JMM, Vinter 2012/2013

Besvarelse af MASO 2012A

Opgave 1

(a) Sammenligningskriteriet giver at rækken er konvergent fordi rækkens led er $< 16^{-n}$ fra et vist trin og kvotientrækken $\sum 16^{-n}$ er konvergent.
(b) Brug formlen for sum af en kvotientrække.
(c) I denne udregning

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} 2^{k/2} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/\sqrt{2}} 2^{k/2} \sum_{i=0}^{\infty} x^{k-1+8i}\,\mathrm{d}x = 2^{k/2} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} 2^{k/2} x^{k-1+8i}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2^{k/2} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{x^{k+8i}}{k+8i}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = 2^{k/2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k+8i} \frac{1}{2^{\frac{k+8i}{2}}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \frac{1}{k+8i}$$

tillader vi os ombytte symbolerne $\int_0^{1/\sqrt{2}}$ og $\sum_{i=0}^{\infty}$.
(d) Brug formlen ovenfor med $k = 1, 4, 5, 6$. Feks er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \frac{4}{8n+1} \overset{k=1}{=} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4 \cdot 2^{1/2}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \frac{2}{8n+4} \overset{k=4}{=} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2 \cdot 2^2 x^3}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{8x^3}{1-x^8}\,\mathrm{d}x$$

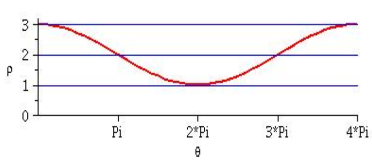
(e) Integralet bliver

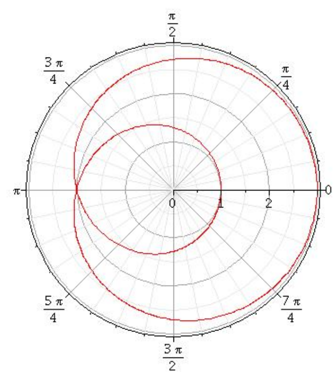
$$\int_0^1 \frac{16(y-1)}{y^4 - 2y^3 - 4y - 4}\,\mathrm{d}y$$

ved substitution $y = \sqrt{2}x$. Man kan vise at dette integral har værdien π. Derfor har vi nu formlen, kaldet BBP-formula, fra opgaven.

Opgave 2

Grafen for $\rho(\theta)$ er symmetrisk om $\theta = 2\pi$, $\rho(2\pi + \theta) = \rho(2\pi - \theta)$ når $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Desuden er $\cos(2\pi \pm \theta) = \cos(\pm\theta) = \cos(\theta)$ og $\sin(2\pi \pm \theta) = \sin(\pm\theta) = \pm\sin(\theta)$. Altså er $z(2\pi + \theta) = \overline{z(2\pi - \theta)}$. Vi har $z(0) = 3$, $z(\pi) = -2$ og $z(2\pi) = 1$.





Kurven er symmetrisk over den reelle akse fordi $z(2\pi + \theta) = \overline{z(2\pi - \theta)}$.

Opgave 3

(a) Da alle variable er ≥ 0 giver første bibetingelse at $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq \frac{1}{2}$, $x_3 \leq \frac{1}{2}$. Derfor er $M(P)$ kompakt. Extremværdisætningen siger at (P) har en optimal løsning.
(b) Programmets tableau

		*	*	*	
		x_1	x_2	x_3	
*	y_1	1	2	2	≤ 1
*	y_2	-3	0	1	≤ 3
*	y_3	-2	-1	0	≤ -1
		≥ 3	≥ 4	≥ 5	

viser at det duale program er
(P') Minimér $y_1 + 3y_2 - y_3$ under bibetingelser

$$y_1 - 3y_2 - 2y_3 \geq 3, 2y_1 - y_3 \geq 4, 2y_1 + y_2 \geq 5, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

(P') har en optimal løsning fordi (P) har en optimal løsning.

(c) Den anden bibetingelse i (P') giver at at $y_1 \geq 2$. Da $y_1 > 0$, så er den første bibetingelse i (P) aktiv. Det giver $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3$. Indsætter vi denne værdi for x_1 kommer vi til programmet
Maksimér $-2x_2 - x_3 + 3$ under bibetingelser

$$6x_2 + 7x_3 - 3 \leq -1, 3x_2 + 4x_3 - 2 \leq -1, 2x_2 + 2x_3 \leq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Dette lineære problem kan løses geometrisk ved at lave en tegning i planen. Vi finder at $(x_2, x_3) = (0, 0)$ er optimal. Den optimale løsning til (P) er da $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$. Den optimale værdi er $\sup(P) = 3$. Bemærk at bibetingelser nummer 2 og 3 i (P) ikke er aktive.

(d) Da vi har en optimal løsning til (P) med $x_1 > 0$ er den første bibetingelse i (P') aktiv. Desuden er $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ og kriteriefunktionen har værdi $3 = y_1 + 3y_2 - y_3 = y_1$. Dette følger af Dualitetssætningen. Værdien i $(y_1, y_2, y_3) = (3, 0, 0)$ er 3. Vi har nu fundet to optimale løsninger.

Opgave 4

(a) Hele Alices liv går ud på at løse (A).

(b) Lagrangebetingelserne er $F(x_1, x_2, L, \lambda, p_1, p_2, w) = 0$ hvor

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ L \\ \lambda \\ p_1 \\ p_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1x_1 + p_2x_2 + w(L - T) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda p_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda p_2 \\ \frac{\partial f}{\partial L} - \lambda w \end{pmatrix}$$

(c) Vi kan løse ligningen $F(x_1, x_2, L, \lambda, p_1, p_2, w) = 0$ for de fire variable (x_1, x_2, L, λ) hvis deres Jacobimatrix

$$\frac{\partial F}{\partial(x_1, x_2, L, \lambda)} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & w & 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial L} & -p_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial L} & -p_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial L} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial L} & \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial L} & -w \end{pmatrix} = H$$

er invertibel.

(d) Implicit Funktion Sætning siger at

$$H \frac{\partial}{\partial(p_1, p_2, w)} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ L^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} + \frac{\partial F}{\partial(p_1, p_2, w)} = 0 \text{ hvor } \frac{\partial F}{\partial(p_1, p_2, w)} = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & L^* - T \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

hviket giver

$$\frac{\partial}{\partial(p_1, p_2, w)} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ L^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = -H^{-1} \frac{\partial F}{\partial(p_1, p_2, w)} = H^{-1} \begin{pmatrix} -x_1^* & -x_2^* & T - L^* \\ \lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* \end{pmatrix}$$

(e) Det aflæser vi på plads $(3, 3)$.

(f) Lineær approximation siger at $L^*(w + \Delta w) \approx L^*(w) + \frac{\partial L^*}{\partial w} \Delta w$. Om Alice vil arbejde mere eller mindre afhænger af fortegnet af $\frac{\partial L^*}{\partial w}$.

(g) Det står på plads $(1, 3)$ i den første ligning fra (d).

(h) Kædereglen.

(i) Vi beregner

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, L^*)}{\partial w} &\overset{(h)}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial L}\frac{\partial L^*}{\partial w} \\
&\overset{(b)}{=} \lambda^* p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \lambda^* p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial w} + \lambda^* w \frac{\partial L^*}{\partial w} \\
&= \lambda^* \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial w} + w \frac{\partial L^*}{\partial w} \right) \\
&\overset{(g)}{=} \lambda^* (T - L^*)
\end{aligned}
$$