JMM, Februar 2013

MASO 2012B

Denne opgave består af 4 delopgaver på 2 sider. Opgaven skal besvares individuelt indenfor 72 timer. Besvarelsen skal forsynes med en forside med tydeligt navn og underskrift samt sideantal (inklusive forsiden), og den skal sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Besvarelsen afleveres på Student Hub senest ved eksamens afslutning. Ved bedømmelsen lægges der vægt på argumentationens kvalitet. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2012 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter).

Det kan lade sig gøre at besvare opgaven på under 10 håndskrevne $A4$-sider. Skriv tydeligt og kun på én side på hvert ark. Besvarelser på over 15 sider bliver smidt i skraldespanden.

Opgave 1

I et mareridt så jeg

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}$$

for mig. Har det nogen som helst betydning? Hvilken?

Opgave 2

Lad $z = x+iy$ være et komplekst tal (som ikke ligger på halvaksen $[0,\infty[\subset \mathbf{R}\subset \mathbf{C}$). Antag at de polære koordinater (ρ,θ), $0<\theta<2\pi$, for $z=\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ opfylder ligningen

$$\rho = \frac{1}{1-\cos(\theta)}$$

(a) Vis at $y^2 = 2x+1$.
(b) Vis at de polære koordinater (r,ψ) for $z^{-1} = r(\cos\psi + i\sin\psi)$ opfylder ligningen $r = 1-\cos(\psi)$.
(c) Tegn en skitse af parablen $P = \{x+iy \in \mathbf{C} \mid y^2 = 2x+1\}$ og den 'inverterede parabel' $P^{-1} = \{z^{-1} \mid z \in P\}$.

Opgave 3

Lad $f, g_1, g_2, g_3 \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funktionerne givet ved

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + \frac{1}{9}(y-5)^2, \quad g_1(x,y) = (y-2)^2 + x - 3, \quad g_2(x,y) = 1-y, \quad g_3(x,y) = 1-x+\frac{1}{3}y$$

Betragt minimeringsproblemet

$$\text{(P)} \qquad \text{Minimér } f(x,y) \text{ under bibetingelserne } g_1(x,y)\le 0,\ g_2(x,y)\le 0,\ g_3(x,y)\le 0$$

(a) Tegn en skitse af mængden $A_0 = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid g_1(x,y)\le 0, g_2(x,y)\le 0, g_3(x,y)\le 0\}$ af mulige løsninger til (P).
(b) Forklar hvorfor A_0 er kompakt og hvorfor (P) har en optimal løsning.
(c) Opstil Karush–Kuhn–Tucker betingelserne for problemet (P).
(d) Er der optimale løsninger i det indre af A_0?
(e) Find $f(\frac{4}{3},1)$, $f(2,1)$, $f(2,3)$, og $f(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$. Bestem $f(A_0\cap g_2^{-1}(0))$ og $f(A_0\cap g_3^{-1}(0))$.
(f) Er bibetingelserne $g_2(x,y)\le 0$ og $g_3(x,y)\le 0$ aktive i en optimal løsning? Er bibetingelse $g_1(x,y)\le 0$ aktiv i en optimal løsning? Angiv den omtrentlige placering af en optimal løsning på din skitse fra (a).
(g) Opstil Karush–Kuhn–Tucker betingelserne for *maksimeringsproblemet*

$$\text{(P)} \qquad \text{Maksimér } f(x,y) \text{ under bibetingelserne } g_1(x,y)\le 0,\ g_2(x,y)\le 0,\ g_3(x,y)\le 0$$

og find en løsning til dem.

Opgave 4

Lad $F\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ være funktionen givet ved

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^2 + y \\ x^3y + x^2y^2 \end{pmatrix}$$

(a) Find Jacobimatricen for F i alle punkter $(x,y)\in\mathbf{R}^2$
(b) Find alle $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ så F er lokalt invertibel nær (x,y).
(c) Vis at F afbilder en åben mængde omkring $(-1,1)$ bijektivt på en åben mængde omkring $(-1,-1)$. Lad

$$G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

være den lokalt definerede inverse funktion til F.

(d) Vis at

$$\begin{pmatrix} y(u,v)^2 & 2x(u,v)y(u,v) \\ 3x(u,v)^2y(u,v) & x(u,v)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

når (u,v) er nær ved $(-1,-1)$.

(e) Find Jacobimatricen for G i punktet $(-1,-1)$.

(f) Redegør for at formlerne

$$y^2\frac{\partial x}{\partial u} + 2xy\frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

$$2y\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + y^2\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2\Big(\frac{\partial x}{\partial u}y + x\frac{\partial y}{\partial u}\Big)\frac{\partial y}{\partial u} + 2xy\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0$$

gælder når (u,v) er nær $(-1,-1)$. (Her skal x og y forstås som funktioner $x(u,v)$ og $y(u,v)$ af (u,v).)

Opgave 5

Vi betragter det generelle lineære maksimeringsprogram

(P) Maksimér $7x_1 - x_2 - 4x_3$ under bibetingelser

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq -2 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Formulér det tilsvarende kanoniske lineære program (canP)

(b) Find en optimal basisløsning til det kanoniske lineære program (canP).

(c) Løs det oprindelige generelle program (P).

(SLUT)