JMM

Besvarelse af MASO 2018B

Opgave 1

Læg mærke til at $\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ konvergerer mod 0 for $n \to \infty$ og brug Rodkriteriet.

Opgave 2

(a) Klart

(b) Klart

(c) $|b_n| \leq \frac{|a_1+\cdots+a_M|}{n} + \frac{|a_{M+1}+\cdots+a_n|}{n} < \frac{|a_1+\cdots+a_M|}{N} + \frac{1}{n}\sum_{M<j\leq n}|a_j| < \varepsilon/2 + \frac{n-M}{n}\varepsilon/2 < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$

(d) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

(e) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$

Opgave 3

Lad $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være C^1-funktionen givet ved

$$F(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3$$

(a) $F(1,1,-1,1) = (2,0)$

(b) $DF(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 0 & 2y_2 \\ y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ og $DF(1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Det følger af Implicit Funktion Sætning fordi $\frac{\partial F}{\partial(y_1,y_2)}(1,1,-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ er invertibel.

(d) $L(1,1) = (-1,1)$ og fra

$$0 = \frac{\partial}{\partial(x_1,x_2)} F(x_1,x_2,L(x_1,x_2)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial(x_1,x_2)} & \frac{\partial F}{\partial(y_1,y_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ DL(y_1,y_2) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial(x_1,x_2)} + \frac{\partial F}{\partial(y_1,y_2)} DL(y_1,y_2)$$

får vi

$$DL(1,1) = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) $L(1+\Delta x_1, 1+\Delta x_2) \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2\Delta x_1 - \Delta x_2 \\ 1 - \Delta x_1 \end{pmatrix}$

(f) $F(1+\Delta x_1, 1+\Delta x_2, -1+2\Delta x_1 - \Delta x_2, 1-\Delta x_1) = \begin{pmatrix} 2 + \Delta x_1^2 \\ 2\Delta x_1^2 - 2\Delta x_1 \Delta x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Opgave 4

(a) Let (se tegningen sidst i opgaven).

(b) For alle optimale løsninger $(x_1,x_2) \in O(P)$ findes entydigt bestemt $y = (y_1,y_2) \in \mathbf{R}^2$ så

KKT1: $y \geq 0$

KKT1: $x_1 + x_2 \leq 3$, $-2x_1 + x_2 \leq 2$

KKT3: $y_1(x_1+x_2-3) = 0$, $y_2(-2x_1+x_2-2) = 0$

KKT4: $\begin{pmatrix} 4-2x_1 & 6-2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

(c) Ved at gennemgå tilfældene hvor begge, kun en, eller ingen bibetingelser er aktive, ser man at det eneste punkt som opfylder betingelserne er $(x_1,x_2) = (1,2)$, $(y_1,y_2) = (2,0)$.

(d) **KKTTB** garanterer at $(1,2)$ er et optimalt punkt.

(e) $f(x_1,x_2) = -(x_1-2)^2 - (x_2-3)^2 + 13$ er 13 minus afstand til $(2,3)$. Maksimeringsproblemet går ud på at finde de punkter i $M(P)$ som er tættest på $(2,3)$.