^2y^2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{g}(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 - 2u^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}(s,t) = \begin{pmatrix} s \\ \sqrt{s^2 + t^2} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{k}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Per definition $\mathbf{g}\circ\mathbf{h}\circ\mathbf{k}(x,y) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{k}(x,y)))$.

$$\mathbf{h}(\mathbf{k}(x,y)) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ \sqrt{x^4 - 2x^2y^2 + 2y^4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{k}(x,y))) &= \begin{pmatrix} (x^2-y^2)^2 \\ \sqrt{x^4-2x^2y^2+2y^4}^2 - 2(x^2-y^2)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^4-2x^2y^2+y^4 \\ x^4-2x^2y^2+2y^4-2(x^4-2x^2y^2+y^4) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x^4-2x^2y^2+y^4 \\ -x^4+2x^2y^2 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x,y).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}'(1,-2) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(1,-2)} \\
&= \begin{pmatrix} 4x^3-4xy^2 & -4x^2y+4y^3 \\ -4x^3+4xy^2 & 4x^2y \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(1,-2)} \\
&= \begin{pmatrix} 4\cdot 1^3 - 4\cdot 1\cdot(-2)^2 & -4\cdot 1^2\cdot(-2)+4\cdot(-2)^3 \\ -4\cdot 1^3+4\cdot 1\cdot(-2)^2 & 4\cdot 1^2\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -24 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sydsæter 5.2.1

Betragt $\mathbf{y} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ defineret som

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(1-x_2) \\ x_1x_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Jacobi-determinanten er givet ved

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x_2 & -x_1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = (1-x_2)x_1 - (-x_1)x_2 = x_1.$$

Det bemærkes altså, at funktionen $\mathbf{y}$ ikke er injektiv, idet $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ for alle x_2 så længe $x_1 = 0$. Således begrænser vi os hér til domænet $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \neq 0\}$. **BEMÆRK:** det er i sig selv ikke nok at stipulere $\mathcal{J} \neq 0$, i en vilkårlig mængde A for at konkludere, at $\mathbf{f}$ er injektiv i hele A. Det eneste der følger er et resultat om lokal invertibilitet, se bl.a. Sydsæter 5.2.3, 5.2.4 samt eksempel 1.

Idet $y_1 = x_1 - x_1x_2$ og $y_2 = x_1x_2$ er $y_1 = x_1 - y_2$ dvs. $x_1 = y_1 + y_2$. Sætter vi dette udtryk ind i udtrykket for y_2 får vi $x_2 = y_2/(y_1+y_2)$, hvor $y_1 + y_2 = x_1 \neq 0$. Den inverse trasformation er altså givet ved $\mathbf{x} : \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 | y_1 + y_2 \neq 0\} \mapsto \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \neq 0\}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ \frac{y_2}{y_1+y_2} \end{pmatrix}.$$

Betragt nu rektanglet i (x_1,x_2)-planet som er givet ved hjørnerne $A_{\mathbf{x}} = (1, \frac{1}{2})$, $B_{\mathbf{x}} = (1, \frac{2}{3})$, $C_{\mathbf{x}} = (2, \frac{1}{2})$ og $D_{\mathbf{x}} = (2, \frac{2}{3})$. Indsættes disse hjørnepunkter i ligning (7) får vi de modsvarende (y_1,y_2) koordinater, nemlig $A_{\mathbf{y}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $B_{\mathbf{y}} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $C_{\mathbf{y}} = (1,1)$ og $D_{\mathbf{y}} = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$. Ydermere bemærkes det, at vertikale og horisontale linier i (x_1,x_2)-planet afbildes på rette linier i (y_1,y_2)-planet. Mere konkret, lad $x_1 = \alpha$ være en konstant, da giver (7) os

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

hvilket er en ret linie. Ligeledes, lader vi $x_2 = \beta$ være konstanten får vi

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1-\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

hvilket igen er en ret linie. Det bemærkes, at vertikale linier i (x_1, x_2) afbildes på rette linier (y_1, y_2) med *samme hældningskoefficient* (så længe α har samme fortegn), mens de horisontale linier afbildes på rette linier med *skiftende hældningskoefficient*. Alt i alt følger det, at rektangel $ABCD$ afbildes på en "roteret" trapez under $\mathbf{y}$.

Sydsæter 5.2.2

Vi har følgende transformation mellem $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^2$:

$$u = ax + by, \qquad v = cx + dy, \tag{8}$$

hvor det oplyses at a, b, c og d er konstanter ikke alle lig nul. Jacobi-determinanten er givet ved

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{9}$$

oplyses at være lig nul. Således, hvis $ad - bc = 0$ og $a \neq 0$ da kan vi skrive $d = bc/a$. Indsættes dette i (8) får vi:

$$v = cx + \tfrac{bc}{a} y = c\left(x + \tfrac{b}{a} y\right) = \tfrac{c}{a}(ax + by) \equiv \tfrac{c}{a} u,$$

hvilket er en ret linie i (u, v). De andre muligheder behandles tilsvarende.

Opgave 25

(a) En mængde er afsluttet så længe den indegolder **hele** sin rand. Det gælder klart at

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 4, \ln x \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$ (jf. det faktum at y ikke er skarpt større og mindre end funktionerne $\ln x$ og $\sqrt{x}$, men $\geq$ og $\leq$. Ligeledes er x ikke skarpt større end 4, men ≥ 4).

(b) Selvom A er afsluttet, er den ikke kompakt, da den netop ikke er begrænset. Fra GG eksempel 2.9 følger det, at $\sqrt{x}$ vokser hurtigere end $\ln x$. Der findes altså vilkårligt store x som ligger i mængden A.

(c) Funktionen $\mathbf{g} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ givet ved

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t + \cos t \end{pmatrix}$$

er kontinuert, idet samtlige komponenter, e^t og $t + \cos t$, klart er kontinuerte.

(d) Betragt mængden $B = \{t|\mathbf{g}(t) \in A\}$, dvs. alle de punkter t som vha. $\mathbf{g}$ kan projekteres over i værdimængden A. B kan altså også formuleres som $B = \mathbf{g}^{-1}(A)$. Ihukom nu F5 s. 10 punkt 3: en ækvivalent betegnelse for at $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ er kontinuert er at $\mathbf{f}^{-1}(F) \subseteq \mathbb{R}^n$ er afsluttet når $F \subseteq \mathbb{R}^m$ er afsluttet. Det følger altså, at B er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}$.

CHAPTER 9

Ugeseddel 9, Uge 45

Sydsæter 5.3.1

THEOREM 7. **Sætning om implicitte funktioner for ligningen $f(x, y) = 0$.**

Lad $f(x, y)$ være C^1 i mængden $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og lad (x_0, y_0) være et indre punkt i A hvor $f(x_0, y_0) = 0$ og $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$. Da eksisterer der to positive tal δ og ϵ således, at det Kartesiske produkt af intervallerne $I_1 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ og $I_2 = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ ligger i A og

(i) For hvert $x \in I_1$ eksisterer der en entydigt bestemt løsning, y, af ligningen $f(x, y) = 0$ i I_2. Med andre ord: y er en funktion af x i intervallet I_1, hvilket vi betegner ved $y = g(x)$.

(ii) $y = g(x)$ er C^1 over I_1 og første afledte er givet ved

$$\frac{dg}{dx} = -\left[\partial_y f(x, g(x))\right]^{-1} \partial_x f(x, g(x)).$$

Noter: Her anvender vi notationen $\partial_x f(x) \equiv \partial f / \partial x$. Bemærk også at sætningen ikke siger at vi kan løse for y eksplicit i $f(x, y) = 0$. Dette er en sætning som siger, at hvert x (i et potentielt meget lille interval) har en entydigt bestemt løsning y af $f(x, y) = 0$. Slutteligt, bemærk at denne sætning er tilstrækkelig med ikke nødvendig for at y skal defineres som en funktion af x nær (x_0, y_0) jf. eksempelvis Sydsæter Eksempel 2 s. 147.

(a) Betragt funktionen $f(x, y) = y^3 + y - x^3 = 0$ ved $(x_0, y_0) = (0, 0)$. f er C^1 da de respektive afledte er kontinuerte. Idet $f(0, 0) = 0$ og $\partial_y f(0, 0) = 3y^2 + 1|_{(x,y)=(0,0)} = 1$ implicerer punkt (a), at y er en funktion af x i nærheden af $(0, 0)$: $y = g(x)$. Ydermere implicere punkt (b) at

$$g' = -[3y^2 + 1]^{-1}(-3x^2)$$

så $g' = 0$ i $(0, 0)$.

(c) Betragt funktionen $f(x, y) = x^y - y^x = 0$ ved $(x_0, y_0) = (1, 1)$. f er C^1 i en region omkring (1,1) og $f(1, 1) = 0$. Ydermere er $\partial_y f(0, 0) = x^y \ln(x) - xy^{x-1}|_{(x,y)=(1,1)} = 0 - 1 = -1$ (Ihukom at hvis $f(x) = a^x$ kan vi skrive $f(x) = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x \ln(a))$. Dvs. $f' = \exp(x \ln(a)) \ln(a) = a^x \ln(a)$.). Punktet (a) implicerer derfor at y er en funktion af x i nærheden af $(1, 1)$: $y = g(x)$, mens (b) fortæller os at

$$g' = -[x^y \ln(x) - xy^{x-1}]^{-1}(yx^{y-1} - y^x \ln(y))$$

dvs. $g' = 1$ i $(1, 1)$.

