JMM

MASO 2016B

Dette eksamenssæt består af 2 sider. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2016 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

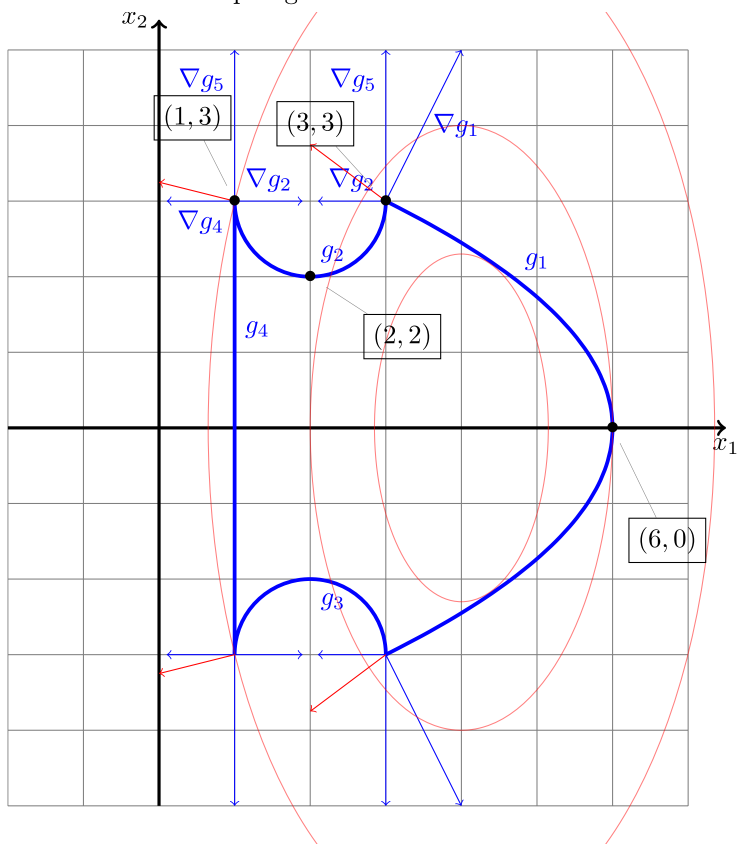
Betragt optimeringsproblemet

(P) Maksimér $f(x_1, x_2)$ under bib $g_1(x_1, x_2) \le 0$, $g_2(x_1, x_2) \le 0$, $g_3(x_1, x_2) \le 0$, $g_4(x_1, x_2) \le 0$, $g_5(x_1, x_2) \le 0$

Objektfunktionen er $f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + \frac{1}{4}x_2^2$. Den første bibetingelse er givet ved funktionen $g_1(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{3}x_2^2 - 6$ og $g_4(x_1, x_2) = 1 - x_1$, $g_5(x_1, x_2) = x_2^2 - 9$. Mængden af mulige løsninger

$$M(P) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid g_1(x_1, x_2) \le 0,\ g_2(x_1, x_2) \le 0,\ g_3(x_1, x_2) \le 0,\ g_4(x_1, x_2) \le 0, g_5(x_1, x_2) \le 0\}$$

er området begrænset af de blå kurver på figuren herunder.



(a) Bibetingelser $g_2(x_1, x_2)$ og $g_3(x_1, x_2)$ svarer til to cirkelbuer på figuren. Bestem funktionerne $g_2(x_1, x_2)$ og $g_3(x_1, x_2)$.
(b) Har optimeringsproblemet en løsning?
(c) Bestem gradienterne for de seks funktioner der indgår i (P).
(d) Formulér Karush–Kuhn–Tucker nødvendige betingelser (**KKTNB**) for optimeringsproblemet (P).
(e) Er Karush–Kuhn–Tucker betingelserne opfyldt i punktet $(2, 2)$?
(f) Er Karush–Kuhn–Tucker betingelserne opfyldt i punktet $(6, 0)$?
(g) Er Karush–Kuhn–Tucker betingelserne opfyldt i punktet $(3, 3)$?
(h) Er Karush–Kuhn–Tucker betingelserne opfyldt i punktet $(1, 3)$?
(i) Find et punkt $(x_1, x_2) \in M(P)$ hvor $x_2 > 0$, $g_1(x_1, x_2) = 0$, $g_i(x_1, x_2) \ne 0$ for $i = 2, 3, 4, 5$, og **KKTNB** er opfyldt.
(j) Find et punkt $(x_1, x_2) \in M(P)$, hvor $g_i(x_1, x_2) \ne 0$ for alle $i = 1, 2, 3, 4, 5$, og **KKTNB** er opfyldt.
(k) Løs optimeringsproblemet (P): Bestem $\sup f(M(P))$ og $O(P) = \{(x_1, x_2) \in M(P) \mid f(x_1, x_2) = \sup f(M(P))\}$. (Du må gerne argumentere ud fra figuren.)

(FORTSÆTTES)

Opgave 2

Afgør, med et kort argument eller et eksempel, følgende tre spørgsmål.

(a) Lad $A \neq \emptyset$ være en åben og begrænset delmængde af reelle tal. Kan det ske at $\sup A$ ligger i A?

(b) Lad $A \neq \emptyset$ være en åben delmængde af $\mathbf{R}^n$ og $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ en kontinuert funktion sådan at $f(A)$ er begrænset. Kan det ske at $\sup f(A)$ ligger i $f(A)$?

(c) Lad $A \neq \emptyset$ være en åben delmængde af $\mathbf{R}^m$ og $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ en kontinuert funktion sådan at $f^{-1}(A)$ er begrænset (og ikke tom). Kan det ske at $\sup f^{-1}(A)$ ligger i $f^{-1}(A)$?

Opgave 3

Ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

har løsningen $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 1, 2, 1)$.

(a) Find Jacobi matricen $DF(x_1, x_2, y_1, y_2)$ for C^1-funktionen $F\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ givet ved

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

(b) Redegør for at der findes der findes en C^1-funktion $L(x_1, x_2) = (L_1(x_1, x_2), L_2(x_1, x_2))$, defineret i $\mathbf{R}^2$ nær $(1, 1)$ og med værdier i $\mathbf{R}^2$ nær $(2, 1)$, sådan at

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1(x_1, x_2) \\ L_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

for (x_1, x_2, y_1, y_2) nær $(1, 1, 2, 1)$.

(c) Find Jacobi matricen $DL(1, 1)$.

(d) Hvad er $L_1(1, 1)$? Find en approximation til funktionen L_1 nær $(1, 1)$.

Opgave 4

Er den undelig række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{2016n^3 + 2017n^2}$$

konvergent? (Det er ikke nok blot at referere hvad din computer mener.)

(SLUT)