MASO Uge 9
Eksempler på Eksamensopgaver

Martin Søndergaard Christensen

Eksamen 2013B

Eksamen 2013B

Opgave 2

Findes der komplekse tal z_1 og z_2 så

$$z_1 + z_2 = 2, \quad z_1 z_2 = 3$$

Opgave 2

Findes der komplekse tal z_1 og z_2 så

$$z_1 + z_2 = 2, \quad z_1 z_2 = 3$$

Skrives om på første ligning og substituerer med den anden:

$$z_1^2 - 2z_1 + z_1 z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1^2 - 2z_1 + 3 = 0$$

Eksamen 2013B

Opgave 2

Findes der komplekse tal z_1 og z_2 så

$$z_1 + z_2 = 2, \quad z_1 z_2 = 3$$

Skrives om på første ligning og substituerer med den anden:

$$z_1^2 - 2z_1 + z_1 z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1^2 - 2z_1 + 3 = 0$$

Andengradsligningen har løsningerne

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \\ &= 1 \pm i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Teori brush-up

Theorem

Lad $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *være en* C^1 *funktion, og lad* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *være et punkt så determinanten*

$$|f'(\mathbf{x}_0)| \neq 0.$$

Sæt $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$. *Da findes en* C^1 *funktion* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *defineret i nærheden af* $\mathbf{y}_0$, *så* g *er invers til* f *i nærheden af* $\mathbf{y}_0$ *og* $\mathbf{x}_0$.

Teori brush-up

Theorem

Lad $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *være en* C^1 *funktion, og lad* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *være et punkt så determinanten*

$$|f'(\mathbf{x}_0)| \neq 0.$$

Sæt $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$*. Da findes en* C^1 *funktion* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, defineret i nærheden af* $\mathbf{y}_0$*, så* g *er invers til* f *i nærheden af* $\mathbf{y}_0$ *og* $\mathbf{x}_0$*. Altså, hvis* $\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_0$ *og* $\mathbf{y} \approx \mathbf{y}_0$ *gælder*

$$f\left(g(\mathbf{y})\right) = \mathbf{y}, \quad g\left(f(\mathbf{x})\right) = \mathbf{x}$$

Opgave 3

Lad $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Find Jacobi matricen for f.

Opgave 3

Lad $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Find Jacobi matricen for f.

Differentierer vi, fås:

$$f'(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 1 & x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 + y_2 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

Lad $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Find Jacobi matricen for f.
(b) Vis at $\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}(1, 1, 1, 1, 1)$ er invertibel.

Opgave 3

Lad $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Find Jacobi matricen for f.
(b) Vis at $\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}(1,1,1,1,1)$ er invertibel.

$$\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}(1,1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

Lad $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Find Jacobi matricen for f.
(b) Vis at $\frac{\partial f}{\partial (y_1, y_2)}(1,1,1,1,1)$ er invertibel.
(c) Gør rede for at $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ givet ved
$F(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_3, f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2))$
er invertibel nær $(1,1,1,1,1)$ og $(1,1,1,2,2)$.

Opgave 3

Lad $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Find Jacobi matricen for f.
(b) Vis at $\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}(1, 1, 1, 1, 1)$ er invertibel.
(c) Gør rede for at $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ givet ved
$F(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_3, f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2))$
er invertibel nær $(1, 1, 1, 1, 1)$ og $(1, 1, 1, 2, 2)$.

$$\det F'(1, 1, 1, 1, 1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Opgave 3

Lad $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Find Jacobi matricen for f.
(b) Vis at $\frac{\partial f}{\partial(y_1, y_2)}(1,1,1,1,1)$ er invertibel.
(c) Gør rede for at $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ givet ved
$F(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_3, f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2))$
er invertibel nær $(1,1,1,1,1)$ og $(1,1,1,2,2)$.
(d) Vis at der findes en C^1 funktion $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, defineret nær $(1,1,1,2,2)$ så $(f \circ g)(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2) = (v_1, v_2)$

Husk fra forrige opgave at der findes en funktion $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ defineret i nærheden af $(1,1,1,2,2)$ så $F(g(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$. Altså hvis $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2)$ er tæt på $(1,1,1,2,2)$ så gælder at

$$F\big(g(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2)\big) = (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2).$$

Skriv $g(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$. Ser vi på ovenstående ligning og forskriften for F, gælder altså at

$$\big(x_1, x_2, x_3, f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)\big) = (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2),$$

med andre ord

$$(f \circ g)(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2) = (v_1, v_2).$$

Teori brush-up

Theorem

Lad $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ *være en* C^1*-funktion og betragt ligningen*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m).$$

Lad $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ *være en løsning og antag at*

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}} \right| \neq 0.$$

Da findes en C^1*-funktion* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *så* $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, *når* $y \approx y_0$ *og* $x \approx x_0$.

