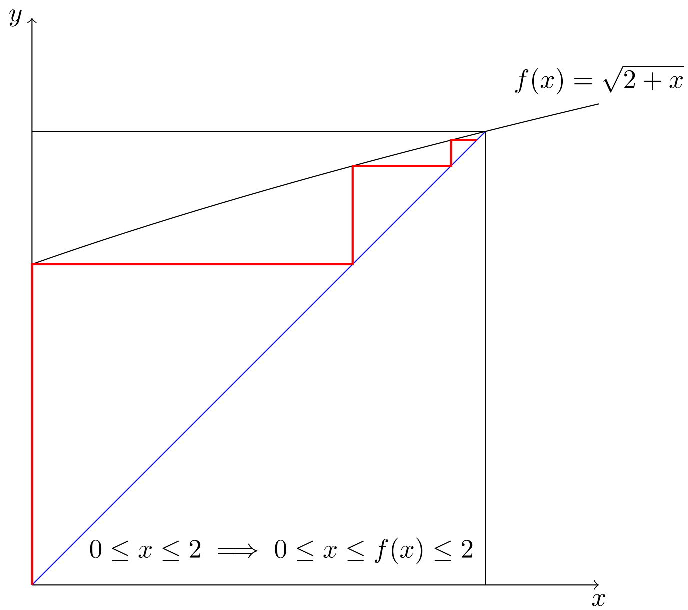
Besvarelse af MASO 2012B

Opgave 1

Definer følgen x_n rekursivt ved

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{2} & n = 1 \\ \sqrt{2 + x_{n-1}} & n > 1 \end{cases}$$

Betydningen af tallet kunne være $\lim_{n\to\infty} x_n$. Argumenter for at $x = 2$.



Opgave 2 (Cardioide)

(a) Vi har

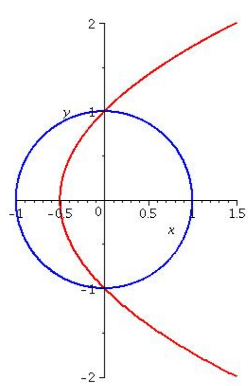
$$y^2 = \rho^2 \sin^2\theta = \rho^2(1 - \cos^2\theta) = \rho^2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = \rho(1+\cos\theta)$$

da $\rho(1-\cos\theta) = 1$. Altså er

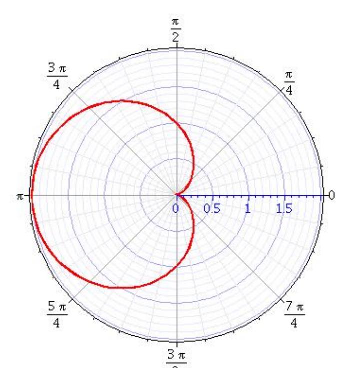
$$y^2 - 2x = \rho(1+\cos\theta) - 2\rho\cos\theta = \rho(1-\cos\theta) = 1$$

(b) Da $r = \dfrac{1}{\rho}$ og $\psi = 2\pi - \theta$ bliver $r = \dfrac{1}{\rho} = 1 - \cos\theta = 1 - \cos(-\psi) = 1 - \cos\psi$.

