MASO 2015A

Dette eksamenssæt består af 2 sider. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2015 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

(a) Er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergent?

(b) Giv en begrundelse for at

$$1 + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{N^6} + \frac{1}{5(N+1)^5} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \leq 1 + \frac{1}{2^6} + \cdots + \frac{1}{N^6} + \frac{1}{5N^5}$$

for alle $N \geq 2$.
Vink: Integralkriteriet.

(c) Er det rigtigt at $\left(\frac{1}{n^3}\right)^2 = \frac{1}{n^6}$? Og at $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$?
Vink: Du må gerne benytte uden videre at $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \geq 1,16$ og $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} \leq 1,02$.

Opgave 2

Lad $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være C^1-funktionen givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_3^4, \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$$

(a) Hvad er $f(1,1,1)$?

(b) Gør rede for at der findes en C^1-funktion $x_3(x_1, x_2)$ sådan at

$$x_1^2 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_3^4 = 3 \iff x_3 = x_3(x_1, x_2)$$

hvor det er underforstået at vi kun betragter punkter (x_1, x_2, x_3) nær $(1,1,1)$.

(c) Hvad er $x_3(1,1)$?

(d) Find den lineære approksimation for funktionen $x_3(x_1, x_2)$ nær $(1,1)$, f.eks. på formen

$$x_3(1 + \Delta x_1, 1 + \Delta x_2) \approx 1 + a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2$$

for passende konstanter, a_1 og a_2.

(e) Er $x_3(x_1, x_2)$ voksende eller aftagende nær $(1,1)$ i retning $v = (-1, 2)$?

Opgave 3

Definér $U(x_1, x_2)$ og $g(x_1, x_2)$ til at være funktionerne $U(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ og $g(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I$ for $x_1 > 0$ og $x_2 > 0$. Her er

- a_1 og a_2 positive konstanter med sum $a_1 + a_2 = 1$
- b_1, b_2, p_1, p_2 og I positive konstanter med $p_1 b_1 + p_2 b_2 < I$

Betragt optimeringsproblemet

$$(P) \qquad \text{Maksimér } U(x_1, x_2) \text{ under bibetingelserne } b_1 - x_1 \leq 0,\ b_2 - x_2 \leq 0,\ g(x_1, x_2) \leq 0$$

og lad $O(P)$ være mængden af optimale løsninger.

(a) Tegn en skitse af mængden

$$M(P) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq b_1,\ x_2 \geq b_2,\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I\}$$

af mulige løsninger til (P).

(b) Findes der optimale løsninger til optimeringsproblemet (P)?

(c) Find de mulige løsninger i $M(P)$ hvor gradienterne for de aktive bibetingelser er lineært afhængige.

(d) Gør rede for at gradienten for U opfylder

$$\nabla U(x_1, x_2) = U(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{a_1}{x_1} \\ \frac{a_2}{x_2} \end{pmatrix}$$

(e) Hvordan ser Karush–Kuhn–Tucker betingelserne for (P) ud?

(f) Hvorfor er den tredje bibetingelse, $g(x_1, x_2) \leq 0$, aktiv i enhver optimal løsning $(x_1, x_2) \in O(P)$ til (P)?

(g) Antag at $p_1b_1 < a_1I$. Vis at der ikke findes optimale løsninger $(x_1, x_2) \in O(P)$ med førstekoordinat $x_1 = b_1$.
Vink: Dette spørgsmål kan være svært. Du kan godt gå videre selv om du ikke kan besvare (g).

(h) Antag at $p_1b_1 < a_1I$ og $p_2b_2 < a_2I$. Bestem mængden $O(P)$ af optimale løsninger!
Vink: Fra (g) ved vi at under denne antagelse er $x_1 > b_1$ og $x_2 > b_2$ for alle optimale løsninger $(x_1, x_2) \in O(P)$.

(i) Find den optimale værdi $\sup(P) = \sup\{U(x_1.x_2) \mid (x_1, x_2) \in M(P)\}$ forudsat at $p_1b_1 < a_1I$ og $p_2b_2 < a_2I$ som i (h).

(j) Der er ét punkt i $M(P)$ som opfylder Karush–Kuhn–Tucker betingelserne for $-U$. Find det!

(k) Find $\inf\{U(x_1.x_2) \mid (x_1, x_2) \in M(P)\}$.

(SLUT)