Teori brush-up

Theorem

Lad $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ *være en* C^1*-funktion og betragt ligningen*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m).$$

Lad $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ *være en løsning og antag at*

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{\partial \mathbf{y}} \right| \neq 0.$$

Da findes en C^1*-funktion* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *så* $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, *når* $y \approx y_0$ *og* $x \approx x_0$. *Desuden gælder*

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)$$

Teori Brush-up

Optimerings opskrift

Antag at du vil maksimere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ under bi-betingelsen $g(x_1, \ldots, x_n) \leq b$. Betragt Lagrange-funktionen

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x})$$

Hvis der findes et punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ der maksimerer f, så løser $\mathbf{x}_0$ ligningerne

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = 0, \quad (1 \leq i \leq n)$$

med $\lambda \geq 0$ (men $\lambda = 0$ hvis $g(\mathbf{x}_0) < b$), og

$$g(\mathbf{x}_0) \leq b$$

Eksamen 2012A, Opgave 4

Opgave 4

Alice bruger alle sine penge på vare 1 og vare 2. Hun køber x_1 enheder af vare 1 til prisen p_1 og x_2 enheder af vare 2 til prisen p_2. Hun arbejder T timer i løbet af hele livet, bortset fra L timer hvor hun holder fri, til lønnen w pr. arbejdstime efter skat. Funktionen $f(x_1, x_2, L)$ måler hendes udbytte ved forbrug af x_1 enheder af vare 1, x_2 enheder af vare 2 og ved at holde fri i L timer.

Eksamen 2012A, Opgave 4

Opgave 4

Alice bruger alle sine penge på vare 1 og vare 2. Hun køber x_1 enheder af vare 1 til prisen p_1 og x_2 enheder af vare 2 til prisen p_2. Hun arbejder T timer i løbet af hele livet, bortset fra L timer hvor hun holder fri, til lønnen w pr. arbejdstime efter skat. Funktionen $f(x_1, x_2, L)$ måler hendes udbytte ved forbrug af x_1 enheder af vare 1, x_2 enheder af vare 2 og ved at holde fri i L timer.

Delopgave (a)

Hvad har følgende maksimeringsproblem at gøre med Alices liv?: Maksimér $f(x_1, x_2, L)$ under bibetingelsen

$$g(x_1, x_2, L) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + w(L - T) = 0.$$

Delopgave (b)

Begrund at Lagrangebetingelserne for ovenstående maksimeringsproblem er

$$
\begin{aligned}
p_1x_1 + p_2x_2 + w(L - T) &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda p_1 &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda p_2 &= 0 \\
\frac{\partial f}{\partial L} - \lambda w &= 0
\end{aligned}
$$

Delopgave (c)

Forklar hvorfor Lagrange betingelserne har en løsning på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ L \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^*(p_1, p_2, w) \\ x_2^*(p_1, p_2, w) \\ L^*(p_1, p_2, w) \\ \lambda^*(p_1, p_2, w) \end{pmatrix}$$

i nærheden af en given løsning hvis eller matricen

$$H = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & w & 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial x_1} & -p_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial x_2} & -p_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial L} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial L} & \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial L} & -w \end{pmatrix}$$

er invertibel.

Bemærk at Lagrange betingelserne kan skrives på formen

$$F(x_1, x_2, L, \lambda, p_1, p_2, w) = \mathbf{0},$$

hvor $F : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved

$$F(x_1, x_2, L, \lambda, p_1, p_2, w) = \begin{pmatrix} p_1 x_1 + p_2 x_2 + w(L - T) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda p_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda p_2 \\ \frac{\partial f}{\partial L} - \lambda w \end{pmatrix}.$$

Her bemærkes det at

$$H = \frac{\partial F}{\partial(x_1, x_2, L, \lambda)},$$

hvorfor det ønskede følger af sætningen om implicit givne funktioner.

Delopgave (d)

Redegør for ligningerne

$$H\frac{\partial}{\partial(p_1,p_2,w)}\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\L^*\\\lambda^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1^* & -x_2^* & T-L^*\\\lambda^* & 0 & 0\\0 & \lambda^* & 0\\0 & 0 & \lambda^*\end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial(p_1,p_2,w)}\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\L^*\\\lambda^*\end{pmatrix}=H^{-1}\begin{pmatrix}-x_1^* & -x_2^* & T-L^*\\\lambda^* & 0 & 0\\0 & \lambda^* & 0\\0 & 0 & \lambda^*\end{pmatrix} \tag{2}$$

Delopgave (d)

Redegør for ligningerne

$$H\frac{\partial}{\partial(p_1,p_2,w)}\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\L^*\\\lambda^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1^* & -x_2^* & T-L^*\\\lambda^* & 0 & 0\\0 & \lambda^* & 0\\0 & 0 & \lambda^*\end{pmatrix}\tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial(p_1,p_2,w)}\begin{pmatrix}x_1^*\\x_2^*\\L^*\\\lambda^*\end{pmatrix}=H^{-1}\begin{pmatrix}-x_1^* & -x_2^* & T-L^*\\\lambda^* & 0 & 0\\0 & \lambda^* & 0\\0 & 0 & \lambda^*\end{pmatrix}\tag{2}$$

Bemærk at ligningerne (1) og (2) er ækvivalente. Ligning (2) følger direkte af sætningen om implicit givne funktioner.

