MASO 2014A

Dette eksamenssæt består af 2 sider. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2014 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter). Ved bedømmelsen bliver der lagt vægt på argumentationens kvalitet.

Opgave 1

Argumenter for at

$$\frac{\exp(\sqrt[100]{n})}{n^{100}} \to \infty \text{ for } n \to \infty$$

Opgave 2

Find alle komplekse tal z som opfylder ligningen $(z - 1 + 2i)^5 = 32$. Skriv løsningerne på formen $z = x + iy$.

Opgave 3

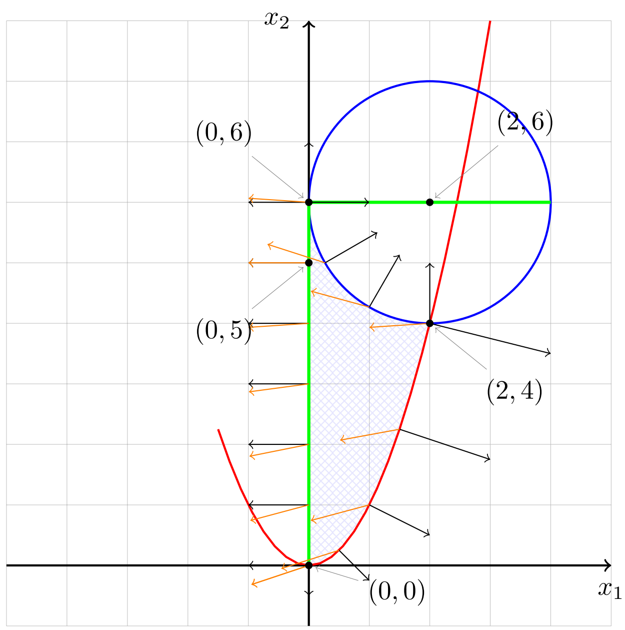
Sæt $f(x_1, x_2) = -3x_1 - x_2 + \frac{1}{10}x_2^2$, $g_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$, $g_3(x_1, x_2) = -x_1$, $g_4(x_1, x_2) = x_2 - 6$ og lad (P) være optimeringsproblemet

(P) Maksimer $f(x_1, x_2)$ under bibetingelserne $g_1(x_1, x_2) \leq 0$, $g_2(x_1, x_2) \leq 0$, $g_3(x_1, x_2) \leq 0$, $g_4(x_1, x_2) \leq 0$

Funktionen $g_2(x_1, x_2)$ er valgt sådan at de mulige løsninger

$$M(P) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid g_1(x_1, x_2) \leq 0, g_2(x_1, x_2) \leq 0, g_3(x_1, x_2) \leq 0, g_4(x_1, x_2) \leq 0\}$$

er den blåt skraverede mængde på figuren



hvor den blå kurve er en cirkel med radius 2 og centrum i $(2, 6)$.

(a) Hvad er $g_2(x_1, x_2)$?
(b) Er $M(P)$ kompakt?
(c) Har $f(x_1, x_2)$ en størsteværdi på $M(P)$?
(d) Find gradienterne for $f(x_1, x_2)$, $g_1(x_1, x_2)$, $g_2(x_1, x_2)$, $g_3(x_1, x_2)$ og $g_4(x_1, x_2)$.
(e) Beskriv gradienten $\nabla g_2(x_1, x_2)$ med ord.
(f) Er gradienterne for de aktive bibetingelser lineært uafhængige i $(0, 6)$?
(g) Er gradienterne for de aktive bibetingelser lineært uafhængige i $(0, 0)$?
(h) Hvordan ser Kuhn–Tucker nødvendige betingelser for programmet (P) ud?
(i) Er Kuhn–Tucker nødvendige betingelser for (P) opfyldt i det indre af $M(P)$?
(j) Er Kuhn–Tucker nødvendige betingelser for (P) opfyldt i $(2, 4)$?
(k) Er Kuhn–Tucker nødvendige betingelser for (P) opfyldt i $(0, 5)$?
(l) Find alle punkter i $M(P)$ hvor Kuhn–Tucker nødvendige betingelser for (P) er opfyldt.
(m) Find en optimal løsning til (P).

(FORTSÆTTES)

Opgave 4

Lad (P_0) være det generelle lineære program

$$
\begin{aligned}
(P_0)\quad \text{Maksimér } & x_1 + 5x_2 - 2x_3 \text{ under bibetingelserne} \\
-2x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\
x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

med 2 bibetingelser og 2 fortegnskrav.

(a) Find en (5×3)-matrix A sådan at (P_0) er ækvivalent med programmet

$$(P) \qquad \text{Maksimér } c^t x \text{ under bibetingelserne } Ax \leq b$$

hvor $c^t = (1, 5, -2)$ og $b^t = (3, 4, -4, 0, 0)$. (Husk at $a = b \iff a \leq b, -a \leq -b$.)

(b) Find det duale program (P') til (P).

(c) Du får nu at vide at $(0, 1, -2)$ er en optimal løsning til (P). Find 2014 optimale løsninger til (P').

(d) Kan ethvert generelt lineært program omskrives til et program af typen (P)?

(SLUT)