JMM

Besvarelse af MASO 2016B

Opgave 1

(a) $g_2(x_1,x_2)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2-1$ og $g_3(x_1,x_2)=(x_1-2)^2+(x_2+3)^2-1$

(b) Ja, Ekstremværdisætningen sikrer at den kontinuerte funktion $f(x_1,x_2)$ har et maksimum på den kompakte mængde $M(P)$.

(c) Gradienterne af objektfunktionen er

$$\nabla f(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4(x_1-4)\\ x_2\end{pmatrix}$$

og gradienterne af bibetingelserne er

$$\nabla g_1(x_1,x_2)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\ 2x_2\end{pmatrix}\ \nabla g_2(x_1,x_2)=2\begin{pmatrix}x_1-2\\ x_2-3\end{pmatrix},\ \nabla g_3(x_1,x_2)=2\begin{pmatrix}x_1-2\\ x_2+3\end{pmatrix},\ \nabla g_4(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix},\ \nabla g_5(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}0\\ 2x_2\end{pmatrix}$$

(d) **KKTNB**: Hvis $(x_1,x_2)\in M(P)$ er en optimal løsning til (P) så er $\{\nabla g_i(x_1,x_2)\mid g_i(x_1,x_2)=0\}$ lineært afhængig eller $\nabla f(x_1,x_2)\in \operatorname{cone}(\{\nabla g_i(x_1,x_2)\mid g_i(x_1,x_2)=0\})$.

(e) Nej.

(f) Ja, for $g_1(6,0)=0$, $\nabla g_1(6,0)=(1,0)$ så $\nabla f(6,0)=(4,0)\in\operatorname{cone}(\{\nabla g_1(6,0)\})=\operatorname{cone}(\{(1,0)\}$.

(g) Ja, for $2\nabla f(3,3)=(-4,3)$ ligger i $\operatorname{cone}(\{\nabla g_1(3,3),\nabla g_2(3,3),\nabla g_5(3,3)\})=\operatorname{cone}(\{(1,2),(-1,0),(0,1)\})$.

(h) Ja.

(i) Punktet er bestemt ved at $x_2>0$ og

$$x_1+\frac{1}{3}x_2^2=6 \text{ og } \begin{pmatrix}4(x_1-4)\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3\\ 2x_2\end{pmatrix}$$

for et $\lambda\geq 0$. Det giver $\lambda=\frac{1}{2}$ og $x_1=\frac{35}{8}$, $x_2=\sqrt{\frac{39}{8}}$.

(j) $(4,0)$

(k) Ud fra figuren ser vi at $O(P)=\{(1,3),(1,-3)\}$ og $\sup f(M(P))=f(1,\pm 3)=\frac{45}{4}$.

Opgave 2

(a) Nej: En åben mængde kan ikke indeholde et overtal.

(b) Ja, det sker feks hvis f er en konstant funktion.

(c) Nej, for $f^{-1}(A)$ er igen åben.

Opgave 3

(a) $DF(x_1,x_2,y_1,y_2)=\begin{pmatrix}2x_1 & 2x_2 & -y_2 & -y_1\\ y_1 & y_2 & x_1 & x_2\end{pmatrix}$

(b) I $DF(1,1,2,1)=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ er den kvadratiske delmatrix $\frac{\partial F}{\partial(y_1,y_2)}$ invertibel. Implicit Funktion Sætning sikrer at ligningssystemet $F(x_1,x_2,y_1,y_2)=(0,3)$ lokalt kan løses for (y_1,y_2). $L_1(1,1)=2$.

(c) $DL(1,1)=-\left(\frac{\partial F}{\partial(y_1,y_2)}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial(x_1,x_2)}=-\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

(d) $L_1(1+\Delta x_1,1+\Delta x_2)\approx 2-6\Delta x_1-4\Delta x_2$.

Opgave 4

Nej, sammenlign med den divergente række $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.