MASO 2013A

Dette eksamenssæt består af 2 sider. Opgaven skal besvares individuelt indenfor 72 timer.
Besvarelsen skal forsynes med en forside med tydeligt navn og underskrift samt sideantal (inklusive forsiden), og den skal sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Besvarelsen afleveres på Student Hub senest ved eksamens afslutning. Ved bedømmelsen lægges der vægt på argumentationens kvalitet. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2013 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter).
Besvarelsen må højst fylde 10 håndskrevne $A4$-sider. Skriv tydeligt og kun på én side på hvert ark.

Opgave 1

Afgør om rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}+\frac{3}{n^2}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$$

er konvergente.

Opgave 2

Denne opgave handler om Algebraens Fundamentalsætning.

(a) Rigtigt eller forkert? Lad $P(x)$ og $Q(x)$ være to komplekse polynomier. Antag at alle rødder i $Q(x)$ (talt med multiplicitet) også er rødder i $P(x)$. Da findes et komplekst polynomium $R(x)$ så $P(x) = Q(x)R(x)$.

(b) Vis at hvis $x^2 + 2 = 0$ (dvs $x^2 = -2$), så er $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$.

(c) Hvis du tror på (a), så skriv polynomiet $x^4 - 3x^2 - 10$ som et produkt af to andengradspolynomier.

(d) Skriv polynomiumet

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 10 = (x^4 - 3x^2 - 10) - 2x(x^2 + 2) \tag{1}$$

som et produkt af to andengradspolynomier.

(e) Find alle rødder i (1).

Opgave 3

Lad $p > 0$ være prisen på en bestemt vare, $s > 0$ virksomhedsskatten, og $i > 0$ forbrugernes gennemsnitlige indkomst. Lad videre $U(p, s)$ være udbuddet og $E(p, i)$ efterspørgslen af varen som funktioner af pris, skat og indtægt. På et marked i ligevægt er

$$U(p, s) = E(p, i) \tag{2}$$

da udbud matcher efterspørgsel. Vi antager at U og E er C^1-funktioner.

Vink: Funktionen $F(p, s, i) = U(p, s) - E(p, i)$ kan være nyttig i denne opgave.

(a) Vi antager yderligere at $\frac{\partial U}{\partial p} > 0$ og $\frac{\partial E}{\partial p} < 0$. Er det rimelige antagelser? Hvad vil du sige om fortegnet af $\frac{\partial U}{\partial s}$ og $\frac{\partial E}{\partial i}$?

(b) Gør rede for at ligevægtsbetingelsen (2) implicit bestemmer varens pris $p = p(s, i)$ på markedet som en C^1-funktion af s og i når (s, i) er tæt ved (s^*, i^*) og $U(p^*, s^*) = E(p^*, i^*)$.

(c) Forklar hvorfor de partielle afledte af prisfunktionen $p(s, i)$ er

$$\frac{\partial p}{\partial s}(s^*, i^*) = -\frac{\frac{\partial U}{\partial s}(p^*, s^*)}{\frac{\partial U}{\partial p}(p^*, s^*) - \frac{\partial E}{\partial p}(p^*, i^*)}, \qquad \frac{\partial p}{\partial i}(s^*, i^*) = \frac{\frac{\partial E}{\partial i}(p^*, i^*)}{\frac{\partial U}{\partial p}(p^*, s^*) - \frac{\partial E}{\partial p}(p^*, i^*)}$$

Hvad sker der med varens pris hvis virksomhedsskatten sættes op?

(d) Her er en approksimation

$$p(s^* + \Delta s, i^* + \Delta i) \approx p^* - \frac{\frac{\partial U}{\partial s}(p^*, s^*)\Delta s - \frac{\partial E}{\partial i}(p^*, i^*)\Delta i}{\frac{\partial U}{\partial p}(p^*, s^*) - \frac{\partial E}{\partial p}(p^*, i^*)}$$

til varens pris på markedet under en lille ændring, $(\Delta s, \Delta i)$, i skat og indkomst. Hvor kom den approksimation fra?

Opgave 4

En investor råder over kapitalen C, $0 < C < \infty$, og kan vælge mellem to investeringsprojekter. Afkastet bliver

$$f(x_1, x_2) = 10x_1 - 3x_1^2 + 5x_2 - 2x_2^2$$

hvis der investeres kapital $x_1 \geq 0$ i projekt nummer 1 og kapital $x_2 \geq 0$ i projekt 2.

Vi lader (P) være optimeringsproblemet

(P) Maksimer $f(x_1, x_2) = 10x_1 - 3x_1^2 + 5x_2 - 2x_2^2$ under bibetingelser $x_1 + x_2 \leq C$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

og vi sætter $H = \frac{5}{3} + \frac{5}{4} = \frac{35}{12}$.

(a) Giv en god grund til at investor kunne være interesseret i optimeringsproblemet (P).
(b) Tegn en skitse af mængden $M(P) \subset \mathbf{R}^2$ af mulige løsninger til (P).
(c) Er det rigtigt at en følge af mulige løsninger selv er en mulig løsning?
(d) Kan vi være helt sikre på at der optimale løsninger til (P)?
(e) Hvordan ser Karush–Kuhn–Tucker betingelserne ud for (P)?
(f) For enhver optimal løsning (x_1, x_2) til (P) gælder det at $x_1 + x_2 \leq H$. Hvorfor?
(g) Find de optimale løsninger når $C > H$. Hvor meget kapital er der blevet investeret?
(h) Hvad kan du sige om de optimale løsninger hvis $C \leq H$? Er der investeret i projekt nummer 1?
(i) Vis at hvis $\frac{5}{6} < C \leq H$ da vil den optimale investering involvere begge projekter.

Opgave 5

Lad (P) være det lineære program

$$\begin{array}{rl}
\text{Maksimér} & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\
\text{under bibetingelser} & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\
& 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\
& 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\
& 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0
\end{array}$$

(a) Hvordan ser det duale program (P') ud?
(b) Findes der mulige løsninger til (P')?
(c) Brug komplementær slæk til at afgøre om x, givet ved $x^t = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$, er en optimal løsning til (P).

(SLUT)