Sydsæter 5.3.2

THEOREM 8. **Generel Sætning om implicitte funktioner for ligningen $\mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$.**

Lad $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^m$ være en funktion som er C^1 over en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$. Vi anskuer her $\mathbb{R}^{n+m}$ som det Kartesiske produkt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ og skriver et punkt i dette produkt som $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$. Betragt nu det indre punkt $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ i A hvor $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \mathbf{0}$ og Jacobi determinanten

$$\mathcal{J} \equiv \det\left(\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}}\right) \neq 0$$

for $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ dvs. hvor

$$\det\begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1 & \cdots & \partial_{y_m} f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1} f_m & \cdots & \partial_{y_m} f_m \end{pmatrix} \neq 0$$

for $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = (x_{01}, ..., x_{0n}, y_{01}, ..., y_{0m})$. Da eksisterer der en åben kugle $B(\boldsymbol{x}_0, r_1)$ om $\boldsymbol{x}_0$ og en åben kugle $B(\boldsymbol{y}_0, r_2)$ om $\boldsymbol{y}_0$ med $r_1, r_2 > 0$ således at det Kartesiske produkt af kuglerne ligger i A og

(1) For hvert $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, r_1)$ eksisterer der en entydigt bestemt løsning, $\boldsymbol{y}$, af ligningen $\mathbf{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ i $B(\boldsymbol{y}_0, r_2)$. Med andre ord: $\boldsymbol{y}$ er en funktion af $\boldsymbol{x}$ i mængden $B(\boldsymbol{x}_0, r_1)$, hvilket vi betegner med $\boldsymbol{y} = \mathbf{g}(\boldsymbol{x})$.
(2) $\boldsymbol{y} = \mathbf{g}(\boldsymbol{x})$ er C^1 over $B(\boldsymbol{x}_0, r_1)$ og første afledte er givet ved

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{x}}.$$

(b) Betragt funktion $f(x, y, x) = x + y + z - \sin(xyz) = 0$ ved $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. f består af kontinuerte funktioner og er således C^1. $f(0, 0, 0) = 0$ og Jacobi determinanten er $\partial_z f(0, 0, 0) = 1 - \cos(xyz)xy|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = 1 \neq 0$. Altså kan f skrives på formen $z = g(x, y)$ nær $(0, 0, 0)$. Første afledte af g er givet ved

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\partial_x g \\ \partial_y g\end{pmatrix} &= -[\partial_z f]^{-1}\begin{pmatrix}\partial_x f \\ \partial_y f\end{pmatrix} \\ &= -[1 - \cos(xyz)xy]^{-1}\begin{pmatrix}1 - \cos(xyz)yz \\ 1 - \cos(xyz)xz\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ved $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ har vi $\forall i \forall j \forall k : \cos(x_i x_j x_k)x_j x_k = 0$ så $\partial_x g = -1$ og $\partial_y g = -1$ i $(0, 0, 0)$.

(c) Betragt funktion $f(x, y, x) = e^z - z^2 - x^2 - y^2 = 0$ ved $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$. f består af kontinuerte funktioner og er således C^1. $f(1, 0, 0) = e^0 - 0^2 - 1^2 - 0^2 = 0$ og Jacobi determinanten er $\partial_z f(1, 0, 0) = e^z - 2z|_{(x,y,z)=(1,0,0)} = e^0 - 2 \cdot 0 = 1 \neq 0$. Altså kan

f skrives på formen $z = g(x, y)$ nær $(1, 0, 0)$. Første afledte af g er givet ved

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\partial_x g\\ \partial_y g\end{pmatrix} &= -[\partial_z f]^{-1}\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix}\\ &= -[e^z - 2z]^{-1}\begin{pmatrix}-2x\\ -2y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

I $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ er $e^z - 2z = 1$, $-2x = -2$ og $-2y = 0$, altså er $\partial_x g = 2$ og $\partial_y g = 0$ i (1,0,0).

Sydsæter 5.3.4

Betragt $f(u, v) = e^u \cos v$ og $g(u, v) = e^u \sin v$. Jacobi-determinanten er givet ved

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\partial_u f & \partial_v f\\ \partial_u g & \partial_v g\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}e^u \cos v & -e^u \sin v\\ e^u \sin v & e^u \cos v\end{pmatrix}\\ &= e^{2u}\cos^2 v - (-e^{2u}\sin^2 v)\\ &= e^{2u}(\cos^2 v + \sin^2 v) \equiv e^{2u} \cdot 1 = e^{2u}\end{aligned}$$

Idet $\forall u : e^{2u} > 0$ er Jacobi-determinanten altså overalt forskellig fra nul.

(a) Systemet $e^u \cos v = 0$ og $e^u \sin v = 0$ har igen løsningener. Thi $e^u > 0$ så vi kræver at $\cos v = \sin v = 0$ hvilket åbenlyst ikke kan lade sig gøre (tegn graferne).

(b) Systemet $e^u \cos v = 1$ og $e^u \sin v = 1$ har derimod uendeligt mange løsninger. Dividerer vi sidstnævnte igennem med førstnævnte får vi $\tan v = 1$ som har løsningen $v = \frac{\pi}{4} + n\pi$ hvor $n \in \mathbb{Z}$. Perioden afspejler (som altid) den cyckliske natur af de trigonometriske funktioner. Dvs. $\cos v$ og $\sin v$ enten begge er $1/\sqrt{2}$ eller begge er $-1/\sqrt{2}$. Sidste mulighed er en non-løsning ift. vores ligningssystem, hvorfor vi begrænser os til $v = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$. Idet $\cos v = \sin v = 1/\sqrt{2}$ skal vi således blot finde et u således at $e^u/\sqrt{2} = 1$. Svaret er $u = \ln\sqrt{2}$.

Opgave 26

Betragt funktionen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{1+2} \mapsto \mathbb{R}^2$ givet ved

$$\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x^2 + y^2 - z^2 + 3\\ 3x + 2y + z - 10\end{pmatrix}.$$

Vi skal vise at vektorligningen $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{0}$ bestemmer (x, y) som funktion af z i en omegn af punktet $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$. Dette gøres vha. Theorem 2 hvor $\boldsymbol{x} = z$ og $\boldsymbol{y} = (x, y)$. Mere konkret, bemærk at $\mathbf{f}$ er C^1, at $\mathbf{f}(1, 2, 3) = \mathbf{0}$ samt at Jacobi-determinanten er

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\partial_x f_1 & \partial_y f_1\\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}4x & 2y\\ 3 & 2\end{pmatrix}\\ &= 4x \cdot 2 - 3 \cdot 2y\\ &= 8x - 6y.\end{aligned}$$

I punktet $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ er Jacobi-determinanten $\mathcal{J} = 8 \cdot 1 - 6 \cdot 2 = -4 \neq 0$. Ergo dikterer Theorem 2 eksistensen af en C^1 funktion $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ således at $\binom{x}{y} = \binom{g_1(z)}{g_2(z)}$ nær (1,2,3). Første afledte af denne funktion er givet ved

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} &= -\begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_z f_1 \\ \partial_z f_2 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 4x & 2y \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2z \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{8x-6y} \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ -3 & 4x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2z \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{8x-6y} \begin{pmatrix} -4z-2y \\ 6z+4x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

I $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ er $8x - 6y = -4$, $-4z - 2y = -16$ og $6z + 4x = 22$ hvorfor $\partial_z g_1 = -4$ og $\partial_z g_2 = 5.5$.

Sydsæter 5.3.5

Betragt funktionen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{2+2} \mapsto \mathbb{R}^2$ givet ved

$$
\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 + uv - v^2 + 3 \\ x + y^2 + u^2 + uv - 2 \end{pmatrix}.
$$

Lad $\mathbf{F}(x, y, u, v) = \mathbf{0}$. En tilstrækkelig betingelse for at u og v i denne ligning kan skrives på formen $u = f(x, y)$ og $v = g(x, y)$, nær et punkt (x_0, y_0, u_0, v_0), er at følgende kriterier alle er opfyldt. (I) $\mathbf{F}$ er C^1 (check), (II) $\mathbf{F}(x_0, y_0, u_0, v_0) = \mathbf{0}$ og (III) Jacobi-determinanten $\mathcal{J}$ er ulig nul. Sidstenævnte evalueres således:

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} \partial_u F & \partial_v F \\ \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} v & u - 2v \\ 2u + v & u \end{pmatrix} \\
&= vu - (u - 2v)(2u + v) \\
&= uv - (2u^2 + uv - 4uv - 2v^2) \\
&= -2u^2 + 4uv + 2v^2
\end{aligned}
$$

så kravet er at $\mathcal{J} = -2u_0^2 + 4u_0v_0 + 2v_0^2 \neq 0$ hvis vi skal garantere f og gs eksistens nær (x_0, y_0, u_0, v_0). Et oplagt eksempel på dette er $(2, 1, -1, 2)$ hvor $\mathcal{J} = -2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = -2$. For at beregne $\partial_x f(2, 1), \partial_y f(2, 1), \partial_x g(2, 1)$ og $\partial_y g(2, 1)$ benytter formlen i punkt (2) i Theorem 2.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \partial_u F & \partial_v F \\ \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_x F & \partial_y F \\ \partial_x G & \partial_y G \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} v & u - 2v \\ 2u + v & u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\mathcal{J}} \begin{pmatrix} u & 2v - u \\ -2u - v & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\mathcal{J}} \begin{pmatrix} 2ux + 2v - u & 4vy - 4yu \\ -4ux - 2vx + v & 4uy + 4vy \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

I $(2, 1, -1, 2)$ er $\mathcal{J} = -2$, $2ux + 2v - u = -4 + 4 + 1 = 1$, $4vy - 4yu = 8 + 4 = 12$, $-4ux - 2vx + v = 8 - 8 + 2 = 2$ og $4uy + 4vy = -4 + 8 = 4$. Således er $\partial_x f(2, 1) = \frac{1}{2}, \partial_y f(2, 1) = 6, \partial_x g(2, 1) = 1$ og $\partial_y g(2, 1) = 2$.

