JMM, Vinter 2013/2014

Besvarelse af MASO 2013B

Opgave 1

(a) Da $A \subseteq A \cup B$ er $\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(A \cup B)$. Tilsvarende for B.
(b) Det er ikke rigtigt hvis $A = [-1, +1] - \{0\}$ og $B = \{0\}$.
(c) Så kan dette heller ikke være rigtigt.

Opgave 2

Ja, $z_1 = 1 - i\sqrt{2}$ og $z_2 = 1 + i\sqrt{2}$.

Opgave 3

(a) $\frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 1 & x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 + y_2 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(1,1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ er enhedsmatricen som er invertibel.

(c) $\frac{\partial F}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} E & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ er invertibel i $(1,1,1,1,1)$. Ifølge Invers Funktion sætning findes en funktion $g\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$, defineret nær $(1,1,1,2,2)$ og med værdier nær $(1,1,1,1,1)$ så $(u,v) = Fg(u,v) = (g_1(u,v), fg(u,v))$.

Opgave 4

Lad A, b og c være

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Det primale program er

$$(P) \qquad \text{Maksimer } c^t x \text{ under bibetingelser } Ax \leq b, x \geq 0$$

hvor $x \in \mathbf{R}^5$.

(a) Det duale program er

$$(P') \qquad \text{Minimer } y^t b \text{ under bibetingelser } y^t A \geq c^t, y \geq 0$$

hvor $y \in \mathbf{R}^4$.

(b) Antag at x er optimal. Vi har

$$Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \frac{14}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lad y være en optimal løsning til (P'). Vi udnytter nu komplementær slæk, $y^t(Ax - b) = 0$, $(c^t - y^t A)x = 0$. Da $[3]Ax < [3]b$ er $y_3 = 0$. Da $[2,3,4]x > 0$ er $y^t A[2,3,4] = c^t[2,3,4]$. Altså er

$$y = (y_1, y_2, 0, y_4) = A[2,3,4]^{-1}(6,5,-2) = (9, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{61}{3})$$

Vi undersøger nu om y er en mulig løsning, dvs om

$$y^t A[1,5] = (9, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{61}{3}) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = (\frac{206}{3}, -23) \overset{?}{\leq} c^t[1,5] = (7,3)$$

Da $\frac{206}{3} > 7$ er y ikke en mulig løsning til (P'). Altså kan x ikke være en optimal løsning til (P).

Opgave 5

(a) Nej.

(b) Maksimeringsprogrammet er

$$\text{(P) Maksimer } \sum \big(a_j x_j - \frac{1}{2} b_j x_j^2\big) \text{ under bibetingelser } \sum x_j \leq C, x_j \geq 0$$

Gradienterne for de aktive bibetingelser er altid lineært uafhængige i $M(P) = \{(x_j) \in \mathbf{R}^n \mid \sum x_j \leq C,\ x \geq 0\}$ da ikke alle $n+1$ bibetingelser kan være samtidigt aktive.

KKKNB siger at hvis x er en optimal løsning til (P) så findes $v \in \mathbf{R}$ og $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ så

- $v \geq 0,\ u_j \geq 0$
- $\sum_j x_j \leq C,\ x_j \geq 0$
- $v(\sum_j x_j - C) = 0,\ u_j x_j = 0$ (komplementær slæk)
- $a_j - b_j x_j = v - u_j$

Det følger at $a_j - b_j x_j = v$ hvis $x_j > 0$ og $a_j = v - u_j$ hvis $x_j = 0$. Vi har altid at

$$\sum x_j = \sum_{x_j>0} x_j = \sum_{x_j>0} \big(\frac{a_j}{b_j} - v\frac{1}{b_j}\big) = \sum_{x_j>0} \frac{a_j}{b_j} - v \sum_{x_j>0} \frac{1}{b_j} \tag{1}$$

(c) Ja, $M(P)$ er afsluttet.

(d) Ja, $M(P)$ er kompakt og f er kontinuert.

(e) Da $x_j = 0$ er $a_j = v - u_j$. Da $x_k > 0$ er $a_k - b_k x_k = v$. Altså er $a_j = v - u_j \leq v \leq v + b_j x_k = a_k$. Vi noterer at $\min\{a_j \mid x_j = 0\} \leq a_j \leq v$ når $x_j = 0$.

(f) Antag at den første bibetingelse er aktiv. Da er

$$C = \sum x_j = \sum_{x_j>0} \frac{a_j}{b_j} - v \sum_{x_j>0} \frac{1}{b_j} \leq \sum_{x_j>0} \frac{a_j}{b_j} \leq \sum \frac{a_j}{b_j} = H$$

Med andre ord: Hvis $C > H$ så er den første bibetingelse ikke aktiv, dvs $\sum x_j < C$.

(g) Antag også at den første bibetingelse ikke er aktiv og at $x_j = 0$ for mindst et j. Vi har $\sum x_j = \sum_{x_j>0} \frac{a_j}{b_j}$ fra (1) fordi $v = 0$. Vi får nu

$$H = \sum \frac{a_j}{b_j} = \sum_{x_j=0} \frac{a_j}{b_j} + \sum_{x_j>0} \frac{a_j}{b_j} = \sum_{x_j=0} \frac{a_j}{b_j} + \sum x_j \leq \sum_{x_j=0} \frac{a_j}{b_j} + C \leq K \max\{a_j \mid x_j = 0\} + C$$

og altså er

$$K \max\{a_j \mid x_j = 0\} \geq H - C$$

Der findes altså et j så $K a_j \geq H - C$.

(h) Antag at den første bibetingelse er aktiv og at der findes mindst et j så $x_j = 0$. Sæt $m = \min\{a_j \mid x_j = 0\}$. Husk fra (e) at $m \leq v$. Så er

$$\begin{aligned} C = \sum x_j = \sum_{x_j>0} \frac{a_j}{b_j} - v \sum_{x_j>0} \frac{1}{b_j} = H - \sum_{x_j=0} \frac{a_j}{b_j} - \sum_{x_j>0} \frac{v}{b_j} \\ \leq H - \sum_{x_j=0} \frac{m}{b_j} - \sum_{x_j>0} \frac{m}{b_j} \leq H - m\big(\sum_{x_j=0} \frac{1}{b_j} + \sum_{x_j>0} \frac{1}{b_j}\big) = H - mK \end{aligned}$$

Vi ser altså at

$$K \min\{a_j \mid x_j = 0\} = Km \leq H - C$$

Det betyder at hvis den totale investering $\sum x_j$ er C og mindste et projekt ikke er støttet, så findes et j med $K a_j \leq H - C$.