MASO 2013B

Dette eksamenssæt består af 2 sider. Opgaven skal besvares individuelt indenfor 72 timer.
Besvarelsen, som højst må fylde 10 håndskrevne *A4*-sider, skal forsynes med en forside med tydeligt navn og underskrift samt sideantal (inklusive forsiden), og den skal sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Skriv tydeligt og kun på én side på hvert ark. Ved bedømmelsen lægges der vægt på argumentationens kvalitet. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2013 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter).
Besvarelsen afleveres på Student Hub senest ved eksamens afslutning.

Opgave 1

For hver af de følgende tre påstande, giv et modeksempel hvis det er forkert, og find et bevis, hvis det er rigtigt.

(a) For alle delmængder, A og B, af $\mathbf{R}^n$, gælder det at $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$.
(b) For alle delmængder, A og B, af $\mathbf{R}^n$, gælder det at $\mathrm{int}(A \cup B) \subseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$.
(c) For alle delmængder, A og B, af $\mathbf{R}^n$, gælder det at $\mathrm{int}(A \cup B) = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$.

Opgave 2

Findes der to komplekse tal, z_1 og z_2, så $z_1 + z_2 = 2$ og $z_1 z_2 = 3$?

Opgave 3

Lad $f\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ være C^1-funktionen givet ved

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_3 \\ x_1 x_2 + x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

Vi har $f(1,1,1,1,1) = (1,1,1,2,2)$.

(a) Find Jacobimatricen $\frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)}$ for f.
(b) Vis at $\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(1,1,1,1,1)$ er invertibel.
(c) Gør rede for at funktionen $F\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$ gived ved $F(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) = (x_1,x_2,x_3,f(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2))$ er lokalt invertibel nær $(1,1,1,1,1)$ og $(1,1,1,2,2)$.
(d) Vis at der findes en C^1-funktion $g\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$, defineret nær $(1,1,1,2,2)$, så $fg(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2) = (v_1,v_2)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R}^5 \arrow[r, "f\begin{pmatrix} x_1,x_2,x_3 \\ y_1,y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_3 \\ x_1x_2 + x_2y_2 \end{pmatrix}"] & \mathbf{R}^2 \\
\mathbf{R}^5 \arrow[u, "g\begin{pmatrix} u_1,u_2,u_3 \\ v_1,v_2 \end{pmatrix}"] \arrow[ur, "fg\begin{pmatrix} u_1,u_2,u_3 \\ v_1,v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}"'] &
\end{tikzcd}$$

Opgave 4

Lad (P) være det lineære program

$$(P) \qquad \text{Maksimer} \quad 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \quad \text{under bibetingelser}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 &\le 4 \\
4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &\le 3 \\
2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 &\le 5 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 &\le 1 \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 &\ge 0
\end{aligned}$$

(a) Find det duale program (P') til (P)
(b) Er $x \in \mathbf{R}^5$ givet ved $x^t = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$, en optimal løsning til (P)?

Opgave 5

En investor råder over en kapital på C og kan vælge mellem n forskellige investeringsprojekter. Fortjenesten er

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j x - \frac{1}{2} b_j x_j^2\right)$$

ved en investering på x_j i projekt j, $1 \leq j \leq n$. Her er C, a_j og b_j positive konstanter. Vi sætter $H = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{b_j}$ og $K = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b_j}$

(a) Hjælp investoren ved at finde et relevant Karush-Kuhn-Tucker optimeringsprogram. Hvordan ser Karush-Kuhn-Tucker betingelserne ud? Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for optimal investering. Investoren optimerer sin fortjeneste efter dit program.

(b) Er det rigtigt at grænsen for en følge af mulige løsninger selv er en mulig løsning?

(c) Findes der optimale løsninger?

(d) Vis at $a_j \leq a_k$, hvis der investeres i projekt k men ikke i projekt j.

(e) Vis at der er kapital, som ikke bliver investeret i noget projekt, hvis $C > H$.

(f) Antag at *ikke hele* kapitalen på C investeres. Vis at der investeres i samtlige n projekter, hvis $Ka_j < H - C$ for alle $j = 1, \ldots, n$.

(g) Antag at *hele* kapitalen på C investeres. Vis at der investeres i samtlige n projekter, hvis $Ka_j > H - C$ for alle $j = 1, \ldots, n$.

(SLUT)