Sydsæter 5.3.3

Definer $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{3+3} \mapsto \mathbb{R}^3$ ved

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 - z + u - v - w^3 + 1 \\ -2x + y - z^2 + u + v^3 - w + 3 \\ x^2 + z - u - v + w^3 - 3 \end{pmatrix}$$

og betragt ligningssystemet $\mathbf{f}(x, y, x, u, v, w) = \mathbf{0}$. Funktionen er C^1 og punktet $P = (x, y, z, u, v, w) = (1, 1, 0, -1, 0, 1)$ opfylder ligningssystemet. Theorem 2 siger, at hvis Jacobi-determinanten

$$\mathcal{J} \equiv \det \begin{pmatrix} \partial_u f_1 & \partial_v f_1 & \partial_w f_1 \\ \partial_u f_2 & \partial_v f_2 & \partial_w f_2 \\ \partial_u f_3 & \partial_v f_3 & \partial_w f_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

i P da kan u, v og w lokalt skrives som C^1 funktioner af x, y og z. Dette gælder afjort:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}|_P &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3w^2 \\ 1 & 3v^2 & -1 \\ -1 & -1 & 3w^2 \end{pmatrix} \Bigg|_P = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (0 - 1) + (3 - 1) - 3(-1 - 0) = 4 \neq 0. \end{aligned}$$

For at finde $\partial_x u$, $\partial_x v$ og $\partial_x w$ i P er det oplagt at bruge formlen i Theorem 2 punkt (2). En mere simpel (og direkte) metode er imidlertid bare at differentiere $\mathbf{f}(x, y, z, u, v, w) = \mathbf{0}$ partielt med hensyn til x og indsætte punktet P.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \partial_x u - \partial_x v - 3w^2 \partial_x w \\ -2 + \partial_x u + 3v^2 \partial_x v - \partial_x w \\ 2x - \partial_x u - \partial_x v + 3w^2 \partial_x w \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

dvs.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\bigg|_P &= \begin{pmatrix} \partial_x u - \partial_x v - 3\partial_x w \\ -2 + \partial_x u - \partial_x w \\ 2 - \partial_x u - \partial_x v + 3\partial_x w \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \\ \partial_x w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vælg nu din favoritmetode til at løse 3×3 lineære ligninger på. Eksempelvis Cramers regel:

$$\partial_x u = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}, \quad \partial_x v = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}, \quad \partial_x w = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Svaret er, at $\partial_x u = \frac{5}{2}$, $\partial_x v = 1$ og $\partial_x w = \frac{1}{2}$ i P.

Opgave 1,Eksamen Sommer 07

Se Lykke Rasmussens besvarelse hér.

CHAPTER 10

Ugeseddel 10, Uge 46

THEOREM 9. **Algoritme for løsning af** $\max f(x,y)$ **når** $g(x,y) \le c$**.**

- Dan Lagrange-funktionen:

$$\mathscr{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c).$$

- Beregn de partielle afledte af $\mathscr{L}$ og kræv at de begge er nul:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

- Indfør den **komplementære slækbetingelse:**

$$\lambda \ge 0 \qquad (\lambda = 0 \text{ hvis } g(x,y) < c). \tag{11}$$

- Kræv at (x,y) opfylder uligheden:

$$g(x,y) \le c. \tag{12}$$

- Find alle par (x,y) med tilhørende λ som opfylder (1), (2) og (3). Mindst eet af dem løser problemet, dersom problemet har løsninger.

  NB: betingelse (1) og (2) er kendt som **Kuhn-Tucker-betingelserne**.

THEOREM 10. **Kuhn-Tuckers tilstrækkelige betingelser.**

Vi anskuer det klassiske problem $\max f(x,y)$ når $g(x,y) \le c$. Lad (x^*, y^*) opfyle betingelserne (1), (2) og (3) fra Theorem 1. Hvis Lagrange-funktion $\mathscr{L}(x,y)$ er konkav, da er (x^*, y^*) et optimalt par.

NB: En funktion $f(x,y)$, defineret over en mængde S, er **konkav** over S dersom

$$f(\psi x + (1-\psi)x_0, \psi y + (1-\psi)y_0) \ge \psi f(x,y) + (1-\psi) f(x_0,y_0)$$

for alle (x,y) og (x_0,y_0) i S og for alle $\psi \in (0,1)$. En anden måde at uftrykke dette på, er at en funktion f er konkav, hvis og kun hvis $-f$ en **konveks**.

Sydsæter 8.7.1

(a) Løs $\max -x^2 - y^2$ når $x - 3y \le -10$.

- Lagrange-funktionen er $\mathscr{L} = -x^2 - y^2 - \lambda(x - 3y + 10)$.

- De partielle afledte er (I) $\partial_x \mathscr{L} = -2x - \lambda = 0$ og (II) $\partial_y \mathscr{L} = -2y + 3\lambda = 0$.
- Komplementær slæk: $\lambda \geq 0$ ($\lambda = 0$ hvis $x - 3y < -10$).
- Vi kræver $x - 3y \leq -10$.

Hvis $x - 3y < -10$ er $\lambda = 0$. Dette er ikke en løsning, da de partielle afledte da tvinger $(x, y) = (0, 0)$ (og det tilfredsstiller ikke $x - 3y < -10$). Løser vi derimod for de partielle afledte får vi (i) $\lambda = -2x$ og (ii) $\lambda = \frac{2}{3}y$. Sættes (i) ind i (II) får vi $-6x - 2y = 0$. Sammenholdes dette med $x - 3y = -10$ får vi $(x, y) = (-1, 3)$ med $\lambda = 2$. Den optimale løsning som opfylder alle betingelserne er altså

$$f(-1, 3) = -10.$$

(b) Vi har også løst $\min x^2 + y^2$ når $x - 3y \leq -10$ idet $\min f(x) = \max -f(x)$. Geometrisk set er $z = x^2 + y^2$ en cylindrisk symmetrisk parabolsk flade. $x - 3y = -10$ er et vertikalt plan med normalvektor $(-1, 3, 0)/\sqrt{10}$ og korteste afstand $10/\sqrt{10}$ til origo. Den vinkelrette afstandsvektor skærer altså planet i $(-1, 3, 0)$ hvilket er vores løsning.

Sydsæter 8.7.2

Løs $\max xy$ når $x^2 + 4y^2 \leq 6$.

- Lagrange-funktionen er $\mathscr{L} = xy - \lambda(x^2 + 4y^2 - 6)$.
- De partielle afledte er (I) $\partial_x \mathscr{L} = y - \lambda(2x) = 0$ og (II) $\partial_y \mathscr{L} = x - \lambda(8y) = 0$.
- Komplementær slæk: $\lambda \geq 0$ ($\lambda = 0$ hvis $x^2 + 4y^2 < 6$).
- Vi kræver $x^2 + 4y^2 \leq 6$.

Hvis $x^2 + 4y^2 < 6$ er $\lambda = 0$. De partielle afledte tvinger $(x, y) = (0, 0)$ (og det tilfredsstiller $x^2 + 4y^2 < 6$). Altså har vi hér den første kandidat til en løsning.

Antag nu $x^2 + 4y^2 = 6$ så $\lambda \geq 0$. Løser vi for de partielle afledte får vi (i) $\lambda = \frac{y}{2x}$ og (ii) $\lambda = \frac{x}{8y}$. Sættes (i) ind i (II) får vi $x^2 - 4y^2 = 0$. Sammenholdes dette med $x^2 + 4y^2 = 6$ får vi $(x, y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$ med $\lambda = 0.25$ samt $(x, y) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$ ligeledes med $\lambda = 0.25$. Altså er kandidatløsningerne

$$f(\sqrt{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) = \tfrac{3}{2}, \qquad f(-\sqrt{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = \tfrac{3}{2}, \qquad f(0, 0) = 0.$$

Tydeligvis er den sidste ej optimal ift. de to andre.

Sydsæter 8.7.5

(a) Løs $\max 2 - (x - 1)^2 - e^{y^2}$ når $x^2 + y^2 \leq c$, hvor $c \geq 0$.

- Lagrange-funktionen er $\mathscr{L} = 2 - (x - 1)^2 - e^{y^2} - \lambda(x^2 + y^2 - c)$.
- De partielle afledte er (I) $\partial_x \mathscr{L} = -2(x - 1) - \lambda(2x) = 0$ og (II) $\partial_y \mathscr{L} = -e^{y^2} 2y - \lambda(2y) = 0$.
- Komplementær slæk: $\lambda \geq 0$ ($\lambda = 0$ hvis $x^2 + y^2 < c$).
- Vi kræver $x^2 + y^2 \leq c$.

Ved en lettere omskrivning af (I) og (II) får vi

$$\text{(I)} : x = \frac{1}{1 + \lambda}, \qquad \text{(II)} : -2y(e^{y^2} + \lambda) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Antag $x^2+y^2 < c$ da er $\lambda = 0$. Så $(x,y) = (1,0)$ og $1 < c$. Antag nu at $x^2+y^2 = c$ da er $\lambda \geq 0$. Indsætter vi (I) og (II) i $x^2+y^2 = c$ får vi $(1+\lambda)^{-2} = c \Leftrightarrow 1+\lambda = 1/\sqrt{c}$. Siden $\lambda \geq 0$ er $c \in (0,1]$ og $(x,y) = (\sqrt{c}, 0)$ (Bemærk: når $c = 1$ er $(x,y) = (1,0)$ som før). Konklusion:

$$c \geq 1 : f(1,0) = 1, \qquad 0 < c < 1 : f(\sqrt{c}, 0) = 1 - (\sqrt{c}-1)^2$$

Idet komponenterne i vores Lagrange-funktion er konkave er summen deraf ($\mathscr{L}$) også konkav. Så vi har fundet den optimale løsning.

