JMM

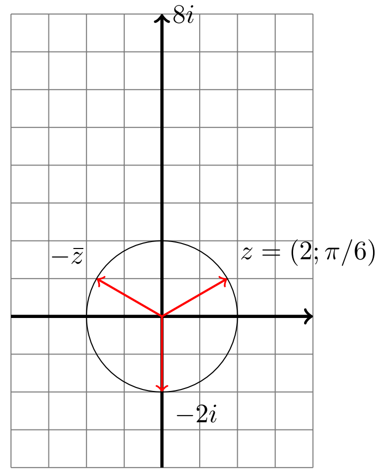
Besvarelse af MASO 2018A

Opgave 1

Som en sum af to konvergente kvotientrækker er rækken konvergent med sum

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{3^n}+\frac{3^n}{4^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n}=\frac{1}{1-2/3}+\frac{1}{1-3/4}=3+4=7$$

Opgave 2



Løsningsmæmgden er invariant under spejling i den imaginære akse. $(2:\pi/6)=2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))=\sqrt{3}+i$.

Opgave 3

Lad $F\colon \mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ være C^1-funktionen $F(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-3x_1x_2x_3$.

(a) $F(1,2,5)=0$
(b) $DF(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-3x_2x_3,2x_2-3x_1x_3,2x_3-3x_1x_2)$ og $DF(1,2,5)=(-28,-11,4)$
(c) Det følger af Implicit Funktion Sætning fordi $\frac{\partial F}{\partial x_3}(1,2,5)=4\neq 0$.
(d) $L(1,2)=5$. Fra

$$\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial(x_1,x_2)}F(x_1,x_2,L(x_1,x_2))=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28+4\frac{\partial L}{\partial x_1} & -11+4\frac{\partial L}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

får vi $\frac{\partial L}{\partial x_1}(1,2)=\frac{28}{4}=7$ og $\frac{\partial L}{\partial x_2}(1,2)=\frac{11}{4}$.
(e) $L(1+\Delta x_1,2+\Delta x_2)\approx L(1,2)+\frac{\partial L}{\partial x_1}(1,2)\Delta x_1++\frac{\partial L}{\partial x_2}(1,2)\Delta x_2=5+7\Delta x_1+\frac{11}{4}\Delta x_2$

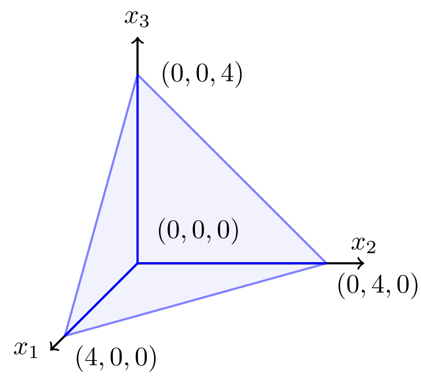
Opgave 4

Vi ser på optimeringsproblemet

$$(P)\qquad \text{Maksimér } f(x_1,x_2,x_3) \text{ under bibetingelserne } x_1+x_2+x_3\leq 4,\quad -x_1\leq 0,\quad -x_2\leq 0,\quad -x_3\leq 0$$

hvor $f\colon [0,\infty[^3\to\mathbf{R}$ er funktionen $f(x_1,x_2,x_3)=\ln(1+x_1)+\ln(1+\frac{x_2}{2})+\ln(1+\frac{x_3}{3})$.

(a) $M(P)$ er et tetraeder med hjørner i $(0,0,0)$, $(4,0,0)$, $(0,4,0)$, $(0,0,4)$.



(b) Ekstremværdisætningen garanterer at optimeringsproblemet (P) har en optimal løsning.

(c) Gradienterne for de aktive bibetingelser er klart lineært uafhængige i alle punkter i $M(P)$.

(d) $Df(x_1,x_2,x_3) = (\frac{1}{1+x_1}, \frac{1}{2+x_2}, \frac{1}{3+x_3})$.

(e) Karush–Kuhn–Tucker betingelserne siger at hvis $x = (x_1,x_2,x_3) \in O(P)$ så findes $u = (u_0,u_1,u_2,u_3) \in \mathbf{R}^4$ så

KKT1: $u \geq 0$

KKT2: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

KKT3: $u_0(x_1+x_2+x_3-4) = 0$, $u_1x_1 = 0$, $u_2x_2 = 0$, $u_3x_3 = 0$

KKT4: $\begin{pmatrix} \frac{1}{1+x_1} & \frac{1}{2+x_2} & \frac{1}{3+x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0-u_1 & u_0-u_2 & u_0-u_3 \end{pmatrix}$

(f) Antager vi at $(4,0,0)$ er et optimalt punkt, får vi $(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = (u_0, u_0-u_2, u_0-u_3)$ da $u_1 = 0$. Men det giver $u_0 = \frac{1}{5}$ og $u_2 = u_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} < 0$. De nødvendige betingelser er ikke opfyldt, så $(4,0,0)$ er ikke optimalt.

(g) Antager vi at $(x_1,x_2,0)$, $x_1+x_2 = 4$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ er optimalt, får vi $(\frac{1}{1+x_1}, \frac{1}{2+x_2}, \frac{1}{3}) = (u_0,u_0,u_0-u_3)$ da $u_1 = 0$ og $u_2 = 0$. Da $1+x_1 = 2+x_2$ er $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $u_0 = \frac{2}{7}$, og $u_3 = u_0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{7} - \frac{1}{3} = \frac{6}{21} - \frac{7}{21} < 0$. De nødvendige betingelser er ikke opfyldt, så $(x_1,x_2,0)$ er ikke optimalt.

(h) Antag at (x_1,x_2,x_3), $x_1+x_2+x_3 = 4$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ er optimalt. Da $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ er $(\frac{1}{1+x_1}, \frac{1}{2+x_2}, \frac{1}{3+x_3}) = (u_0,u_0,u_0)$. Det giver $1+x_1 = 2+x_2$ og $1+x_1 = 3+x_3$ eller $x_2 = x_1 - 1$ og $x_3 = x_1 - 2$. Da også $4 = x_1+x_2+x_3 = 3x_1 - 3$ er $(x_1,x_2,x_3) = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ og $u_0 = \frac{3}{10}$.