MASO 2016A

Dette eksamenssæt består af 2 sider. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2016 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

(a) Hvilken værdi har følgen $n^{\frac{2016}{n}}$ for $n = 32$?
(b) Er følgen $n^{\frac{2016}{n}}$ konvergent? Find grænseværdien $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2016}{n}}$ hvis du mener den er konvergent.
(c) Er den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{2016}{n}}}$$

konvergent?

Opgave 2

Binomialformlen siger at

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \tag{1}$$

for all komplekse tal $a, b \in \mathbf{C}$. Lad $t \in \mathbf{R}$ være et reelt tal.

(a) Hvor i den komplekse plan $\mathbf{C}$ ligger tallet $\theta(t) = \cos(t) + i\sin(t)$? Og hvor ligger $\theta(t)^5$?
(b) Find realdelen af $\theta(t)^5$ ved at bruge binomialformlen (1).
(c) Forklar hvorfor realdelen af $\theta(t)^5$ er $\cos(5t)$.
(d) Vis formlen

$$16\cos^5(t) - 20\cos^3(t) + 5\cos(t) = \cos(5t), \qquad t \in \mathbf{R}$$

ved at kombinere (b) og (c) med $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.
(e) Hvor mange rødder har polynomiet $16x^5 - 20x^3 + 5x - 1$? Hvad er rødderne?
Vink: Hvad er højresiden i (d) når $t = j\frac{2\pi}{5}$ for $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$?

Opgave 3

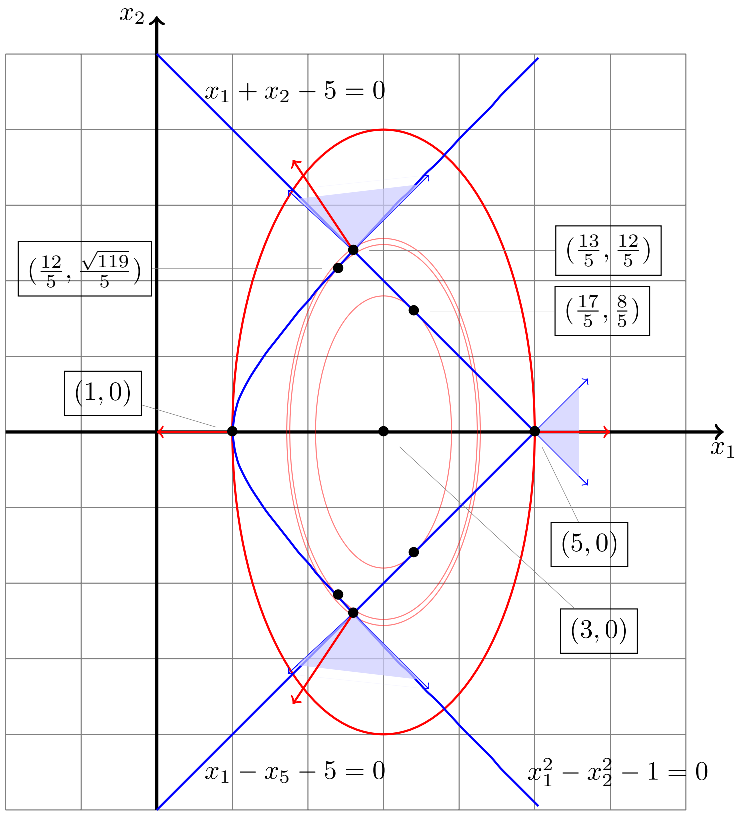
Lad g, g_1, g_2 være funktionerne defineret ved $g(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 + x_2^2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 5$ og $g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2 - 5$ i den åbne halvplan $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 0\}$ i $\mathbf{R}^2$. Betragt optimeringsproblemet

(P) Maksimér $f(x_1, x_2)$ under bibetingelserne $g(x_1, x_2) \le 0$, $g_1(x_1, x_2) \le 0$, $g_2(x_1, x_2) \le 0$

hvor objektfunktionen er $f(x_1, x_2) = 4(x_1 - 3)^2 + x_2^2$. Som sædvanlig er

$$M(P) = \{(x_1, x_2) \in A \mid x_1^2 - x_2^2 \ge 1, x_1 + x_2 \le 5, x_1 - x_2 \le 5\}$$

mængden af mulige og $O(P)$ er mængden af optimale løsninger. Tag dig tid til at identificere $M(P)$ på figuren.



(a) Har optimeringsprogrammet (P) en løsning?

(b) Find gradienterne ∇f, ∇g, ∇g_1 og ∇g_2.

(c) Beskriv ellipsen $f^{-1}(4) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 | f(x_1, x_2) = 4\}$. Kan du give en generel beskrivelse med ord af niveaukurverne for objektfunktionen $f(x_1, x_2)$?

(d) Find skæringspunktet mellem linjen $x_1 + x_2 = a$ og hyperblen $x_1^2 - x_2^2 = 1$ når $a \geq 1$, $x_1 \geq 1$ og $x_2 \geq 0$.
Vink: I skæringspunktet er $a = x_1 + x_2$ og $1 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = a(x_1 - x_2)$.

(e) Find de punkter (x_1, x_2) i $M(P)$ hvor $g(x_1, x_2) = 0$ og $g_1(x_1, x_2) = 0$.
Vink: Brug (d).

(f) Find de punkter i $M(P)$ hvor gradienterne for de aktive bibetingelser er lineært afhængige.

(g) Hvad siger Karush–Kuhn–Tuckers nødvendige betingelser for (P)? Hvorfor er (f) relevant for dette spørgsmål?

(h) Er Karush–Kuhn–Tucker betingelserne fra (g) opfyldt i $(1, 0)$?

(i) Er Karush–Kuhn–Tucker betingelserne fra (g) opfyldt i $(\frac{13}{5}, \frac{12}{5})$?

(j) Er Karush–Kuhn–Tucker betingelserne fra (g) opfyldt i $(5, 0)$?

(k) Bestem et af de punkter $(x_1, x_2) \in M(P)$ med $x_2 > 0$ hvor netop én bibetingelse er aktiv og Karush–Kuhn–Tucker betingelserne er opfyldt.

(l) Hvad er $\sup f(M(P))$? Bestem mængden $O(P)$ af optimale løsninger. (Du må gerne referere til figuren.)

(m) Hvad er $\inf f(M(P))$?
Vink: $f(x_1, x_2) \geq 0$ for alle $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

(SLUT)