(b) Vi skal vise, at den optimale værdi af f^* har egenskaben $df^*/dc = \lambda$ i begge tilfælde. Når $c \geq 1$ er $f^*(c) = 1$ så $df^*/dc = 0$ og $\lambda = 0$ så hér passer det altså. Når $c \in (0,1)$ er $f^* = 1 - (\sqrt{c}-1)^2$ så

$$\frac{df^*}{dc} = -\frac{2(\sqrt{c}-1)}{2\sqrt{c}} = -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \frac{1}{\sqrt{c}} - 1 = \lambda$$

så her gælder det også.

Sydsæter 8.7.6

(a) Under antagelsen at et maksimum eksisterer skal vi løse $\max xy + e^z$ når $e^{2z} + x^2 + 4y^2 \leq 6$.

- Lagrange-funktionen er $\mathscr{L} = xy + e^z - \lambda(e^{2z} + x^2 + 4y^2 - 6)$.
- De partielle afledte er (I) $\partial_x \mathscr{L} = y - \lambda(2x) = 0$, (II) $\partial_y \mathscr{L} = x - \lambda(8y) = 0$ og (III) $\partial_z \mathscr{L} = e^z - \lambda(2e^{2z}) = 0$.
- Komplementær slæk: $\lambda \geq 0$ ($\lambda = 0$ hvis $e^{2z} + x^2 + 4y^2 < 6$).
- Vi kræver $e^{2z} + x^2 + 4y^2 \leq 6$.

Antag at $e^{2z} + x^2 + 4y^2 < 6$ sådan at $\lambda = 0$. Fra (III) følger det at $e^z = 0$ hvilket ikke kan lade sig gøre. Derfor må $e^{2z} + x^2 + 4y^2 = 6$ og $\lambda \geq 0$. Isolerer vi λ i hhv. (I), (II) og (III) får vi

$$\text{(i)} : \lambda = \frac{y}{2x}, \qquad \text{(ii)} : \lambda = \frac{x}{8y}, \qquad \text{(iii)} : \lambda = \frac{e^{-z}}{2}.$$

Kombineres (i) og (ii) får vi $x^2 = 4y^2$ (*). Kombineres (i) og (iii) får vi at $e^z = x/y$ dvs. $e^{2z} = x^2/y^2$ som vha. * reducerer til $e^{2z} = 4 \Leftrightarrow z = \ln 2$ (**). Sætter vi * og ** ind i vores restriktion $e^{2z} + x^2 + 4y^2 = 6$ får vi $4 + 2x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Når $x = 1$ implicerer (i) og * at $y = 1/2$. Når $x = -1$ implicerer (i) og * at $y = -1/2$. Det gælder at

$$f(1, 1/2, \ln 2) = f(-1, -1/2, \ln 2) = 2.5.$$

Dette løser problemet, dersom det har en løsning.

(b) For at bevise at maksimum findes gør vi følgende. Hvis vi skriver u i stedet for e^z så er problemet (næsten)

$$\max xy + u \text{ under bibetingelsen } u^2 + x^2 + 4y^2 \leq 6, u \geq 0.$$

Mængden af mulige løsninger er kompakt så den kontinuerte objektfunktion $xy+u$ har et maks jf. esktremværdisætningen. Dette maks ligger forhåbentlig ikke på randen $u = 0$ (prøv om du kan vise dette!), så derfor er det også et maks for $xy + u$ under bibetingelsen $u^2 + x^2 + 4y^2 \leq 6, u > 0$ og det er det oprindelige problem.

Vinter 07/08 Opgave 3

(a) Regionen S er defineret som alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ som opfylder at $x+2y+3z \leq 2$ og $x-5y+z \leq -1$. Vi anskuer altså den mængde som ligger under *begge* planer på samme tid. Intersektionen mellem de to planer er den rette linie $(x,y,z) = (-2.5, 0, 1.5) + \eta(17, 2, -7)$ hvor $\eta \in \mathbb{R}$. S er afsluttet da randen (planerne) er inkluderet. S er imidlertid ikke begrænset da vilkårligt negative tal opfylder ulighederne (vi kan sætte $x \to -\infty$ og holder y, z konstante). Altså er S ikke kompakt.

(b) Metoden fra Theorem 1 kan generaliseres til n variable og m bibetingelser.

- Lagrange-funktionen er $\mathscr{L} = -2x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz - \lambda_1(x + 2y + 3z - 2) - \lambda_2(x - 5y + z + 1)$.
- De partielle afledte er (I) $\partial_x \mathscr{L} = -4x + 2y - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$, (II) $\partial_y \mathscr{L} = -4y + 2x + 2z - 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$, (III) $\partial_z \mathscr{L} = -2z + 2y - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$.
- Komplementær slæk: $\lambda_1 \geq 0$ ($\lambda_1 = 0$ hvis $x + 2y + 3z < 2$). $\lambda_2 \geq 0$ ($\lambda_2 = 0$ hvis $x - 5y + z < -1$).
- Vi kræver $x + 2y + 3z \leq 2$ og $x - 5y + z \leq -1$.

Der er fire tilfælde som skal analyseres:

i. $\underline{x + 2y + 3z < 2 \text{ og } x - 5y + z < -1}$: dvs. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. (I), (II) og (III) implicerer da at $x = y = z = 0$, men det løser ej kravet om at $x - 5y + z < -1$.

ii. $\underline{x + 2y + 3z = 2 \text{ og } x - 5y + z < -1}$: dvs. $\lambda_1 \geq 0$ og $\lambda_2 = 0$. De partielle afledte sammen med bibetingelse 1 giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Løsningen til dette matrix system er $(x, y, z, \lambda_1) = (0.1714, 0.3143, 0.4000, -0.0571)$. Dette opfylder imidlertid ikke kravet om at $\lambda_1 \geq 0$ så det er ej en løsning til det overordnede problem.

iii. $\underline{x + 2y + 3z < 2 \text{ og } x - 5y + z = -1}$: dvs. $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 \geq 0$. De partielle afledte sammen med bibetingelse 2 giver

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Løsningen til dette matrix system er $(x, y, z, \lambda_1) = (0.1154, 0.2692, 0.2308, 0.0769) = (\frac{3}{26}, \frac{7}{26}, \frac{3}{13}, \frac{1}{13})$. Funktionen f antager i dette punkt værdien -0.0385.

iv. $\underline{x + 2y + 3z = 2 \text{ og } x - 5y + z = -1}$: dvs. $\lambda_1 \geq 0$ og $\lambda_2 \geq 0$. De partielle afledte sammen med bibetingelse 1 og 2 giver

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som har løsning $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = (0.1714, 0.3143, 0.4000, -0.0571, 0)$. Tydeligvis er dette problematisk ift. betingelsen $\lambda_1 \geq 0$.

(c) Vi anvender følgende korollar om konkave funktioner: En funktion $f(\boldsymbol{x})$ er konkav over en mængde S hvis og kun hvis Hessian matricen $H[f] = \partial^2 f / \partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{x}^\mathsf{T}$ er negativ semi-definite. Dvs. alle ulige principal minors af $H[f]$ er ≤ 0 og alle lige principal minors af $H[f]$ er ≥ 0 (eller identisk: alle $H[f]$s eigenværdier er mindre end eller lig med nul). Vi får

$$H[f] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vores principal minors er hhv. $M_1 = -4$, $M_2 = 12$ og $M_3 = -8$ (eigenværdierne til $H[f]$ er hhv. $-6.4940, -3.1099$ og -0.3961), hvorfor f er konkav. Vi kan nu appellere til sætning 8.8.1 i Sydsæter: siden $\mathscr{L}$ må være konkav og $\boldsymbol{x}^* = (\frac{3}{26}, \frac{7}{26}, \frac{3}{13})$ er vores (eneste) løsning til problemet, da er $\boldsymbol{x}^*$ optimal: $f(\boldsymbol{x}^*) = -0.0385$.

Opgave 27

Betragt $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R} : f(x, y, z) = z^3 - z - xy \sin z - x + 3y = 0$. Vi skal vise, at z er en funktion af (x, y) nær $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. Til dette formål anvender vi Theorem 2 fra ugeseddel 9. f består af kontinuerte funktioner og er således C^1. Idet $f(0, 0, 0) = 0$ og Jacobi-determinanten er $\partial_z f(0, 0, 0) = 3z^2 - 1 - xy \cos z|_{(x,y,z)=(0,0,0)} = -1 \neq 0$ kan f skrives på formen $z = g(x, y)$ nær $(0, 0, 0)$. Første afledfte er

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \partial_x g \\ \partial_y g \end{pmatrix} &= -[\partial_z f]^{-1} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} \\ &= -[3z^2 - 1 - xy \cos z]^{-1} \begin{pmatrix} -y \sin z - 1 \\ -x \sin z + 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Evalueret i $(0, 0, 0)$ får vi $\partial_x g = -1$ og $\partial_y g = 3$.

CHAPTER 11

Ugeseddel 11, Uge 47

Sydsæter 8.8.1

Løs $\max 1 - x^2 - y^2$ når $x \geq 2$ og $y \geq 3$.

