JMM

Besvarelse af MASO 2014B

Opgave 1

(a) Sand. Vi har at $a \le \sup(A)$ for alle $a \in A$ og $b \le \sup(B)$ for alle $b \in B$. Så er $a + b \le \sup(A) + \sup(B)$ for alle $a \in A$ og $b \in B$. Dvs, at $sup(A) + \sup(B)$ er et overtal for $A + B$ som dermed er opad begrænset. Da $\sup(A+B)$ er det mindste overtal, er $\sup(A + B) \le \sup(A) + \sup(B)$.

(b) Sand. Vi har lige set at $\sup(A + \{b\}) \le \sup(A) + b$. Da $A = (A + \{b\}) + \{-b\}$ er $\sup(A) \le \sup(A + \{b\}) - b$. Dette viser at $\sup(A + \{b\}) = \sup(A) + b$.

(c) Sand. Da $A + B = \bigcup_{b \in B}(A + \{b\})$ er

$$\sup(A + B) = \sup\{\sup(A) + b \mid b \in B\} = \sup(\sup(A) + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

hvor det første lighedstegn er en regneregel for supremum fra slide F1.

(d) Sand. Antag at $x \le M$ for alle $x \in A + B$. Lad b være et element i B. Så er $a = (a + b) - b \le M - b$ for ehtvert $a \in A$. Altså er A opad begrænset. Tilsvarende er B opad begrænset.

Opgave 2

(a) Begge rækker er divergente.

(b) Ja. Rækken er $\sum \frac{2}{n^2-1}$ som er konvergent ifølge Grænseværdi-sammenligningskriteriet fra slide F2 da $\sum \frac{2}{n^2}$ er konvergent.

(c) Vi har lige set at rækken er konvergent. Ved at bruge (b) ser vi at afsnitsfølgen konvergerer mod $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Vi har nemlig

$$\begin{aligned} 2\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{N} \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\Big) &= (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{N-1}) - (\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}) \\ &= (\frac{1}{1} + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}) \end{aligned}$$

og derfor er

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2 - 1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}((\frac{1}{1} + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1})) = \frac{3}{4}$$

Opgave 3

(a) $\lim(-1/(2n + 1), -1) = (0, -1)$. Nej, G er ikke afsluttet.

(b) $\mathrm{cl}(G) = G \cup \{0\} \times [-1, 1]$.

(c) Ja, $\mathrm{cl}(G)$ er afsluttet og begrænset.

(d) Ja, en kontinuert funktion på en kompakt mængde har altid en mindsteværdi. I dette tilfælde er den $-1 = f_0(0, -1)$.

(e) Af generelle grunde fra slide F6 er $f(\mathrm{cl}(G)) \subseteq \mathrm{cl}(f(G))$. Da $f(G) \subseteq f(\mathrm{cl}(G))$ og $f(\mathrm{cl}(G))$ er kompakt, specielt afsluttet, er også $\mathrm{cl}(f(G)) \subseteq f(\mathrm{cl}(G))$. Altså har vi vist at $\mathrm{cl}(f(G)) = f(\mathrm{cl}(G))$.

Opgave 4

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(x(t), y(t), t) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial U}{\partial t}$.

(b) Begge de partielle afledte er 0.

(c) Hvis

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0, y_0, t_0) & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, t_0) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, t_0) & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x_0, y_0, t_0) \end{pmatrix} \ne 0$$

så findes der en C^1-kurve $t \to (x(t), y(t), t)$ af løsninger defineret nær t_0.

(d) I formlen fra (a) er de to første led lig med 0.

(e) Dette er blot en gentagelse af (d) da $\sup P(t) = U(x^*(t), y^*(t), t)$.