Delopgave (e)

Vis at

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = (H^{-1})_{31}(T - L^*) + (H^{-1})_{34}\lambda^*.$$

Delopgave (e)

Vis at

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = (H^{-1})_{31}(T - L^*) + (H^{-1})_{34}\lambda^*.$$

Fra delopgave (d) har vi:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} & \frac{\partial x_2^*}{\partial w} \\ \frac{\partial L^*}{\partial p_1} & \frac{\partial L^*}{\partial p_2} & \frac{\partial L^*}{\partial w} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} & \frac{\partial \lambda^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (H^{-1})_{11} & (H^{-1})_{12} & (H^{-1})_{13} & (H^{-1})_{14} \\ (H^{-1})_{21} & (H^{-1})_{22} & (H^{-1})_{23} & (H^{-1})_{24} \\ (H^{-1})_{31} & (H^{-1})_{32} & (H^{-1})_{33} & (H^{-1})_{34} \\ (H^{-1})_{41} & (H^{-1})_{42} & (H^{-1})_{43} & (H^{-1})_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x_1^* & -x_2^* & T - L^* \\ \lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* \end{pmatrix}$$

Delopgave (e)

Vis at
$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = (H^{-1})_{31}(T - L^*) + (H^{-1})_{34}\lambda^*.$$

Fra delopgave (d) har vi:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} & \frac{\partial x_2^*}{\partial w} \\ \frac{\partial L^*}{\partial p_1} & \frac{\partial L^*}{\partial p_2} & \frac{\partial L^*}{\partial w} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} & \frac{\partial \lambda^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (H^{-1})_{11} & (H^{-1})_{12} & (H^{-1})_{13} & (H^{-1})_{14} \\ (H^{-1})_{21} & (H^{-1})_{22} & (H^{-1})_{23} & (H^{-1})_{24} \\ (H^{-1})_{31} & (H^{-1})_{32} & (H^{-1})_{33} & (H^{-1})_{34} \\ (H^{-1})_{41} & (H^{-1})_{42} & (H^{-1})_{43} & (H^{-1})_{44} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -x_1^* & -x_2^* & T - L^* \\ \lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* \end{pmatrix}$$

Delopgave (f)

Alice's arbejdsløn efter skat ændrer sig ganske lidt fra w til $w + \Delta w$. Giv et estimat af Alices fritid $L^*(w + \Delta w)$ med den nye indkomst. Er det klart at Alice vil arbejde mere, hvis hun får mere i løn efter skat?

Delopgave (f)

Alice's arbejdsløn efter skat ændrer sig ganske lidt fra w til $w + \Delta w$. Giv et estimat af Alices fritid $L^*(w + \Delta w)$ med den nye indkomst. Er det klart at Alice vil arbejde mere, hvis hun får mere i løn efter skat?

$$L^*(w + \Delta w) \approx L^*(w) + \frac{\partial L^*}{\partial w} \Delta w$$

Delopgave (g)

Hvor har vi vist at

$$p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w} + p_2 \frac{\partial x_1^*}{\partial w} + w \frac{\partial x_1^*}{\partial w} = T - L^*.$$

Delopgave (g)

Hvor har vi vist at

$$p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w} + p_2 \frac{\partial x_1^*}{\partial w} + w \frac{\partial x_1^*}{\partial w} = T - L^*.$$

I opgave (d):

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & w & 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial x_1} & -p_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial x_2} & -p_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial L} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial L} & \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial L} & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} & \frac{\partial x_2^*}{\partial w} \\ \frac{\partial L^*}{\partial p_1} & \frac{\partial L^*}{\partial p_2} & \frac{\partial L^*}{\partial w} \\ \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_1} & \frac{\partial \lambda^*}{\partial p_2} & \frac{\partial \lambda^*}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1^* & -x_2^* & T - L^* \\ \lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* \end{pmatrix}$$

Delopgave (h)

En (velkendt?) matematisk sætning siger at

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, L^*)}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{\partial L^*}{\partial w}.$$

Hvilken?

Delopgave (h)

En (velkendt?) matematisk sætning siger at

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, L^*)}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{\partial L^*}{\partial w}.$$

Hvilken?

Kædereglen:

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, L^*)}{\partial w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial w} \\ \frac{\partial L^*}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Delopgave (i)

Økonomer tolker Lagrangemultiplikatoren som den marginal nytte af arbejdslønnen per arbejdstime. Dermed mener de at

$$\lambda^* = \frac{1}{T - L^*} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, L^*)}{\partial w}.$$

Hvorfor er det rigtigt?

Ved hjælp af flere af de tidligere delopgaver får vi at:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, L^*)}{\partial w} &=^{(h)} \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{\partial L^*}{\partial w} \\
&=^{(b)} \lambda^*(p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w} + p_2 \frac{\partial x_1^*}{\partial w} + w \frac{\partial x_1^*}{\partial w}) \\
&=^{(g)} \lambda^*(T - L^*)
\end{aligned}$$