- Lagrange funktionen er $\mathscr{L} = 1 - x^2 - y^2 - \lambda_1(-x+2) - \lambda_2(-y+3)$.
- De partielle afledte er (I) $\partial_x \mathscr{L} = -2x + \lambda_1 = 0$ og (II) $\partial_y \mathscr{L} = -2y + \lambda_2 = 0$.
- Komplementær slæk: $\lambda_1 \geq 0$ ($\lambda_1 = 0$ hvis $x > 2$) og $\lambda_2 \geq 0$ ($\lambda_2 = 0$ hvis $y > 3$).
- Vi kræver at $x \geq 2$ og $y \geq 3$.

i. $\underline{x > 2, y > 3}$: dvs. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Imidltertid giver (I) og (II) $x = y = 0$, hvilket er en modsigelse.
ii. $\underline{x > 2, y = 3}$: dvs. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \geq 0$. (I) implicerer $x = 0$, hvilket er en modsigelse.
iii. $\underline{x = 2, y > 3}$: dvs. $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 = 0$. (II) implicerer at $y = 0$, hvilket er en modsigelse.
iv. $\underline{x = 2, y = 3}$: dvs. $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. (I) og (II) giver sammen $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = 6$ hvilket er konsistent. Så max er $1 - 2^2 - 3^2 = -12$.

$(2,3)$ er i sandhed en optimal løsning jf. $\mathscr{L}$s konkavitet. Endvidere er det en intuitiv løsning da $1 - x^2 - y^2$ er cylindrisk symmetrisk omkring z-axen med globalt maximum i (0,0), hvorfor vi leder efter løsning tættest på origo (som opfylder bibetingelserne).

Sydsæter 8.8.7

Løs $\max 12\ln(x+y+2) - x + y$ når $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x + 2y \leq \frac{5}{2}$.

- Lagrange funktionen er $\mathscr{L} = 12\ln(x+y+2) - x + y - \lambda_1(-x) - \lambda_2(-y) - \lambda_3(x + 2y - \frac{5}{2})$.
- De partielle afledte er (I) $\partial_x \mathscr{L} = \frac{12}{x+y+2} - 1 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0$ og (II) $\partial_y \mathscr{L} = \frac{12}{x+y+2} + 1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0$. Sammen giver de (III) $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 2$.
- Komplementær slæk: $\lambda_1 \geq 0$ ($\lambda_1 = 0$ hvis $x > 0$) og $\lambda_2 \geq 0$ ($\lambda_2 = 0$ hvis $y > 0$) og $\lambda_3 \geq 0$ ($\lambda_3 = 0$ hvis $x + 2y < \frac{5}{2}$).
- Vi kræver at $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $x + 2y \leq \frac{5}{2}$.

i. $\underline{x > 0, y > 0, x + 2y < \frac{5}{2}}$: $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. (III) giver modsigelsen $0 = 2$.
ii. $\underline{x = 0, y > 0, x + 2y < \frac{5}{2}}$: $\Rightarrow \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. (II) $\Rightarrow y = -14$, hvilket modsiger $y \geq 0$.
iii. $\underline{x > 0, y = 0, x + 2y < \frac{5}{2}}$: $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 \geq 0$. (III) $\Rightarrow \lambda_2 = -2$, hvilket modsiger $\lambda_2 \geq 0$.

iv. $\underline{x > 0, y > 0, x + 2y = \frac{5}{2}}$: $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 \geq 0$. Fra (III): $\lambda_3 = 2$. Sammenholdes bibetingelse $x + 2y = \frac{5}{2}$ med (I), $\frac{12}{x+y+2} - 3 = 0 \Leftrightarrow x + y = 2$, får vi at $(x, y) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Dette er en løsning til vores problem og $f(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = 15.6$.

v. $\underline{x = 0, y = 0, x + 2y < \frac{5}{2}}$: $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 = 0$. (I) $\Rightarrow \lambda_1 = -5$, hvilket modsiger $\lambda_1 \geq 0$.

vi. $\underline{x > 0, y = 0, x + 2y = \frac{5}{2}}$: $\Rightarrow \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, \lambda_1 = 0$. $\Rightarrow x = \frac{5}{2}$. (I) giver os $\lambda_3 = \frac{5}{3}$ og (II) giver os $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ hvilket modsiger $\lambda_2 \geq 0$.

vii. $\underline{x = 0, y > 0, x + 2y = \frac{5}{2}}$: $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_3 \geq 0, \lambda_2 = 0$. $\Rightarrow y = \frac{5}{4}$. (II) giver os $\lambda_3 = \frac{61}{26}$ og (III) giver os $\lambda_1 = -\frac{9}{26}$ hvilket modsiger $\lambda_1 \geq 0$.

viii. $\underline{x = 0, y = 0, x + 2y = \frac{5}{2}}$: $\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$. Modsigelsen ligger i $0 = \frac{5}{2}$ (bibetingelse 3).

Vores Lagrange funktion er konkav så iv. er den optimale løsning.

Opgave 28

Betragt ligningssystemet

$$x + 2y + 3z = 7,$$
$$2x - y + z = 4,$$

hvilket kan skrives i vektor-form som

$$x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}.$$

En løsning (x, y, z) kaldes en **basisløsning**, hvis de involverede søjle-vektorer er lineært uafhængige. I $\mathbb{R}^2$ skal vi kun bruge to uafhængige 2D vektorer til at danne en basis. Fra mængden $\{\binom{1}{2}, \binom{2}{-1}, \binom{3}{1}\}$ kan vi vælge præcis tre distinkte par tll at generere en basis i $\mathbb{R}^2$; vi finder altså tre basisløsninger ved at sætte $x = 0$, da $y = 0$ og slutteligt $z = 0$.

- $\underline{x = 0}$: $2y + 3z = 7$ og $-y + z = 4$ har løsning $y = -1$ og $z = 3$.
- $\underline{y = 0}$: $x + 3z = 7$ og $2x + z = 4$ har løsning $x = 1$ og $z = 2$.
- $\underline{z = 0}$: $x + 2y = 7$ og $2x - y = 4$ har løsning $x = 3$ og $y = 2$.

Opgave 29

(a) Betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 &= 2, \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 3, \end{aligned} \tag{13}$$

hvilket i vektorform skrives som

$$x_1\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Generelt bemærkes det, at vi i $\mathbb{R}^3$ skal vi bruge tre uafhængige 3D vektorer til at danne en basis. I princippet kan vi således vælge $5!/(3!2!) = 10$ distinkte basis-sæt i venstresiden til (14) for at generere højresiden $(1, 2, 3)$. Imidlertid bemærker vi hurtigt følgende: da de første tre vektorer er lineært afhængige konstituerer disse samlet ikke en basis af $\mathbb{R}^3$. Endvidere er første vektor, $(2,4,6)$, proportional med højresiden $(1,2,3)$: dvs. så længe vi inkluderer første vektor i vores basis, behøver vi ingen andre for at generere $(1,2,3)$. Slutteligt er $(1,2,3)$ en lineær kombination af $(3,1,2)$ og $(-1,3,4)$ så også hér har en redundans. Tilbage har vi fire distinkte basisløsninger:

- $\underline{x_1 = x_2 = 0}$: $x_3 = -1$, $x_4 = 7$, $x_5 = 5$.
- $\underline{x_1 = x_3 = 0}$: $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_4 = \frac{7}{3}$, $x_5 = \frac{5}{3}$.
- $\underline{x_1 = x_4 = 0}$: $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_5 = 0$.
- $\underline{x_2 = x_3 = 0}$: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$.

(b) Betragt nu programmet P $\max x_1 - x_2 + x_3$ under hensyn til bibetingelserne $x_1, x_2, x_3, x_4, x_4 \geq 0$ samt systemet (13). Det følger umiddelbart at mængden af tilladte løsninger til P er kompakt (lukket og begrænset). Thi (i) randen er inkluderet og (ii) sætter vi en hvilkensomhelst variabel mod det uendelige bryder vi med bibetingelserne. Ergo implicerer ekstremværdisætningen (Sydsæter 7.2.7) at der eksisterer en optimal løsning til P. Den optimale løsning er fundet i opgave (a) og er givet ved $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0)$ hvor $x_1^* - x_2^* + x_3^* = \frac{1}{2}$ (se Bent Fuglede, Sætning 2.1).

Opgave 30

Betragt programmet P: $\max f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + 3x_3$ under hensyn til bibetingelserne $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ og

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Det oplyses at $(1,1,1)$ er en optimal løsning: $f(x_1^*, x_2^*.x_3^*) = f(1,1,1) = 5$. Målet er at finde en optimal basisløsning.

Vi giver hér en rumgeometrisk løsning til problemet, som direkte afspejler hvad dér reelt foregår i beviset til sætning 2.1 i BF. Først og fremmest, bemærk at (15) er ligningerne til to planer, $\mathscr{P}_1$ og $\mathscr{P}_2$, i rummet:

$$\mathscr{P}_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \mathscr{P}_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

hvor $\mathbf{n}_1 \equiv (1,-1,1) \perp \mathscr{P}_1$ og $\mathbf{n}_2 \equiv (2,-3,1) \perp \mathscr{P}_2$.

Det angives at $(1,1,1)$ ligger på intersektionen af disse planer. For at generere hele intersektionen (som er en ret linie i rummet) har vi brug for en retningsvektor $\mathbf{d}$. Til dette formål beregner vi krydsproduktet mellem de to normalvektorer: $\mathbf{d} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (2,1,-1)$. Intersektionen er derfor

$$\ell : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Så længe vi befinder os på ℓ er værdien for f uforandret dvs. $f(1+2\lambda, 1+\lambda, 1-\lambda) = f(1,1,1)$. For af finde en basisløsning skal vi nu bevæge os langs linien fra $(1,1,1)$ indtil vi rammer et punkt hvor een af koordinaterne går i nul. Der er to muligheder (afhængigt af hvilken retning vi går): når $\lambda = 1$ er $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 0)$ og når $\lambda = -\frac{1}{2}$ er $(x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Dette er vores basisløsninger.