(c) Parablen og den inverterede parabel

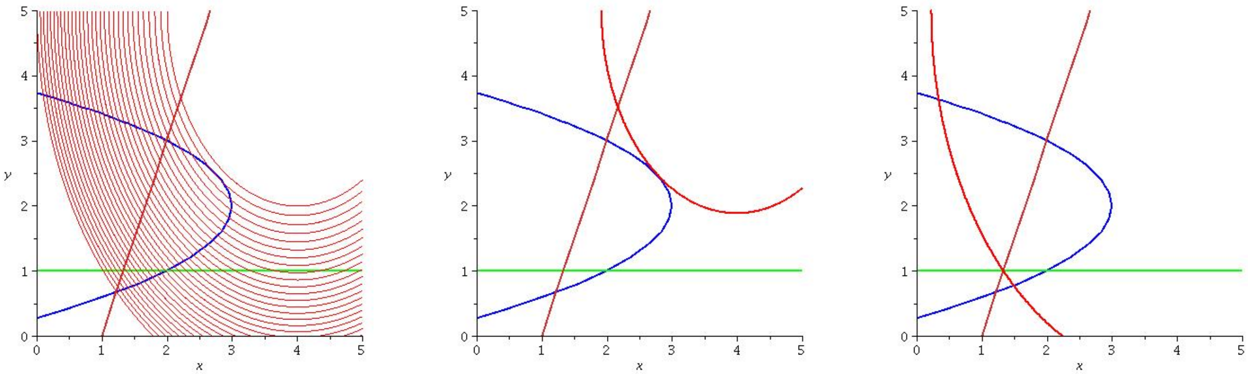


,



Opgave 3

(a) Her er tre tegninger af A_0



(b) A_0 er afsluttet som fællesmængde af tre afsluttede mængder. A_0 er også begrænset. Derfor er A_0 kompakt. Enhver kontinuert funktion har en største- og mindsteværdi på en kompakt mængde ifølge Ekstremværdisætningen.

(c) KKTNB nødvendige betingelser er
- $u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0,\ u_3 \geq 0$
- $(y-2)^2 + x - 3 \leq 0,\ 1 - y \leq 0,\ 1 - x + \frac{1}{3}y \leq 0$
- $u_1((y-2)^2 + x - 3) = 0,\ u_2(1-y) = 0,\ u_3(1 - x + \frac{1}{3}y) = 0$
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x-4) + u_1 - u_3 \\ \frac{2}{9}(y-5) + 2u_1(y-2) - u_2 + \frac{1}{3}u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) I det indre af A_0 er regularitetskravet opfyldt fordi alle bibetingelser slække. En optimal løsning i det indre vil derfor opfylde KKTNB med $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Men kun $(4,5)$ opfylder disse krav og det ligger ikke i A_0.

(e) $f(\frac{4}{3}, 1) = \frac{32}{9}$, $f(2,1) = \frac{25}{9}$, $f(2,3) = \frac{13}{9}$, og $f(2,2) = 2 = \frac{18}{9}$. Funktionen $f(x,1)$ er aftagende når $x < 4$ og derfor er $f(A_0 \cap g_2^{-1}(0)) = [f(2,1), f(\frac{4}{3},1)] = [\frac{25}{9}, \frac{32}{9}]$. Når $g_3(x,y) = 0$ er $x = \frac{1}{3}y + 1$ og $f(x,y) = f(x, \frac{1}{3}y + 1)$ er voksende, så $f(A_0 \cap g_3^{-1}(0)) = [f(\frac{4}{3},1), f(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})] = [\frac{18}{9}, \frac{32}{9}]$. Vi har $f(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{181}{144}$ som er mindre end $\frac{18}{9}$. Den optimale løsning må derfor ligge på $A_0 \cap g_1^{-1}(0)$.

(f) g_1 er aktiv, mens g_2 og g_3 er slække.

(g) KKTNB nødvendige betingelser, der er som i (c) med undtagelse af det sidste punkt som bliver
- $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x-4) + u_1 - u_3 \\ -\frac{2}{9}(y-5) + 2u_1(y-2) - u_2 + \frac{1}{3}u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

har løsning

$$(x, y, u_1, u_2, u_3) = (\frac{4}{3}, 1, 0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$$

Opgave 4

Uanset opgaveteksten, så bruger vi $F(1,1) = (2,2)$,

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy + 1 \\ 3x^2y + 2xy^2 & x^3 + 2x^2y \end{pmatrix}$

(b) F er lokalt invertibel nær $(x,y) \iff$ Jacobimatricens determinant $\neq 0$.

(c) Da Jacobimatricen i $(1,1)$

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

er invertibel er F lokalt invertibel nær $(1,1)$ og $(2,2)$.

(d) Vi differentierer $F(G(u,v))$, identitetsafbildningen, ved brug af Kædereglen og får

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(G(u,v))\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som er den søgte formel. Alternativt, så er $\frac{\partial G}{\partial(u,v)} = \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(G(u,v))^{-1}$ ifølge Invers Funktion Sætning.

(e) Indgang $(1,1)$ i matrix produktet fra (d) er

$$y^2\frac{\partial x}{\partial u} + 2xy\frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

Formlen i opgaven fås ved implicit differentiation efter u i denne ligning.

Opgave 5

(a) Det tilhørende kanoniske program har $b^t = (1, 2, -2)$, $c^t = (7, -1, -4, 1, 4, 0, 0, 0)$ og

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Der er 11 basisløsninger. En optimal basisløsning er $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, 0, 0, 0, 0, 0)$ som benytter de tre første søjler i A. Den optimale værdi er $-\frac{15}{8}$.

(c) En optimal løsning til (P) er $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8})$.