MASO 2017A

Dette eksamenssæt består af 2 sider med i alt 4 opgaver. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2017 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

Vis at følgen $\exp(\sqrt{n})$ vokser hurtigere end enhver polynomiel følge men langsommere end enhver eksponentiel følge for $n \to \infty$, dvs

(a) $\dfrac{\exp(\sqrt{n})}{n^d} \to \infty$ for $n \to \infty$ når $d > 0$

(b) $\dfrac{\exp(\sqrt{n})}{a^n} \to 0$ for $n \to \infty$ når $a > 1$

Opgave 2

Lad $P(x)$ være det komplekse polynomium

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$$

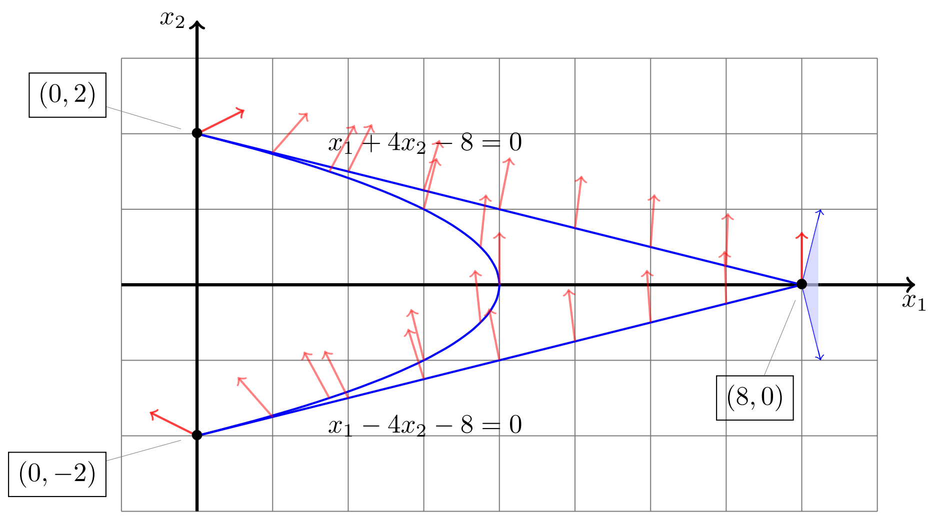
(a) Vis at 1 er rod i $P(x)$, dvs at $P(1) = 0$.
(b) Vis at du (ikke din computer!) kan udregne $z^2 - 2z$ for $z = 1 + i\sqrt{3}$.
(c) Hvor mange rødder har $P(x)$? Find dem!
(d) Hvad er graden af polynomiet $P(x)^{2017}$?
(e) Hvor mange rødder har $P(x)^{2017}$? Find dem!

Opgave 3

Betragt optimeringsproblemet

(P) Maksimér $f(x_1, x_2)$ under bibetingelserne $g_1(x_1, x_2) \le 0$, $g_2(x_1, x_2) \le 0$, $g_3(x_1, x_2) \le 0, g_4(x_1, x_2) \le 0$

Objektfunktionen er $f(x_1, x_2) = (x_1 + 1)x_2$ og bibetingelserne er $g_1(x_1, x_2) = 4 - x_1 - x_2^2$, $g_2(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 - 8$, $g_3(x_1, x_2) = x_1 - 4x_2 - 8$ og $g_4(x_1, x_2) = -x_1$.



(a) Tegn en skitse af mængden $M(P) = \{(x_1, x_2) \mid g_1(x_1, x_2) \le 0,\ g_2(x_1, x_2) \le 0,\ g_3(x_1, x_2) \le 0,\ g_4(x_1, x_2) \le 0\}$ af mulige løsninger til (P). Er $(6, 0)$ en mulig løsning til (P)?
(b) Har optimeringsproblemet (P) en optimal løsning?
(c) Find gradienterne for f og g_1, g_2, g_3, g_4.
(d) Find de mulige løsninger som ikke opfylder **LICQ** ('føringsbetingelsen').
(e) Hvad siger Karush–Kuhn–Tuckers nødvendige betingelser (**KKTNB**) i dette tilfælde?
(f) Find de mulige løsninger til (P) som opfylder **KKTNB** uden aktive bibetingelser.
(g) Find de mulige løsninger til (P) som opfylder **KKTNB** med præcis én aktiv bibetingelse.
(h) Find de optimale løsninger til (P).

(FORTSÆTTER)

Opgave 4

Lad $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ være en kontinuert funktion og $a, b \in \mathbf{R}$ være reelle tal med $a < b$. Er det altid rigtigt at

(a) $\{x \in \mathbf{R}^n \mid a \leq f(x) \leq b\}$ er afsluttet?
(b) $\{x \in \mathbf{R}^n \mid a \leq f(x) \leq b\}$ er kompakt?
(c) $\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) < b\}$ er en delmængde af det indre af $\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \leq b\}$?
(d) $\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) < b\}$ er det indre af $\{x \in \mathbf{R}^n \mid f(x) \leq b\}$?

(SLUT)