JMM, Vinter 2014/2015

Besvarelse af MASO 2014A

Opgave 1

Hvis $x_n = \frac{\exp(\sqrt[100]{n})}{n^{100}}$ så vil

$$\log x_n = n^{1/100} - 100 \log n = \log n \left(\frac{n^{1/100}}{\log n} - 100 \right) \to \infty \text{ for } n \to \infty$$

og dermed vil også $x_n = \exp(\log x_n) \to \infty$ for $n \to \infty$.

Opgave 2

Løsningerne til ligningen $(z-1+2i)^5 = 32 = 2^5$ er $z - 1 + 2i = 2(\cos(2j\pi/5) + i\sin(2j\pi/5))$ eller

$$z = 1 - 2i + 2(\cos(2j\pi/5) + i\sin(2j\pi/5)), \qquad j = 0, 1, 2, 3, 4$$

Opgave 3

(a) $g_2(x_1, x_2) = -(x_1-2)^2 - (x_2-6) + 4$

(b) Ja, $M(P)$ er afsluttet og begrænset.

(c) Ekstremalværdisætningen siger at den kontinuerte funktion f har en største værdi på den kompakte mængde $M(P)$.

(d) $\nabla f(x_1,x_2) = (-3, -1 + \frac{1}{5}x_2)$, $\nabla g_1(x_1,x_2) = (2x_1, -1)$, $\nabla g_2(x_1,x_2) = (-2(x_1-2), -2(x_2-6))$, $\nabla g_3(x_1,x_2) = (-1, 0)$, $\nabla g_4(x_1,x_2) = (0,1)$.

(e) Gradienten for g_2 peger radialt ind mod $(2,6)$.

(f) Nej. Tre bibetingelser, g_2, g_3 og g_4, er aktive i $(0,6)$, så gradienterne kan ikke være lineært uafhængige.

(g) Ja. Bibetingelser g_1 og g_3 er aktive i $(0,0)$ og deres gradienter er lineært uafhængige.

(h) Hvis (x_1,x_2) er optimal for (P) og hvis gradienterne for de aktive bibetingelser er lineært uafhængige i (x_1,x_2) så findes Lagrange multiplikatorer y_1, y_2, y_3, y_4 så

   (1) $y_i \geq 0$ for $i = 1,2,3,4$

   (2) $g_i(x_1,x_2) \leq 0$ for $i = 1,2,3,4$

   (3) $y_i g_i(x_1,x_2) = 0$ for $i = 1,2,3,4$

   (4) $\nabla f(x_1,x_2) = \sum_{i=1}^4 y_i \nabla g_i(x_1,x_2)$

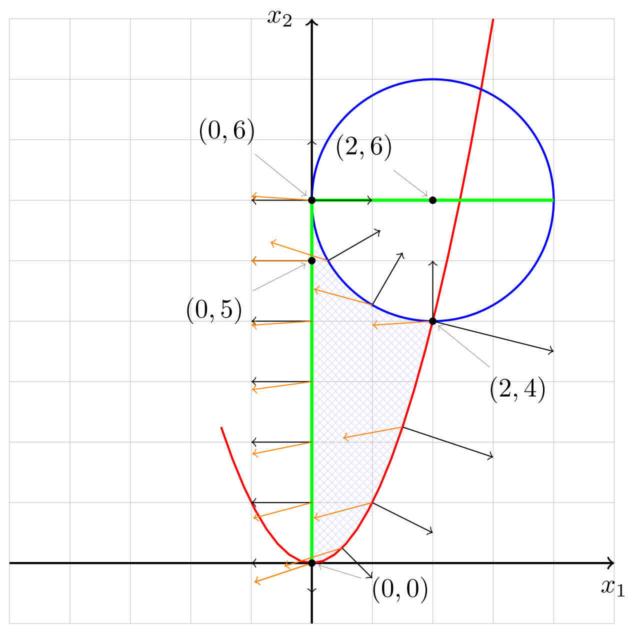
(i) Nej. I det indre af $M(P)$ siger **KKTNB** at $\nabla f(x_1,x_2) = 0$. Det er ikke tilfældet for nogen punkter i det indre.

(j) Nej. I $(2,4)$ er kun g_1 og g_2 aktive. $\nabla f(2,4) = (-3, ?)$ ligger ikke i keglen udspændt af $\nabla g_1(2,4) = (4,-1)$ og $\nabla g_2(2,4) \parallel (0,1)$

(k) Ja. I $(0,5)$ er kun g_3 aktiv og $\nabla f(0,5) = (-3,0) = 3(0,-2) = 3\nabla g_3(0,5)$.

(l) Tegningen viser at betingelserne er opfyldt i $(0,0)$ og $(0,5)$. Desuden skal $(0,6)$ undersøges.

(m) $(0,0)$



Opgave 4

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Det duale program er at minimere $3y_1 + 4(y_2 - y_3)$ under bibetingelserne

$$\begin{aligned} -2y_1 + (y_2 - y_3) - y_4 &= 1 \\ 3y_1 + 2(y_2 - y_3) - y_5 &= 5 \\ -(y_2 - y_3) &= -2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 &\geq 0, y_5 \geq 0, \end{aligned}$$

(c) Da den optimale værdi for (P) er 9, er den optimale værdi for (P') også 9. Hvis $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ er optimal så er $y_2 - y_3 = 2$ og $9 = 3y_1 + 4(y_2 - y_3) = 3y_1 + 8$. Altså er $y_1 = \frac{1}{3}$. De to andre bibetingelser i (P') giver $y_4 = \frac{1}{3}$, $y_5 = 0$. Alle punkter af formen $(\frac{1}{3}, y, y - 2, \frac{1}{3}, 0)$ hvor $y \geq 2$ er optimale.

(d) Ja.