MASO 2014B

Dette eksamenssæt består af 2 sider med i alt 4 opgaver. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2014 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

Lad $A \subseteq \mathbf{R}$ og $B \subseteq \mathbf{R}$ være to ikke-tomme mængder af relle tal og lad

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

være mængden af alle reelle tal som er en sum af et tal fra A med et tal fra B.

Nu følger fire påstande. Afgør for hver påstand om den er sand eller falsk. Begrund dit svar.

(a) Hvis A og B er opad begrænsede, så er $A + B$ opad begrænset og $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.
(b) Hvis A er opad begrænset og $B = \{b\}$ består af et enkelt element b, så er $\sup(A + \{b\}) = \sup(A) + b$.
(c) Hvis A og B er opad begrænsede, så er $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
(d) Hvis $A + B$ er opad begrænset, så er A og B er opad begrænsede.

Opgave 2

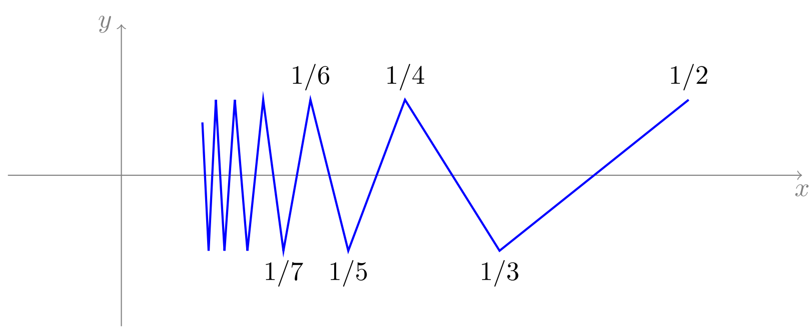
(a) Er rækkerne $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ og $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ konvergente?
(b) Er rækken $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ konvergent?
(c) Er rækken $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ konvergent? Hvis du mener den er konvergent, hvad er så rækkens sum?

Opgave 3

Lad $G \subseteq \mathbf{R}^2$ være den delmængde af planen som består af linjestykkerne mellem nabo-punkter i følgen

$$(\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{3}, -1), (\frac{1}{4}, 1), (\frac{1}{5}, -1), \ldots, (\frac{1}{2n}, 1), (\frac{1}{2n+1}, -1), \ldots$$

Her er en tegning af en del af G:



(a) Find en følge i G som konvergerer mod et punkt uden for G. Er G afsluttet?
(b) Hvad er afslutningen, $\mathrm{cl}(G)$, af G?
(c) Er $\mathrm{cl}(G)$ kompakt?
(d) Lad $f_0 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funktionen $f_0(x, y) = x + y$. Har $f_0(x, y)$ en mindsteværdi på $\mathrm{cl}(G)$? Hvad er den?
(e) Gør rede for at $\mathrm{cl}(f(G)) = f(\mathrm{cl}(G))$ for enhver kontinuert funktion $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

(FORTSÆTTES)

Opgave 4

Lad $U\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være en C^2-funktion som afhænger af de tre variable (x, y, t). For hvert $t \in \mathbf{R}$ lader vi $P(t)$ være maksimeringsproblemet

$$P(t): \quad \text{Maksimer } U(x, y, t)$$

hvor (x, y) løber over $\mathbf{R}^2$.

(a) Lad $t \to (x(t), y(t))$ være en C^1-kurve i $\mathbf{R}^2$. Find den afledte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(x(t), y(t), t)$$

af den sammensatte funktion $t \to U(x(t), y(t), t)$.

(b) Antage at (x^*, y^*) er en optimal løsning til $P(t)$. Hvad ved du om de to partielle afledte af U efter x og y

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x^*, y^*, t), \qquad \frac{\partial U}{\partial y}(x^*, y^*, t)$$

i (x^*, y^*, t)?

(c) Giv en betingelse som sikrer at ligningssystemet

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial U}{\partial x}(x, y, t) &= 0 \\ \tfrac{\partial U}{\partial y}(x, y, t) &= 0 \end{aligned}$$

kan løses for (x, y) som funktion af t. Du kan prøve at bruge Implicit Funktion Sætning.

(d) Lad $t \to (x^*(t), y^*(t))$ være en C^1-kurve, defineret i et åbent interval, af løsninger til ligningssystemet fra (c). Vis at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(x^*(t), y^*(t), t) = \frac{\partial U}{\partial t}(x^*(t), y^*(t), t)$$

Forklar også forskellen på højre og venstre side af dette lighedstegn.

(e) Antag at der findes en C^1-kurve $t \to (x^*(t), y^*(t))$ af optimale løsninger til $P(t)$. Vis at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sup P(t) = \frac{\partial U}{\partial t}(x^*(t), y^*(t), t)$$

hvor $\sup P(t)$ er den optimale værdi for $P(t)$.

(SLUT)