Bemærk analogien til beviset: $\mathbf{d} \bullet \mathbf{n}_1 = 0$ og $\mathbf{d} \bullet \mathbf{n}_2 = 0$ så $\mathbf{d}$ er en løsning som viser at $\binom{1}{2}$, $\binom{-1}{-3}$ og $\binom{1}{1}$ er lineært afhængige (dvs. $\mathbf{d} = \mathbf{y}$ i beviset).

Eksamen Sommer 2007 Opgave 4

(a) Betragt funktionen

$$f(x,y,z) = \tan(\tfrac{\pi}{4}(x^2 - y)) + xz^2 + e^{(x+y)z} - 2 = 0.$$

En løsning hertil er $P : (x,y,z) = (\sqrt{2}, 1, 0)$. Bevis:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}, 1, 0) &= \tan(\tfrac{\pi}{4}(2-1)) + \sqrt{2} \cdot 0^2 + e^{(\sqrt{2}+1)0} - 2 \\ &= \tan(\tfrac{\pi}{4}) + e^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0. \end{aligned}$$

For at vise at z kan skrives som en funktion af x, y nær P, $z = g(x,y)$, skal vi vise at f er C^1 nær P (åbenlyst) samt at Jacobi-determinanten er ulig nul i P. Sidstnævnte er

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_P = 2xz + (x+y)e^{(x+y)z}|_P = 0 + (\sqrt{2}+1)e^0 = (\sqrt{2}+1).$$

Siden dette er ulig nul, er $z = g(x,y)$ nær P (jf. de implicitte funktioners sætning).

(b) Første afledte af g i P er givet ved

$$\begin{aligned} \left.\begin{pmatrix} \partial_x g \\ \partial_y g \end{pmatrix}\right|_P &= -[\partial_z f]^{-1} \left.\begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}\right|_P \\ &= -[\sqrt{2}+1]^{-1} \left.\begin{pmatrix} \sec^2(\frac{\pi}{4}(x^2-y))\frac{2x\pi}{4} + z^2 + ze^{(x+y)z} \\ -\sec^2(\frac{\pi}{4}(x^2-y))\frac{\pi}{4} + ze^{(x+y)z} \end{pmatrix}\right|_P \\ &= -[\sqrt{2}+1]^{-1} \left.\begin{pmatrix} 2\frac{2\sqrt{2}\pi}{4} + 0 + 0 \\ -2\frac{\pi}{4} + 0 \end{pmatrix}\right|_P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}+1} \\ \frac{\pi}{2(\sqrt{2}+1)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Betragt nu funktionen

$$\phi(t) = g(\sqrt{1+t^2}, \sin(\tfrac{\pi}{2}t)).$$

Idet $\phi(1) = g(\sqrt{2}, 1)$ er ϕ afgjort C^1 i denne omegn jf. ovenstående. For at beregne første afledte i $t = 1$ (dvs. $(x,y) = (\sqrt{2}, 1)$) anvender vi kædereglen:

$$
\begin{aligned}
\phi'(t) &= \begin{pmatrix} \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} |_P \begin{pmatrix} \partial_t \sqrt{1+t^2} \\ \partial_t \sin(\frac{\pi}{2} t) \end{pmatrix} \Bigg|_{t=1} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}+1} & \frac{\pi}{2(\sqrt{2}+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos(\frac{\pi}{2} t) \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \Bigg|_{t=1} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}+1} & \frac{\pi}{2(\sqrt{2}+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{2}+1}.
\end{aligned}
$$

CHAPTER 12

Ugeseddel 12, Uge 48

Opgave 31

Betragt systemet af formen $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

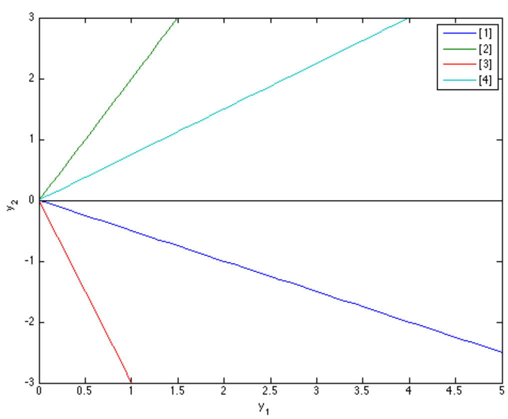
Der eksisterer ingen løsning $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \geq 0$, thi venstresiden i første ligning er da ≥ 0, medens højresiden er negativ. Imidlertid dikterer Farkas alternativ, at hvis ikke der eksisterer en $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ sådan at $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ og $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, da eksisterer der en $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ sådan at $\boldsymbol{y}^\intercal \mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ og $\boldsymbol{y}^\intercal \mathbf{b} < 0$. For vores vedkommende betyder det, at $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ sådan at

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad \text{og} \quad -3y_1 + 4y_2 < 0.$$

Dette system kan omskrives som

$$\begin{array}{lll} [1]: & y_1 + 2y_2 \geq 0 & \Rightarrow \quad y_2 \geq -\frac{1}{2} y_1 \\ [2]: & 2y_1 - y_2 \geq 0 & \Rightarrow \quad y_2 \leq 2y_1 \\ [3]: & 3y_1 + y_2 \geq 0 & \Rightarrow \quad y_2 \geq -3y_1 \\ [4]: & -3y_1 + 4y_2 < 0 & \Rightarrow \quad y_2 < \frac{3}{4} y_1. \end{array}$$

Ved at tegne en graf ses det let, at en mulig løsning til dette er $(y_1, y_2) = (1, 0)$.



Opgave 32

Ihukom, at hvis P er et generelt lineært program af formen

$$\max \mathbf{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} \quad \text{når} \quad [I^*]\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq [I^*]\mathbf{b}, \ \ [I \backslash I^*]\mathbf{A}\boldsymbol{x} = [I \backslash I^*]\mathbf{b}, \ \ [J^*]\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},$$

så er det **duale program**, P', af formen

$$\min \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} \quad \text{når} \quad \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}[J^*] \geq \mathbf{c}^\mathsf{T}[J^*], \ \ \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}[J \backslash J^*] = \mathbf{c}^\mathsf{T}[J \backslash J^*], \ \ \boldsymbol{y}^\mathsf{T}[I^*] \geq \mathbf{0}.$$

Betragt nu programmet P

max	$5x + 4y - 2z$
hvor	$2x + 5y - 11z \leq 7,$
	$3x - y + 9z \leq 2.$

Dette program har uendeligt mange (mulige) løsninger, idet løsningerne udgør rummet som ligger under begge de to planer: $2x + 5y - 11z = 7$ og $3x - y + 9z = 2$.

Det duale program P' har formen

min	$7y_1 + 2y_2$
hvor	$2y_1 + 3y_2 = 5,$
	$5y_1 - y_2 = 4,$
	$-11y_1 + 9y_2 = -2,$
	$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$

Her er der kun een løsning, som findes ved at løse bibetingelserne simultant. Svaret er $(y_1, y_2) = (1, 1)$ hvilket resulterer i den optimale være $7 + 2 = \underline{\underline{9}}$.

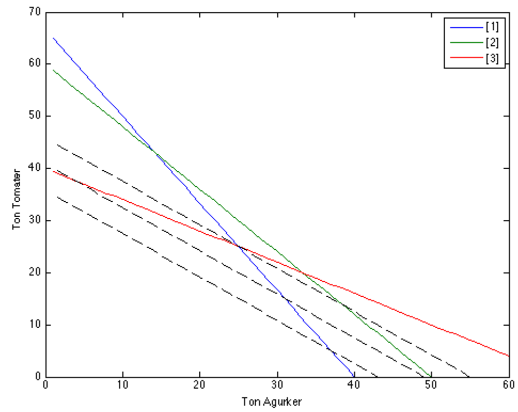
Opgave 33

(a) Betragt programmet P:

max	$5A + 6T$
hvor	$5A + 3T \leq 200,$
	$6A + 5T \leq 300,$
	$3A + 5T \leq 200,$
	$A \geq 0, T \geq 0.$

- A = ton agurker, T = ton tomater.
- Vi tjener 5000 kr per ton agurker og 6000 kr per ton tomater, dvs. i princippet skal vi maksimere $5000A+6000T$, hvilket vi imidlertid kan simplicere til $5A+6T$. Vi har imidlertid maksimalt 2000 m^2 jord, og et ton agurker fylder 50 m^2, medens et ton tomater fylder 30 m^2, hvilket er bibetingelse et (simplificeret).
- Ydermere er kræver dyrkningen 6 m^3 vand per ton agurker og 5 m^3 vand per ton tomater og vi har kun 300 m^3 vand (dette er bibetingelse to).
- Bibetingelse tre dikterer, at dyrkningen af et ton agurker kræver 3 timers arbejskraft og dyrkningen af et ton tomater kræver 5 timers arbejdskraft. Imidlertid har vi kun har 200 timers arbejdskraft til rådighed.

(b) Bibetingelserne kan skrives som [1] $T \leq -\frac{5}{3}A + \frac{200}{3}$, [2] $T \leq -\frac{6}{5}A + 60$ og [3] $T \leq -\frac{3}{5}A + 40$.



Mængden af tilladte løsninger (dvs. regionen under både den røde, grønne og blå linie) er kompakt, så der eksisterer et maksimum til vores problem.

