MASO 2018A

Dette eksamenssæt består af 1 side med i alt 4 opgaver. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2018 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

Argumentér for at den uendelige række

$$1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{3^2}{4^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{3^n}{4^n} \right)$$

er konvergent og find dens sum.

Opgave 2

(a) Bestem de polære koordinater (modulus og argument) for det komplekse tal $8i$.

(b) Find $(-\bar{z})^3$ hvor z er et komplekst tal med $z^3 = 8i$.

(c) Find de polære koordinater for alle komplekse tal $z \in \mathbf{C}$ med $z^3 = 8i$, og plot dem ind på en tegning af den komplekse plan.

Opgave 3

Lad $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være C^1-funktionen givet ved

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3$$

(a) Beregn værdien $F(1, 2, 5)$ af F i punktet $(1, 2, 5)$.

(b) Find Jacobi matricen $DF(1, 2, 5)$ for F i punktet $(1, 2, 5)$.

(c) Vis at der findes en C^1-funktion $L(x_1, x_2)$, defineret nær $(1, 2)$, sådan at $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ hvis og kun hvis $x_3 = L(x_1, x_2)$ når (x_1, x_2, x_3) er nær $(1, 2, 5)$.

(d) Find $L(1, 2)$, $\frac{\partial L}{\partial x_1}(1, 2)$ og $\frac{\partial L}{\partial x_2}(1, 2)$.

(e) Gør rede for at $L(1 + \Delta x_1, 2 + \Delta x_2)$ er approksimativt lig med $5 + 7\Delta x_1 + \frac{11}{4}\Delta x_2$ for små Δx_1 og Δx_2.

Opgave 4

Lad (P) være optimeringsproblemet

(P) Maksimér $f(x_1, x_2, x_3)$ under bibetingelserne $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \quad -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0, \quad -x_3 \leq 0$

hvor $f\colon [0, \infty[^3 \to \mathbf{R}$ er funktionen $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(1 + x_1) + \ln(1 + \frac{x_2}{2}) + \ln(1 + \frac{x_3}{3})$.

Vink: Nummererer du de 4 bibetingelser, $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$, $-x_1 \leq 0$, $-x_2 \leq 0$, $-x_3 \leq 0$, med $0, 1, 2, 3$, får bibetingelsen for x_i nummer i for $i = 1, 2, 3$.

(a) Tegn en skitse af de mulige løsninger $M(P) = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ til (P).

(b) Har optimeringsproblemet (P) en optimal løsning?

(c) Gør *kort* rede for at **LICQ** ('føringsbetingelsen') er opfyldt i alle punkter af $M(P)$.

(d) Vis at Jacobi matricen for f er $Df(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{1+x_1}, \frac{1}{2+x_2}, \frac{1}{3+x_3})$.

(e) Formulér Karush–Kuhn–Tuckers nødvendige betingelser for optimeringsproblemet (P).

(f) Er $(4, 0, 0)$ et optimalt punkt?

(g) Er der optimale punkter af formen $(x_1, x_2, 0)$ med $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$?

(h) Find alle punkter af formen (x_1, x_2, x_3) med $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, som opfylder Karush–Kuhn–Tuckers nødvendige betingelser.

(SLUT)