Besvarelse af MASO 2013A

Opgave 1

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ er konvergent for $p > 1$, er rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$ begge konvergente. Så er deres sum også konvergent.

Da $\int \frac{1}{x\ln(x)} dx = \ln(\ln(x))$ og $\ln(\ln(x)) \to \infty$ for $x \to \infty$ er $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ divergent ifølge Integralkriteriet.

Opgave 2

(a) Rigtigt! $P(x)$ og $Q(x)$ er produkter af førstegrads polynomier. Alle faktorer fra $Q(x)$ er faktorer i $P(x)$. Polynomiet $R(x)$ er produktet af de faktorer i $P(x)$ som ikke er faktorer i $Q(x)$.

(b) Hvis $x^2 + 2 = 0$, dvs $x^2 = -2$, så er $x^4 - 3x^2 - 10 = 4 + 6 - 10 = 0$.

(c) Jeg tror på (a). Jeg finder at $x^4 - 3x^2 - 10 = (x^2 + 2)(x^2 - 5)$.

(d) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 10 = (x^4 - 3x^2 - 10) - 2x(x^2 + 2) = (x^2 + 2)(x^2 - 5) - 2x(x^2 + 2) = (x^2 + 2)(x^2 - 2x - 5)$.

(e) Rødderne er $\pm\sqrt{2}i$, $1 \pm \sqrt{6}$.

Opgave 3

(a) Ja.

(b) Funktionen $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ givet ved $F(p, s, i) = U(p, s) - E(p, i)$ har Jacobi matrix

$$\frac{\partial F}{\partial(p,s,i)} = \left(\frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial F}{\partial(s,i)}\right) = \left(\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial p}, \frac{\partial U}{\partial s}, -\frac{\partial E}{\partial i}\right)$$

Her er $\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial p}$ antaget at være positiv. Punkt 1 i Implicit Funktion Sætning siger nu at ligevægtsligningen, $F(p, s, i) = 0$, kan løses for p som en funktion af (s, i). Det betyder at der lokalt findes en prisfunktion $p(s, i)$ så

$$F(p, s, i) = 0 \iff p = p(s, i)$$

(c) Punkt 3 i Implicit Funktion Sætning siger at

$$\frac{\partial p}{\partial(s,i)} = -\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(s,i)} = \left(\frac{-\frac{\partial U}{\partial p}}{\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial p}}, \frac{\frac{\partial E}{\partial i}}{\frac{\partial U}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial p}}\right)$$

(d) Punkt 4 i Implicit Funktion Sætning (eller Lineær Approksimation) siger at

$$p(s^* + \Delta s, i^* + \Delta i) \approx p^* - \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(s,i)} \begin{pmatrix} \Delta s \\ \Delta i \end{pmatrix} = p^* - \frac{\frac{\partial U}{\partial s}(p^*, s^*)\Delta s - \frac{\partial E}{\partial i}(p^*, i^*)\Delta i}{\frac{\partial U}{\partial p}(p^*, s^*) - \frac{\partial E}{\partial p}(p^*, i^*)}$$

Opgave 4

Det relevante optimeringproblem er

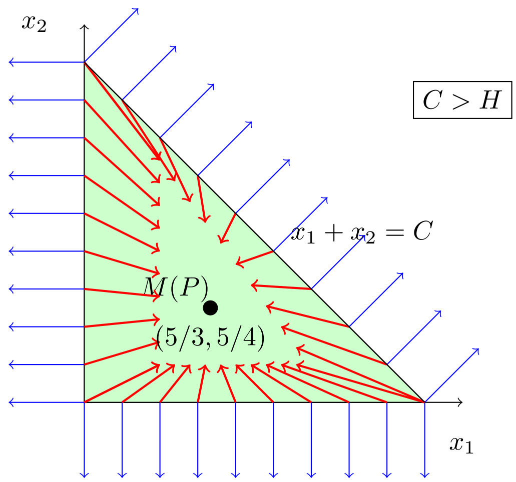
$$\text{(P)} \quad \text{Maksimer } f(x_1, x_2) = 10x_1 - 3x_1^2 + 5x_2 - 2x_2^2 \text{ under bibetingelser } x_1 + x_2 \le C,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