(c) Funktionen som skal maksimeres $\zeta = 5A + 6T$ kan skrives som $T = -\frac{5}{6}A + \frac{\zeta}{6}$. Tegner vi disse niveaukurver (sorte stiplede linier) for forskellige værdier af ζ, ser vi, at maksimum ligger på intersektionen mellem [1]: $T = -\frac{5}{3}A + \frac{200}{3}$ og [3]: $T = -\frac{3}{5}A + 40$ dvs. i $(A, T) = \underline{\underline{(25, 25)}}$ med $\zeta = 275$ [tusinde kr.].

Opgave 34

(a) Betragt programmet P:

$$\begin{array}{ll} \text{max} & 10x_1 - 10x_2 - 3x_3 \\ \hline \text{hvor} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ & 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 - x_4 \leq 3, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

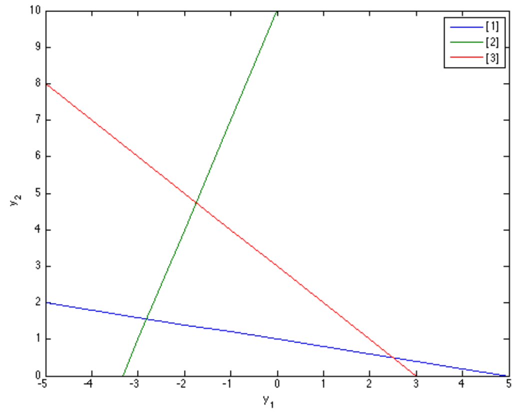
Det duale program P' bliver da

$$\begin{array}{ll} \text{min} & y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ \hline \text{hvor} & 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 10, \\ & 3y_1 + y_2 - 2y_3 \geq -10, \\ & -y_1 + 3y_2 - 4y_3 \geq -3, \\ & y_2 - y_3 = 0, \\ & y_3 \geq 0. \end{array}$$

Dette system kan qua fjerde bibetingelse simplificeres til

$$\begin{array}{ll} \text{min} & y_1 + 5y_2 \\ \hline \text{hvor} & y_1 + 5y_2 \geq 5, \\ & 3y_1 - y_2 \geq -10, \\ & -y_1 - y_2 \geq -3, \\ & y_2 \geq 0. \end{array}$$

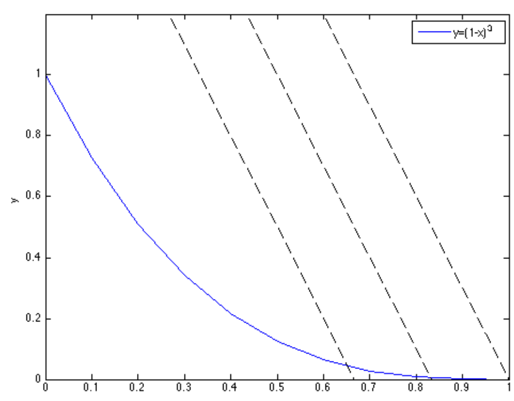
Bibetingelserne kan nu omskrives som [1] $y_2 \geq -\frac{1}{5}y_1 + 1$, [2] $y_2 \leq 3y_1 + 10$, [3] $y_2 \leq -y_1 + 3$ og $y_2 \geq 0$. Plotter vi disse, får vi en kompakt triangulær løsningsmængde:



Fra ekstremværdisætningen eksisterer der et minimum af $\zeta = y_1 + 5y_2$ i denne mængde. Idet ζ har samme hældningskoefficient som bibetingelse [1] må minimum endvidere ligge på den blå side af trekanten f.eks. i $(y_1, y_2) = \underline{\underline{(0,1)}}$ hvor $\zeta = 5$.

Sydsæter 8.9.1

(a) Betragt programmet $P : \max 3x + y$ hvor $y \leq (1-x)^3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Plotter vi funktionen $y = (1-x)^3$ og niveaukurverne $y = -3x + \zeta$ (for forskellige værdier af ζ) ses det let, at det optimale punkt ligger i $(x, y) = \underline{\underline{(1,0)}}$ hvor $\zeta = 3$.



(b) Vi starter med **den præcise formulering for Kuhn-Tuckers nødvendige betingelser:** Antag at $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ løser problemet $\max f(\boldsymbol{x})$ når $g_j(\boldsymbol{x}) \leq b_j$ for $j = 1, ..., m$ (hvor $f, g_1, ..., g_m \in C^1$). Antag endvidere, at **føringsbetingelsen** gælder: dvs. gradienten i $\boldsymbol{x}^*$ til de af funktionerne som er aktive i $\boldsymbol{x}^*$ ("=" ikke "<") er uafhængige. Da eksisterer der <u>entydigt</u> bestemte tal $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sådan at

i.
$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}^*) = 0.$$
ii.
$$\lambda_j \geq 0 \quad (\lambda_j = 0 \text{ hvis } g_j(\boldsymbol{x}^*) < b_j), \quad j = 1, ..., m.$$

I vores konkrete optimeringsproblem er $f(x,y) = 3x + y$, $g_1(x,y) = y - (1-x)^3$, $g_2(x,y) = -x$ og $g_3(x,y) = -y$ med $\forall i : b_i = 0$. Således er gradienterne
$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 3(1-x)^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Det kan vises via den sædvanlige systematiske analyse, at den eneste tilladte løsning til i. og ii. er $(x,y) = (0,1)$ hvor $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (bibetingelse 1 eller 1 og 2 aktive).

(c) Det kan måske undre, at vores løsningsalgoritme ikke umiddelbart isolerer den korrekte løsning fundet i (a): $(x,y) = (1,0)$. Forklaringen er, at mens $y = (1-x)^3$, $y = 0$ og $x > 0$ (dvs. bibetingelse 1 og 3s aktivitet) giver os $(x,y) = (1,0)$, så er $\nabla g_1(1,0)$ og $\nabla g_3(1,0)$ ikke lineært uafhængige (føringsbetingelsen gælder ikke).

Lektionen er, at for virkelig at bestemme løsningen til et givent problem skal vi (I) finde alle tilladte løsninger, hvor føringsbetingelsen svigter (II) finde alle tilladte løsninger, hvor føringsbetingelsen og i. og ii. er opfyldt, (III) finde alle optimumspunkterne blandt ovenstående.

Eksamen Sommer 2007 Opgave 3

Betragt mængden $S \subset \mathbb{R}^3$ defineret ved
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, z \geq 0, xy \geq 1, x + y + z \leq 3\}$$
og definer funktionen $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ved
$$f(x,y,z) = x^2 + 2y + 3z.$$

(a) Vi skal vise at S er kompakt (afsluttet og begrænset). Dette er ret åbenlyst: som sædvanligt er hyperfladerne som aftegner S inkluderet i S, så mængden er afsluttet. Ydermere er S begrænset: thi x, y og z er alle positive men under planet $x+y+z = 3$ (som skærer akserne i $(3,0,0)$, $(0,3,0)$ og $(0,0,3)$). Slutteligt er $y \geq \frac{1}{x}$. Således implicerer ekstremværdisætningen at f antager såvel en maksimumsværdi som en minimumsværdi i S.

(b) Kuhn-Tucker algoritmen formuleres som

- Definér Lagrange-funktionen $\mathscr{L} = x^2 + 2y + 3z - \lambda_1(-x) - \lambda_2(-z) - \lambda_3(-xy + 1) - \lambda_4(x + y + z - 3)$.
- Beregn de partielle afledte:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \partial_x \mathscr{L} = 2x + \lambda_1 + \lambda_3 y - \lambda_4 = 0 \\ \text{(II)} & \partial_y \mathscr{L} = 2 + \lambda_3 x - \lambda_4 = 0, \\ \text{(III)} & \partial_z \mathscr{L} = 3 + \lambda_2 - \lambda_4 = 0. \end{array}$$

- Stipulér $\lambda_1 \geq 0$ ($\lambda_1 = 0$ hvis $x > 0$). $\lambda_2 \geq 0$ ($\lambda_2 = 0$ hvis $z > 0$). $\lambda_3 \geq 0$ ($\lambda_3 = 0$ hvis $xy > 1$). $\lambda_4 \geq 0$ ($\lambda_4 = 0$ hvis $x + y + z < 3$).
- $(x, y, z) \in S$.

Efter den sædvanlige analyse finder vi kandidatløsningerne[1] $(x, y, z) = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}, 0)$ med værdi $f = \frac{1}{2}(13 + \sqrt{5}) \approx 7.6$ samt $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ med værdi $f = 6$. Vi vælger altså førstnævnte.

[1] Lykke Rasmussen udførte benarbejdet til disse beregninger.

CHAPTER 13

Ugeseddel 13, Uge 49

Opgave 35

Betragt programmet P:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 + x_3 \\ \hline \text{hvor} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 2, \\ & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

På **kanonisk form** ønsker vi kun ligheder i bibetingelserne dvs. vi skal introducere en ekstra variabel når $\leq$. Ydermere kræver vi at $\forall j : x_j \geq 0$: dvs. dersom en variabel x_i er fri, ersatter vi den af $x_i' - x_i''$ hvor $x_i', x_i'' \geq 0$. Således er det kanoniske P:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 + x_3 \\ \hline \text{hvor} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5' - x_5'' = 2, \\ & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4' - x_4'' + z_3 = 3, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'', x_5', x_5'', z_3 \geq 0. \end{array}$$

På **standardform** ønsker vi kun uligheder i bibetingelserne dvs. ved ligheder $a = b$ skriver vi både $a \leq b$ og $b \leq a$. Ydermere kræver vi at $\forall j : x_j \geq 0$: dvs. dersom en variabel x_i er fri, ersatter vi den af $x_i' - x_i''$ hvor $x_i', x_i'' \geq 0$. Således er standard P:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - x_2 + x_3 \\ \hline \text{hvor} & 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1, \\ & -2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -1, \\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5' - x_5'' \leq 2, \\ & -4x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5' + x_5'' \leq -2, \\ & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4' - x_4'' \leq 3, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4', x_4'', x_5', x_5'' \geq 0. \end{array}$$

Opgave 36

Betragt programmet P

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \hline \text{hvor} & x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

(a) På kanonisk form Q er programmer

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \hline \text{hvor} & x_1 - x_2 + x_3 + z_1 = 1, \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + z_2 = 5, \\ & x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 \geq 0. \end{array}$$

(b) En basisløsninger involverer som bekendt lineært uafhængige søjler i bibetingelserne $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$. Skriver vi Qs bibetingelser som

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ser vi, at vi skal bruge to basisvektorer (fra venstresiden) til at generere højresiden $\binom{1}{5}$. De **tilladte**[1] basisløsninger er

- $(x_1, x_2) = (1.6, 0.6)$.
- $(x_1, z_2) = (1, 3)$.
- $(x_2, x_3) = (1, 2)$.
- $(x_2, z_1) = (1.\dot{6}, 2.\dot{6})$.
- $(x_3, z_2) = (1, 4)$.
- $(z_1, z_2) = (1, 5)$.

hvor alle uspecificerede variable er nul.

