JMM

Besvarelse af MASO 2016A

Opgave 1

(a) $32^{63} = 2^{315}$

(b) Da $\sqrt[n]{n}$ konvergerer mod 1 gør $\sqrt[n]{n}^{2016}$ det også.

(c) Nej, rækken er divergent; sammenlign med den divergente række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Opgave 2

(a) $\theta(t)$ ligger på enhedscirklen med vinkel t. $\theta(t)^5$ ligger på enhedscirklen med vinkel $5t$.

(b) $\cos^5 t - 10\cos^3 t \sin^2 t + 5\cos t \sin^4 t = \cos^5 t - 10\cos^3 t(1-\cos^2 t) + 5\cos t(1-\cos^2 t)^2 = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t$

(c) $\theta(t)^5 = \cos(5t) + i\sin(5t)$.

(d) Se (b).

(e) Polynomiet

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = (x-1)(4x^2+2x-1)^2$$

har 5 rødder hvoraf to er dobbeltrødder. Punkt (d) siger at $x = \cos(j\frac{2\pi}{5})$ for $j = 0, 1, \ldots, 4$ er rødder. (Her er samme værdi for $j = 1, 4$ og $j = 3, 2$.)

Opgave 3

(a) (P) har en løsning ifølge Ekstremværdisætningen.

(b)

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8(x_1 - 3) \\ 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Niveaukurverne er ellipser med centrum i $(3, 0)$, alle med en vandret halvakse som er halvt så stor som den lodrette halvakse.

(d) Da $x_1 + x_2 = a$ og $1 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = a(x_1 - x_2)$ er $x_1 - x_2 = \frac{1}{a}$. Skæringspunktet er derfor $(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2}(a + \dfrac{1}{a}, a - \dfrac{1}{a})$

(e) Hvis $a = 5$ er skæringspunktet $(\dfrac{13}{5}, \dfrac{12}{5})$

(f) Der er ingen.

(g) Da **LICQ** er opfyldt i hele $M(P)$ siger **KKTNB** at de optimale løsninger skal findes blandt de punkter $(x_1, x_2) \in M(P)$ hvor

- $g(x_1, x_2), g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2) \leq 0$
- $u, u_1, u_2 \geq 0$
- $ug(x_1, x_2) = 0, u_1 g_1(x_1, x_2) = 0, u_2 g_2(x_1, x_2) = 0$
- $\begin{pmatrix} 8(x_1 - 3) \\ 2x_2 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(h) Ja, $\nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, og $\nabla f(1, 0) = 8\nabla g(1, 0)$.

(i) Ja, $\nabla f(\frac{13}{5}, \frac{12}{5}) = \begin{pmatrix} -\frac{16}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$, $\nabla g(\frac{13}{5}, \frac{12}{5}) = \begin{pmatrix} -\frac{26}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(\frac{13}{5}, \frac{12}{5}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, og $\nabla f(\frac{13}{5}, \frac{12}{5}) = \frac{4}{5}\nabla g(\frac{13}{5}, \frac{12}{5}) + \frac{24}{25}\nabla g_1(\frac{13}{5}, \frac{12}{5})$.

(j) Ja, $\nabla f(5, 0) = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(5, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(5, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, og $\nabla f(5, 0) = 8\nabla g_1(5, 0) + 8\nabla g_2(5, 0)$.

(k) Lad os sige at $(x_1, x_2) \in M(P)$, $x_2 > 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 1$, $x_1 + x_2 < 5$, og

$$\begin{pmatrix} 8(x_1 - 3) \\ 2x_2 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Så er $u = 1$, $8(x_1 - 3) = -2x_1$ giver $x_1 = \frac{12}{5}$, og dermed $x_2 = \sqrt{x_1^2 - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$.

Alternativt, lad os sige at $(x_1, x_2) \in M(P)$, $x_2 > 0$, $x_1 + x_2 = 5$, $x_1^2 - x_2^2 > 1$ og

$$\begin{pmatrix} 8(x_1 - 3) \\ 2x_2 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så er $8(x_1 - 3) = 2x_2 = 2(5 - x_1)$, som giver $x_1 = \frac{17}{5}$, og dermed $x_2 = 5 - x_1 = \frac{8}{5}$.

(l) $\sup(P) = f(1, 0) = f(5, 0) = 16$, $O(P) = \{(1, 0), (5, 0)\}$.

(m) $\inf(P) = 0 = f(3, 0)$