Besvarelse af MASO 2015A

Opgave 1

(a) Ja.

(b) Integralkriteriet siger at

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N+1}^{\infty} f(t)dt \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le \sum_{n=1}^{N} f(n) + \int_{N}^{\infty} f(t)dt$$

når $f\colon [1,\infty[\to]0,\infty[$ er en aftagende kontinuert funktion der kan integreres ud i ∞ – for eksempel $f(t) = \frac{1}{t^6}$. Vi indsætter

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{t^6} = \frac{1}{5(N+1)^5}, \qquad \int_{N}^{\infty} \frac{1}{t^6} = \frac{1}{5N^5}$$

og får ulighederne.

(c) Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \ge 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \ge 1,16$ er $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\right)^2 \ge 1,16^2 \ge 1,34$. Formlen fra (b) giver at $1.02 \ge 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{5\cdot 2^5} \ge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$. Altså er $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\right)^2 > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Opgave 2

(a) $f(1,1,1) = 3$.

(b) Jacobimatricen for f er $Df(x_1,x_2,x_3) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}) = (2x_1x_3, 3x_2^2x_3^2, x_1^2 + 2x_2^3x_3 + 4x_3^3)$. I punktet $(1,1,1)$ er $Df = (2,3,7)$. Da $\frac{\partial f}{\partial x_3}(1,1,1) \neq 0$ kan vi løse ligningen for x_3.

(c) $x_3(1,1) = 1$.

(d) Implicit Funktion Sætning siger at

$$(2,3) + 7(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}) = (0,0)$$

Derfor er $(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}) = (-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$.

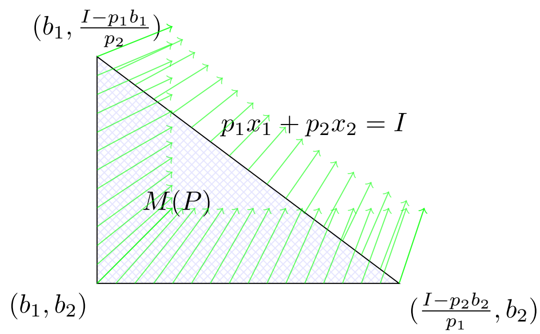
(e) Den lineære approksimation er

$$x_3(1+\Delta x_1, 1+\Delta_2) \approx 1 - \frac{2}{7}\Delta x_1 - \frac{3}{7}\Delta x_2$$

(f) Den retningsafledte $(x_3)'_v(1,1)$ af x_3 i $(1,1)$ i retning $v = (-1,2)$ er $(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}) \cdot (-1,2) = -\frac{4}{7}$ er negativ, så $x_3(x_1,x_2)$ aftager i retning v.

Opgave 3

(a) De mulige løsninger



Gradienterne ∇U for kriteriefunktionen er vist med grønt.

(b) Den kontinuerte funktion U har et maksimumspunkt (og et minimumspunkt) på den kompakte mængde $M(P)$.

(c) Gradienterne for de aktive bibetingelser er lineært uafhængige i hele $M(P)$.

(d) Regneregler for differentiation.

(e) Karush–Kuhn-Tucker betingelserne er

- $u_1, u_2, u \ge 0$
- $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $p_1x_1 + p_2x_2 \le I$
- $u_1(b_1 - x_1) = 0$, $u_2(b_2 - x_2) = 0$, $u(p_1x_1 + p_2x_2 - I) = 0$,
- $U(x_1,x_2)\begin{pmatrix} \frac{a_1}{x_1} \\ \frac{a_2}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

(f) Venstresiden i den fjerde Karush–Kuhn–Tucker betingelse er positiv i hele $M(P)$. Derfor er u positiv på højresiden. Det betyder at den tredje bibetingelse altid er aktiv.

(g) Antag der der er en optimal løsning (x_1, x_2) med førstekoordinat $x_1 = b_1$. Vi vil vise at $p_1 b_1 \geq a_1 I$.

Da $x_1 = b_1$ er $p_2 x_2 = I - p_1 b_1$ fordi den tredje bibetingelse er aktiv ifølge (f). Den anden bibetingelse er ikke aktiv da $x_2 > b_2$. Vi har altså

$$U \begin{pmatrix} \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{a_2}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

hvor $U = U(x_1, x_2)$ og u er positive. Dermed er $U\frac{a_2}{x_2} = up_2$, eller $u = \frac{Ua_2}{p_2 x_2}$, og $U\frac{a_1}{b_1} = -u_1 + up_1 \leq up_1$. Det giver

$$p_1 b_1 = \frac{up_1 b_1}{u} \geq \frac{Ua_1}{u} = \frac{Ua_1 p_2 x_2}{Ua_2} = \frac{a_1}{a_2} p_2 x_2 = \frac{a_1}{a_2}(I - p_1 b_1)$$

Generelt gælder at $x \geq c(I - x) \iff x \geq \frac{c}{1+c} I$ når $1 + c > 0$. Anvendt med $x = p_1 b_1$ viser det at

$$p_1 b_1 \geq \frac{\frac{a_1}{a_2}}{1 + \frac{a_1}{a_2}} I = a_1 I$$

idet vi husker at $a_1 + a_2 = 1$.

(h) Lad (x_1, x_2) være en optimal løsning til (P). Vi ved at den tredje bibetingelse, og kun den, er aktiv i (x_1, x_2). Karush–Kuhn–Tucker betingelserne fra (e) viser at

$$U \begin{pmatrix} \frac{a_1}{x_1} \\ \frac{a_2}{x_2} \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \qquad U = U(x_1, x_2)$$

eller $Ua_1 = up_1 x_1$, $Ua_2 = up_2 x_2$. Så er

$$\frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} = \frac{up_1 x_1}{up_2 x_2} = \frac{Ua_1}{Ua_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

og $I = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_2 x_2 (\frac{p_1 x_1}{p_2 x_2} + 1) = p_2 x_2 (\frac{a_1}{a_2} + 1) = \frac{p_2 x_2}{a_2}$ giver $x_2 = \frac{a_2 I}{p_2}$. Af symmetrigrunde er $x_1 = \frac{a_1 I}{p_1}$. Altså er $O(P) = \{(I\frac{a_1}{p_1}, I\frac{a_1}{p_1})\}$.

Den maksimale værdi er $U(x_1, x_2) = U(I\frac{a_1}{p_1}, I\frac{a_1}{p_1}) = I\frac{U(a_1,a_2)}{U(p_1,p_2)}$ og Lagrange muliplikatoren er

$$u = \frac{Ua_1}{p_1 x_1} = \frac{Ua_1}{Ia_1} = \frac{U}{I} = \frac{U(a_1, a_2)}{U(p_1, p_2)}$$

(i) $\sup(P) = I\frac{U(a_1,a_2)}{U(p_1,p_2)}$

(j) Minimator for U er (b_1, b_2). Det er det eneste sted i $M(P)$ hvor $-\nabla U$ ligger i den positive kegle udspændt af de aktive bibetingelsers gradienter.

(k) $U(b_1, b_2)$.