(c) P har en optimal løsning idet værdimængden er kompakt. Ydermere må der således også eksistere en optimal basisløsning. Ud af de seks kandidater i (b) finder vi, at koordinatetet $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$ maksimerer $f(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 + 3x_3$, nemlig $f(0, 1, 2) = 7$.

Opgave 37

Betragt programmer P:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 5x_2 \\ \hline \text{hvor} & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 0, \\ & -x_1 - x_2 \leq 0. \end{array}$$

(a) Det duale program P' til P er

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 + y_2 \\ \hline \text{hvor} & y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 = 3, \\ & y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_4 = 5, \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0. \end{array}$$

hvilket tilfresstiller de kanoniske krav om lighed i bibetingelserne og $\forall j : y_j \geq 0$.

(b) Der er tydeligvis mulige løsninger til både P og P': dvs. $M(P) \neq \emptyset$ og $M(P') \neq \emptyset$ hvilket implicerer tilfælde (I) af dualitetssætningen: $\sup P = \inf P'$.

[1] Ihukom at alle x og z skal være større end eller lig med nul.

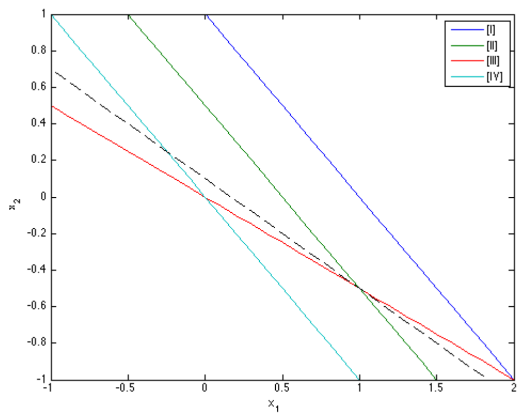
(c) De duale bibetingelser kan skrives som

$$y_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+y_3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y_4\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

De **tilladete** basisløsninger hertil begrænser sig til $(y_1, y_3) = (1, 2)$ og $(y_2, y_3) = (\frac{1}{2}, 2)$.

(d) Idet der eksisterer en optimal løsning til P', må der også eksistere en optimal basisløsning. Denne aflæses fra (c) og er givet ved $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, \frac{1}{2}, 2, 0)$ hvor $f(\boldsymbol{y}) = y_1 + y_2$ antager værdien $\frac{1}{2}$.

(e) Programmet P har to ubekendte og kan således løses grafisk. Først omskriver vi bibetingelserne til (I) $x_2 \leq -x_1 + 1$, (II) $x_2 \leq -x_1 + \frac{1}{2}$, (III) $x_2 \leq -\frac{1}{2}x_1$ og (IV) $x_2 \geq -x_1$. Plottes disse, samt niveaukurverne $3x_1 + 5x_2 = \zeta$ ser vi at $(x_1, x_2) = (1, -\frac{1}{2})$ er en optimal løsning, hvor $\zeta = \frac{1}{2}$. Dette passer til vores forventning om at $\sup P = \inf P'$.



Opgave 38

Betragt programmet P:

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 + x_2 \\ \hline \text{hvor} & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & 3x_2 \leq -1, \\ & -x_1 - x_2 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0. \end{array}$$

(a) Det duale program P' er

$$\begin{array}{ll} \min & y_1 - y_2 + y_3 \\ \hline \text{hvor} & y_1 - y_3 \geq -1, \\ & y_1 + 3y_2 - y_3 = 1, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{array}$$

(b) Der er mulige løsninger til både P og P': dvs. tilfælde (I) som før.

(c) På kanonisk form kan P' omdannes til programmet Q:

$$
\begin{array}{ll}
\min & y_1 - y_2 + y_3 \\
\hline
\text{hvor} & y_1 - y_3 - z_1 = -1, \\
& y_1 + 3y_2 - y_3 = 1, \\
& y_1, y_2, y_3, z_1 \geq 0.
\end{array}
$$

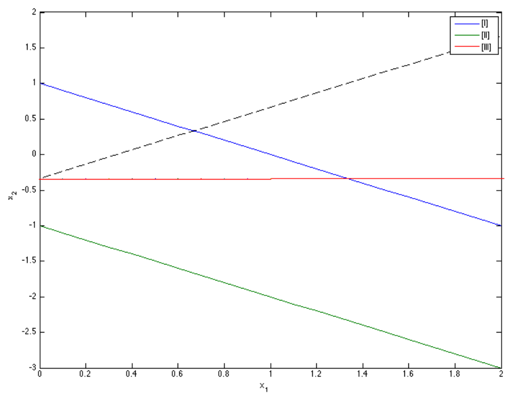
(d) Vi kan skrive bibetingelserne i Q som

$$
y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

De eneste **tilladte** basisløsninger til dette system er $(y_1, z_1) = (1, 2)$, $(y_2, y_3) = (\frac{2}{3}, 1)$ og $(y_2, z_1) = (\frac{1}{3}, 1)$.

(e) Som altid anskuer vi en optimal basisløsning. Svaret er at $(y_2, z_1) = (\frac{1}{3}, 1)$ hvor $f(\boldsymbol{y}) = y_1 - y_2 + y_3$ antager minimumsværdien $-\frac{1}{3}$.

(f) P kan løses grafisk. Definer (I) $x_2 \leq -x_1 + 1$, (II) $x_2 \geq -x_1 - 1$ og (III) $x_2 \leq -\frac{1}{3}$. Ydermere kræver vi blot at $x_1 \geq 0$. Niveaukurverne er $-x_1 + x_2 = \zeta$. Som det fremgår af figuren ligger det optimale punkt i $(x_1, x_2) = (0, -\frac{1}{3})$ hvor $\zeta = -\frac{1}{3}$. .



Løsningen er unik

Eksamen Vinter 01/02, Opgave 5

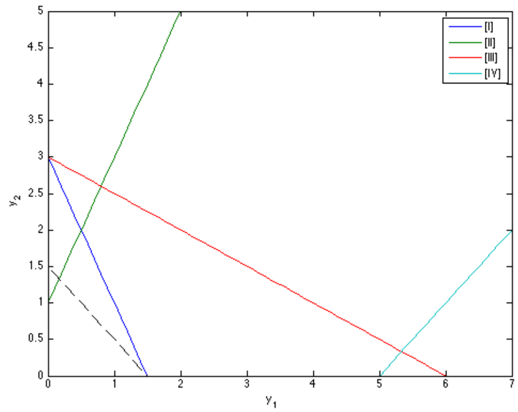
Betragt programmet P:

$$
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 5x_4 \\
\hline
\text{hvor} & 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \leq 1, \\
& x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 1, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.
\end{array}
$$

(1) Det duale program P' er

$$
\begin{array}{ll}
\min & y_1 + y_2 \\
\hline
\text{hvor} & 2y_1 + y_2 \geq 3, \\
& 2y_1 - y_2 \geq -1, \\
& -y_1 - 2y_2 \geq -6, \\
& -y_1 + y_2 \geq -5, \\
& y_1, y_2 \geq 0.
\end{array}
$$

(2) Definer funktionerne (I) $y_2 \geq -2y_1 + 3$, (II) $y_2 \leq 2y_1 + 1$, (III) $y_2 \leq -\frac{1}{2}y_1 + 3$ og (IV) $y_2 \geq y_1 - 5$. Ydermere er $y_1 \geq 0$ og $y_2 \geq 0$. Den sorte stiplede linie illustrerer den optimale niveau-kurve $y_1 + y_2 = \zeta$.



(3) Niveau-kurven $y_1 + y_2 = \zeta$ antager sit minimum i punktet $(\frac{3}{2}, 0)$ hvor $\zeta = \frac{3}{2}$.

(4) I henhold til Sætning 4.7 gælder det, for den optimale løsning $\boldsymbol{y}^*$ til P' og den optimale løsning $\boldsymbol{x}^*$ til P, at

$$\mathbf{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{y}^*)^\mathsf{T}\mathbf{b}, \quad \text{and} \quad (\boldsymbol{y}^*)^\mathsf{T}\mathbf{A}\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{y}^*)^\mathsf{T}\mathbf{b}.$$

Dette giver os følgende ligninger

$$\begin{aligned} 3x_1^* - x_2^* - 6x_3^* - 5x_4^* &= \tfrac{3}{2} \\ 2x_1^* + 2x_2^* - x_3^* - x_4^* &= 1. \end{aligned}$$

(5) En basisløsning til dette system er givet ved $\boldsymbol{x}^* = (\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$.