MASO 2018B

Dette eksamenssæt består af 2 sider med i alt 4 opgaver. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2018 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

Er rækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$$

konvergent eller divergent? **Vink**: Rodkriteriet.

Opgave 2

Lad $(a_n)_{n\geq 1}$ være en konvergent følge af relle tal med grænseværdi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ og lad $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ være gennemsnittet af de n første elementer i følgen. Lad $\varepsilon > 0$ være et positivt reelt tal.

(a) Redegør for at der findes et helt tal M så $n > M \implies |a_n| < \varepsilon/2$.

(b) Redegør for at der findes et helt tal $N > M$ så $\frac{|a_1+\cdots+a_M|}{N} < \varepsilon/2$.

(c) Konkluder fra (a) og (b) at $n > N \implies |b_n| < \varepsilon$.

(d) Hvad er $\lim_{n\to\infty} b_n$?

(e) Hvis nu $(a_n)_{n\geq 1}$ er konvergent med grænseværdi $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, som ikke nødvendigvis er 0, hvad er så grænseværdien af $(b_n)_{n\geq 1}$? **Vink**: Se på $a_n - L$.

Opgave 3

Lad $F\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ være C^1-funktionen givet ved

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_2^2 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

for alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^4$.

(a) Find $F(1, 1, -1, 1)$.

(b) Find Jacobi matricen $DF(x_1, x_2, y_1, y_2)$ for C^1-funktionen F.

(c) Redegør for at der findes der findes en C^1-funktion $L(x_1, x_2) = (L_1(x_1, x_2), L_2(x_1, x_2))$, defineret i $\mathbf{R}^2$ nær $(1, 1)$ og med værdier i $\mathbf{R}^2$ nær $(-1, 1)$, sådan at

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + y_2^2 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1(x_1, x_2) \\ L_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

for (x_1, x_2, y_1, y_2) nær $(1, 1, -1, 1)$.

(d) Find $L(1, 1)$ og Jacobi matricen $DL(1, 1)$.

(e) Vis at

$$L(1 + \Delta x_1, 1 + \Delta x_2) \approx \begin{pmatrix} -1 + 2\Delta x_1 - \Delta x_2 \\ 1 - \Delta x_1 \end{pmatrix}$$

er den lineære approximation til L nær $(1, 1)$.

Opgave 4

Lad (P) være optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \text{Maksimér } 4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2 \text{ under bibetingelserne } x_1 + x_2 \leq 3, \quad -2x_1 + x_2 \leq 2$$

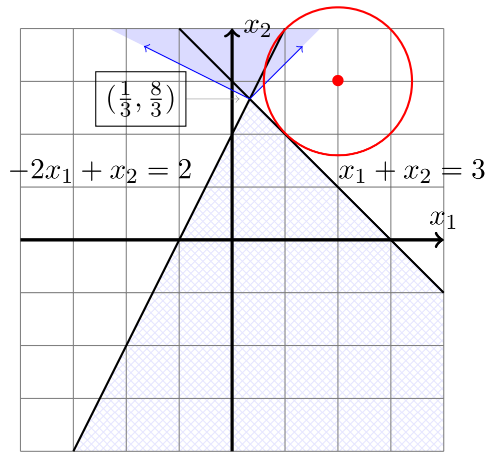
(a) Redegør kort for at **LICQ** ('føringsbetingelsen') er opfyldt i alle punkter af $M(P)$.

(b) Formulér Karush–Kuhn–Tuckers nødvendige betingelser for optimeringsproblemet (P).

(c) Vis at der kun er ét punkt i $M(P)$, som opfylder Karush–Kuhn–Tuckers nødvendige betingelser, og find det.

(d) Du får at vide at objektfunktionen $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_2^2$ er konkav. Er det punkt, du fandt i (c) optimalt?

(e) Hvilken rolle spiller den røde cirkel på tegningen herunder?



(SLUT)