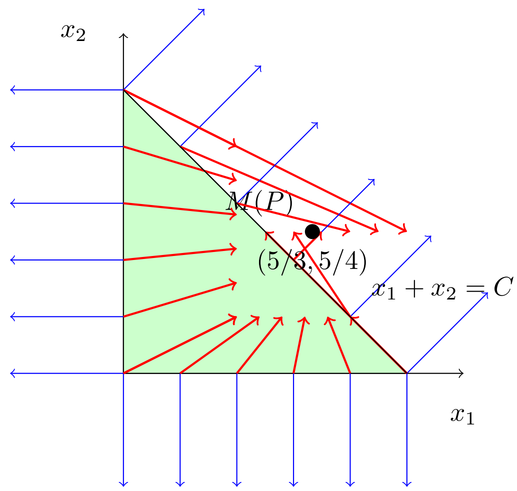
da den samlede investering er højst C. De mulige løsninger er

$$M(P) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \le C, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$$

(a) Hvis investor løser (P) bliver investeringens afkast maksimalt.

(b) Mægnden af mulige løsninger $M(P)$ er





(c) Ja, for $M(P)$ er afsluttet som fællesmængde af tre afsluttede mængder. Grænsen for en konvergent følge i en afsluttet mængde ligger i mængden.

(d) Ja, $M(P)$ er også begrænset, altså kompakt. Ekstremværdisætningen giver at den kontinuerte funktion $f(x_1, x_2)$ har et maksimum på $M(P)$.

(e) Gradienterne for bibetingelserne

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

er konstante i $M(P)$. Gradienterne for de aktive bibetingelser lineært uafhængige i alle punkter i $M(P)$ da ikke alle tre bibetingelser er aktive noget sted. Karush–Kuhn–Tuckers nødvendige betingelser siger nu at hvis (x_1, x_2) er en optimal løsning til (P) så findes v, u_1, u_2 så

- $v \geq 0$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ (positivitet)
- $x_1 + x_2 \leq C$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (bibetingelser)
- $v(x_1 + x_2 - C) = 0$, $u_1 x_1 = 0$, $u_2 x_2 = 0$ (komplementær slæk)
- $\begin{pmatrix}10 - 6x_1\\5 - 4x_2\end{pmatrix} = v\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + u_1\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ (optimalitet)

(Vi kan med det samme se at $(0, 0)$, $(x_1, 0)$ med $0 < x_1 < C$, $(0, x_2)$ med $0 < x_2 < C$ ikke kan være optimale. Lad os feks antage at $(x_1, 0)$ med $0 < x_1 < C$ er optimalt. Da er $u_1 = 0$ og $v = 0$ og

$$\begin{pmatrix}10 - 6x_1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-u_2\end{pmatrix}$$

giver at $5 = -u_2 \leq 0$, hvilket er en modstrid. De optimale punkter for (P) ligger derfor i det indre af $M(P)$ eller på linjen $x_1 + x_2 = C$.)

(f) Antag at (x_1, x_2) er en optimal løsning til (P). Så er

$$x_1 + x_2 = \begin{cases} \frac{5}{4} + \frac{10}{6} - (\frac{1}{4} + \frac{1}{6})v & x_1 > 0, x_2 > 0 \qquad (\text{da } u_1 = 0 = u_2) \\ \frac{5}{4} - \frac{1}{4}v & x_1 = 0, x_2 > 0 \qquad (\text{da } u_2 = 0) \\ \frac{10}{6} - \frac{1}{6}v & x_1 > 0, x_2 = 0 \qquad (\text{da } u_1 = 0) \\ 0 & x_1 = 0, x_2 = 0 \end{cases}$$

I alle fire tilfælde er $x_1 + x_2 \leq H$.

