JMM, Vinter 2015/2016

MASO 2015B

Dette eksamenssæt består af 2 sider. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2015 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

Lad $f_1\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ og $f_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være to reelle funktioner defineret på $\mathbf{R}^2$. Er det altid rigtigt at

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid f_1(x_1, x_2) \le 0, f_2(x_1, x_2) \le 0\}$$

er en afsluttet delmængde af $\mathbf{R}^2$? Er det altid forkert? Begrund dit svar.

Opgave 2

Lad følgen a_n, $n = 1, 2, \ldots$, være givet ved

$$a_n = \begin{cases} n^n & n \le 10000 \\ \frac{n^2}{2^n} & n > 10000 \end{cases}$$

Er rækken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent?

Opgave 3

Lad funktionen $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ være givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 x_3^3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

(a) Find Jacobimatricen for funktionen $f(x_1, x_2, x_3)$ i ethvert punkt $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

(b) Hvad er $f(1, 1, 1)$?

(c) Redegør for at der findes funktioner, $x_2(x_1)$ og $x_3(x_1)$, sådan at

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1, 3) \iff \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(x_1) \\ x_3(x_1) \end{pmatrix}$$

hvor det er underforstået at vi kun betragter punkter (x_1, x_2, x_3) nær $(1, 1, 1)$.

(d) Hvad er $x_2(1)$ og $x_3(1)$?

(e) Hvad er $x_1^2 + x_2(x_1)^2 + x_3(x_1)^2$ når x_1 er tæt ved 1?

(f) Er der nogen som helst grund til at tro at

$$x_1 + x_2(x_1)x_2'(x_1) + x_3(x_1)x_3'(x_1) = 0$$

når x_1 er tæt ved 1?

Opgave 4

Lad $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funktionen givet ved $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2$. Vi betragter optimeringsproblemet

$$(P_0) \qquad \text{Maksimér } f(x_1, x_2) \text{ under bibetingelserne } |x_1| \le 2,\ |x_2| \le 1$$

(a) Har problemet (P_0) optimale løsninger?

(b) Find fire C^1-funktioner (differentiable funktioner) $g_1, \ldots, g_4\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sådan at (P_0) kan omformuleres til

$$(P) \qquad \text{Maksimér } f(x_1, x_2) \text{ under bibetingelserne } g_1(x_1, x_2) \le 0,\ g_2(x_1, x_2) \le 0,\ g_3(x_1, x_2) \le 0,\ g_4(x_1, x_2) \le 0$$

(c) Hvordan ser Karush–Kuhn–Tucker betingelserne for (P) ud?

(d) Find de mulige løsninger til (P) hvor gradienterne for de aktive bibetingelser er lineært afhængige.

(e) Find alle de mulige løsninger til (P) som opfylder Karush–Kuhn–Tucker betingelserne.

(f) Bestem den optimale værdi $\sup(P)$ for (P) (eller (P_0)).

(g) Bestem $\inf f(\partial M(P))$.

(SLUT)