MASO 2017B

Dette eksamenssæt består af 2 sider med 4 opgaver. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2017 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

(a) Er den undelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n/3^n = 1 + 2/3 + 2^2/3^2 + \cdots$$

konvergent? Hvis du mener at den er konvergent, hvad er summen?

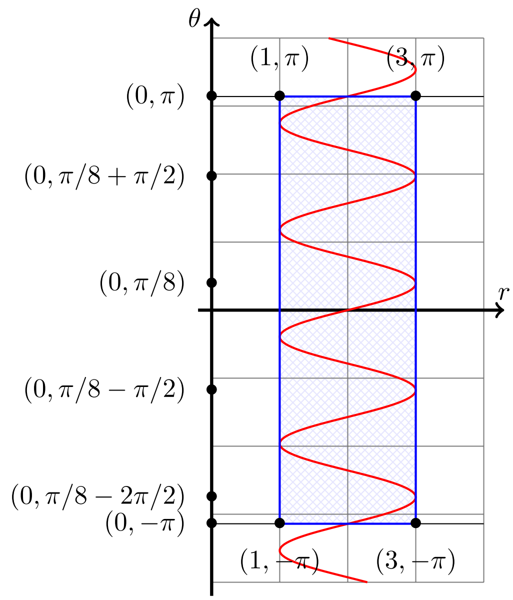
(b) Er den undelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(2^n/3^n\right) = 1 + \sin(2/3) + \sin(2^2/3^2) + \cdots$$

konvergent?

Opgave 2

Lad $R = [1,3] \times [-\pi, \pi] = \{(r,\theta) \mid 1 \leq r \leq 3, \ -\pi \leq \theta \leq \pi\}$ være det blåt skraverede rektangel vist her



og lad $P(r,\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ være den funktion som sender (r,θ) over i det komplekse tal med polære koordinater $(r\colon\theta)$.

(a) Beskriv billedet $P(R) \subseteq \mathbf{C}$ af rektanglet R.

(b) Det giver bonuspoints, hvis du også kan beskrive billedet af den røde kurve $r = 2 + \sin(4\theta)$.

Opgave 3

Lad $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funktionen $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 9(x^2-y^2)$. Jeg fortæller dig at $F(\sqrt{5},1) = 0$ og de partielle afledte i dette punkt er $\frac{\partial F}{\partial x}(\sqrt{5},1) = 6\sqrt{5}$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\sqrt{5},1) = 42$.

(a) Gør rede for at der findes en C^1-funktion $L(x)$ sådan at

$$(x^2+y^2)^2 - 9(x^2-y^2) = 0 \iff y = L(x)$$

når (x,y) er tæt ved $(\sqrt{5},1)$.

(b) Hvad er $L(\sqrt{5})$ og $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}(\sqrt{5})$? Find den lineære approksimation $L(\sqrt{5}+\Delta x)$, $\Delta x \approx 0$, til $L(x)$ nær $\sqrt{5}$.

(FORTSÆTTER)

Opgave 4

Betragt optimeringsproblemet

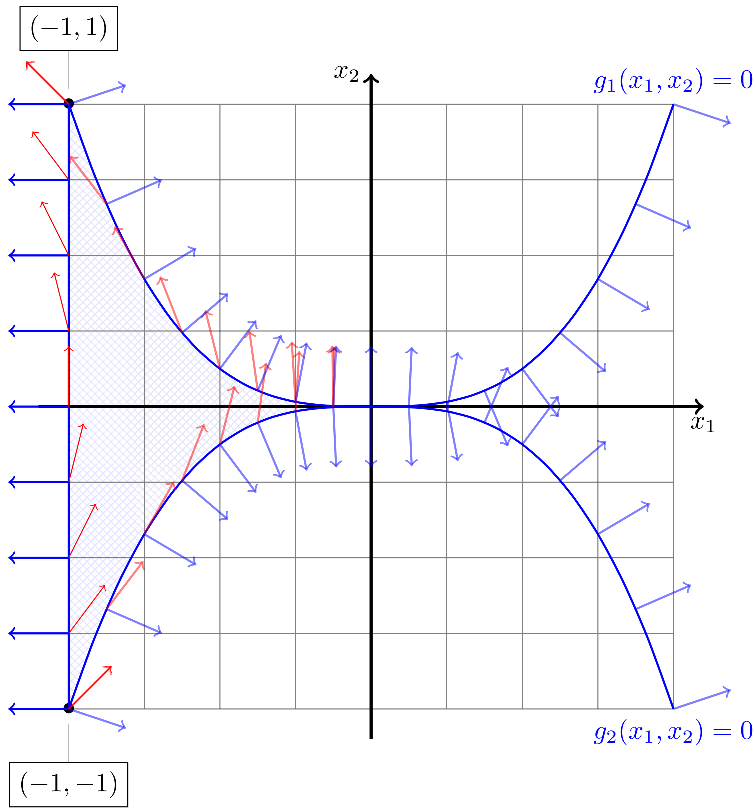
$$(P) \qquad \text{Maksimér } f(x_1,x_2) \text{ under bibetingelserne } g_1(x_1,x_2) \le 0,\ g_2(x_1,x_2) \le 0,\ g_3(x_1,x_2) \le 0$$

hvor objektfunktionen $f(x_1,x_2)$ er en C^1-funktion (som vil blive præciseret senere) og de tre bibetingelser er $g_1(x_1,x_2) = x_1^3 - x_2$, $g_2(x_1,x_2) = x_1^3 + x_2$, $g_3(x_1,x_2) = -1 - x_1$. Som sædvanlig er

$$M(P) = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid g_1(x_1,x_2) \le 0,\ g_2(x_1,x_2) \le 0,\ g_2(x_1,x_2) \le 0\}$$

$$O(P) = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x_1,x_2) = \sup f(M(P))\}$$

de mulige og optimale løsninger til (P).



(a) Hvor på figuren ligger mængden $M(P)$ af mulige løsninger?

(b) Har optimeringsproblemet (P) en løsning?

(c) Find gradienterne for funktionerne g_1, g_2, g_3. Har du en idé om hvad mon de blå pile på figuren betyder?

(d) Hvordan ser Karush–Kuhn–Tuckers nødvendige betingelser (**KKTNB**) for (P) ud? Hvad siger Karush–Kuhn–Tuckers sætning for optimeringsproblemet (P)?

(e) Vi antager i dette delspørgsmål at $f(x_,x_2) = x_1$. Bestem gradienten for $f(x_1,x_2) = x_1$. Find alle punkter i $M(P)$ som opfylder **KKTNB**. Find mængden $O(P)$ af optimale løsninger.

(f) Vi antager i dette delspørgsmål at $f(x_,x_2) = -x_1x_2$. Bestem gradienten for $f(x_1,x_2) = -x_1x_2$. Find alle punkter i $M(P)$ som opfylder **KKTNB**. Find mængden $O(P)$ af optimale løsninger. (Nogle gradienter for $f(x_1,x_2)$ er vist med rødt på figuren.)

(SLUT)