(g) Antag at $C > H$. Den første bibetingelse kan ikke være aktiv i en optimal løsning (x_1, x_2) fordi $x_1 + x_2 \leq H < C$. Altså er $v = 0$. Dermed er

$$\begin{pmatrix}10 - 6x_1\\5 - 4x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u_1\\-u_2\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

så $x_1 > 0$ og $x_2 > 0$. Komplementær slæk giver at $u_1 = 0$ og $u_2 = 0$. Dermed er $x_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ og $x_2 = \frac{5}{4}$. Den investerede kapital er $x_1 + x_2 = H$. (Alternativ: Den konkave funktion f har absolut maksimum i $(\frac{5}{3}, \frac{5}{4})$. Dette punkt er derfor den optimale løsning til (P) når det er en mulig løsning, dvs når $C \geq H$.)

(h) Antag at $C \leq H$. Antag $v = 0$. Som ovenfor er $10 - 6x_1 \leq 0$ og $5 - 4x_2 \leq 0$. Det giver $x_1 + x_2 \geq H$. Så er $C \geq x_1 + x_2 \geq H \geq C$. Altså er $x_1 + x_2 = C$. Hvis $v > 0$ er $x_1 + x_2 = C$ ifølge komplementær slæk. Vi har altså at $x_1 + x_2 = C$ i begge tilfælde.

Antag at $(x_1, x_2) = (0, C)$. Da er $u_2 = 0$ og

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 - 4C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - u_1 \\ v \end{pmatrix}$$

giver $10 = v - u_1 \leq v = 5 - 4C \leq 5$. Modstrid!

Vi kan altså sige at de optimale løsninger ligger på linjen $x_1 + x_2 = C$ og at $x_1 > 0$; der er altså investeret i projekt nummer 1.

(i) Da $C \leq H$ er $x_1 + x_2 = C$ og $x_1 > 0$. Antag at $x_2 = 0$, altså $(x_1, x_2) = (C, 0)$ er optimal. Da er $u_1 = 0$ og

$$\begin{pmatrix} 10 - 6C \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v - u_2 \end{pmatrix}$$

giver $5 = v - u_2 = 10 - 6C - u_2 \leq 10 - 6C$ og dermed $C \leq \frac{5}{6}$. Vi har vist at $C > \frac{5}{6} \implies x_2 > 0$.

Opgave 5

Det primale program er

$$\text{(P)} \quad \text{Maksimér } c^t x \text{ under bibetingelser } Ax \leq b,\ x \geq 0$$

hvor $x \in \mathbf{R}^5$, $c^t = (7, 6, 5, -2, 3)$, $b^t = (4, 3, 5, 1)$ og

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Det duale program er

$$\text{(P')} \quad \text{Minimér } y^t b \text{ under bibetingelser } y^t A \geq c^t,\ y^t \geq 0$$

hvor $y \in \mathbf{R}^4$.

(b) $y^t = (5, 8, 0, 0)$ er en mulig løsning til (P') og vektoren x fra det næste spørgsmål er en mulig løsning til (P). Da begge systemer har mulige løsninger, har de også begge optimale løsninger.

(c) Objektfunktionens værdi i x er $c^t x = 8$ og

$$Ax = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Antag at x er en optimal løsning til (P) og y en optimal løsnng til (P'). Så er $y^t b = 8$, $(c^t - y^t A)x = 0$ og $y^t(Ax - b) = 0$. Altså er $y_3 = 0$ da $[3]Ax < [3]b$. Da x_2, x_3 og x_4 er positive, $y^t A[2,3,4] = c^t[2,3,4]$. Vi har altså

$$(y_1, y_2, 0, y_4)(A[2,3,4], b) = (y_1, y_2, 0, y_4) \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (c^t[2,3,4], 8) = (6, 5, -2, 8)$$

Det giver

$$(y_1, y_2, 0, y_4) = (6, 5, -2, 8) \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 11 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & -8 \end{pmatrix} = (1, 1, 0, 1)$$

Men $y^t A[5] = (1, 1, 0, 1)A[5] = 1 < c^t[5] = 3$ så y er ikke en mulig løsning til (P'). Derfor er x ikke en optimal løsning til (P). (Løsningen y til ligningen $y^t A = c^t$ er en optimal løsning til (P').)