Besvarelse af MASO 2017A

Opgave 1

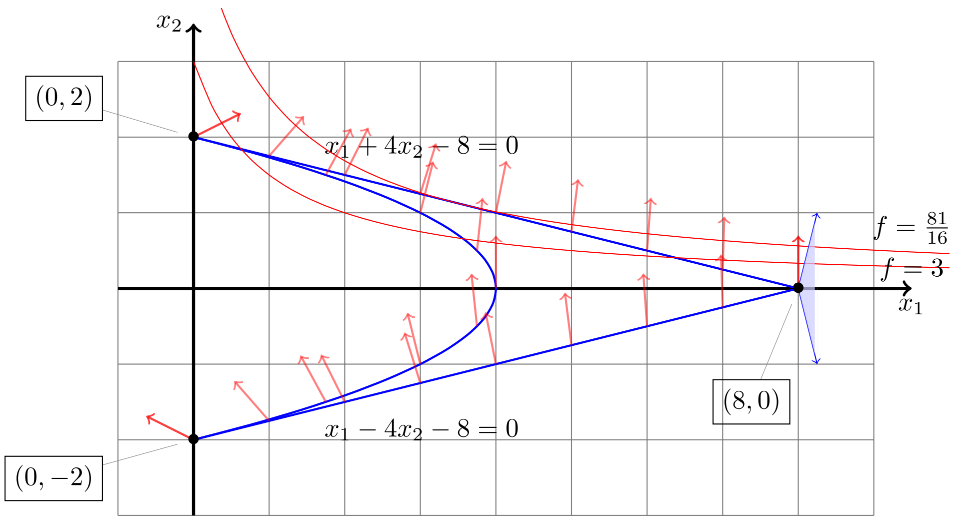
(a) $\log \dfrac{\exp(\sqrt{n})}{n^d} = \sqrt{n} - d\log n = \sqrt{n}(1 - d\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}) \to \infty$ for $n \to \infty$

(b) $\log \dfrac{\exp(\sqrt{n})}{a^n} = \sqrt{n} - n\log a = \sqrt{n}(1 - \sqrt{n}\log a) \to -\infty$ for $n \to \infty$

Opgave 2

(a) $P(1) = 0$
(b) $(1+i\sqrt{3})^2 - 2(1+i\sqrt{3}) = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 - 2 - 2i\sqrt{3} = -4$
(c) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x^2 - 2x + 4)(x - 1)$ har tre rødder: 1, $1 + i\sqrt{3}$, $1 - i\sqrt{3}$.
(d) $P(x)^{2017}$ har grad $3 \cdot 2017 = 6051$.
(e) $P(x)^{2017}$ har 6051 rødder, nemlig de samme som i $P(x)$, talt med multiplicitet.

Opgave 3



(a) $g_1^{-1}(0)$ er en parabel med toppunkt i $(4, 0)$ gennem $(0, \pm 2)$, $g_2^{-1}(0)$ er en ret linje gennem $(0, 2)$ og $(8, 0)$, $g_3^{-1}(0)$ er en ret linje gennem $(0, -2)$ og $(8, 0)$. Ja, $(6, 0) \in M(P)$.
(b) Ja, f er kontinuert og $M(P)$ er kompakt.
(c) $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.
(d) I $(0, 2)$ og $(0, -2)$, hvor tre bibetingelser er aktive, gælder **LICQ** ikke. Men **LICQ** gæ]lder i alle andre mulige løsninger.
(e) I dette tilfælde er **KKTB** følgende:
   (i) $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \geq 0$
   (ii) $g(x_1, x_2) = (g_1, g_2, g_3, g_4)(x_1, x_2) \geq 0$
   (iii) $u^t g(x) = 0$
   (iv) $\nabla f(x) = u^t Dg(x_1, x_2)$

   og **KKTNB** siger at enhver optimal løsning som opfylder **LICQ** også opfylder **KKTB**.
(f) Nej. Hvis $(x_1, x_2) \in O(P)$ og ingen bibetingelser er aktive, så er $\nabla f(x_1, x_2) = 0$, men det sker ikke i $M(P)$.
(g) Antag at kun g_2 er aktiv i $(x_1, x_2) \in O(P)$. Så ved vi fra **KKTNB** at

$$x_1 = 8 - 4x_2 \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

for et $u \geq 0$. Det giver $x_2 = u$ og da $8 - 4u = 8 - 4x_2 = x_1 = 4u - 1$, at $u = \frac{9}{8}$. Altså er $(x_1, x_2) = (8 - 4u, u) = (\frac{7}{2}, \frac{9}{8})$.

Antag at kun g_3 er aktiv i $(x_1, x_2) \in O(P)$. Så ved vi **KKTNB** at

$$x_1 = 8 + 4x_2 \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

for et $u \geq 0$. Det giver $x_2 = u$ og da $8 + 4u = 8 + 4x_2 = x_1 = -4u - 1$ at $u = -\frac{9}{8}$. Det strider mod at $u \geq 0$.

Antag at kun g_1 er aktiv i $(x_1, x_2) \in O(P)$. Så ved vi **KKTNB** at

$$x_1 = 4 - x_2^2 \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

for et $u \geq 0$. Det giver $x_2 = -u$, og da $4 - u^2 = 4 - x_2^2 = x_1 = -2ux_2 - 1 = 2u^2 - 1$, at $u = \sqrt{\frac{5}{3}}$. Dermed er $(x_1, x_2) = (\frac{7}{3}, -\sqrt{\frac{5}{3}})$.

Konklusionen er at $(\frac{7}{2}, \frac{9}{8})$ og $(\frac{7}{3}, -\sqrt{\frac{5}{3}})$ er de eneste mulige løsninger som opfylder **KKTNB** med én aktiv bibetingelse.

(h) Vi ved nu at $O(P) \subseteq \{(0,-2), (0,2), (\frac{7}{2}, \frac{9}{8}), (\frac{7}{3}, -\sqrt{\frac{5}{3}}), (8,0)\}$. Objektfunktionens værdier i disse punkter er $f(0,-2) = -2$, $f(0,2) = 2$, $f(\frac{7}{2}, \frac{9}{8}) = \frac{81}{16}$, $f(\frac{7}{3}, -\sqrt{\frac{5}{3}}) < 0$, $f(8,0) = 0$. Altså er $O(P) = \{(\frac{7}{2}, \frac{9}{8})\}$.

Opgave 4

(a) Ja.

(b) Nej. Hvis f er den konstante funktion 0 så er $f^{-1}([-1,+1]) = \mathbf{R}^n$ ikke kompakt.

(c) Ja. $\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) < b\}$ er en åben delmængde af $\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \leq b\}$, derfor indeholdt i det indre.

(d) Nej. Lad $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være den kontinuerte (!) funktion givet ved $f(x) = 0$ for $x \leq 0$ og $f(x) = x$ for $x \geq 0$. Så er $\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) < 0\} = \emptyset$ og det indre af $\{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \leq 0\} =]-\infty, 0]$ er $]-\infty, 0[$.