MASO 2012A

Denne opgave består af 4 delopgaver på 2 sider. Opgaven skal besvares individuelt indenfor 72 timer. Besvarelsen skal forsynes med en forside med tydeligt navn og underskrift samt sideantal (inklusive forsiden), og den skal sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Besvarelsen afleveres på Student Hub senest ved eksamens afslutning. Ved bedømmelsen lægges der vægt på argumentationens kvalitet. Der kan henvises til lærebøgerne (Fuglede–Grubb–Madsen og Sydsæter) samt til undervisningsmateriale publiceret på MASO 2012 hjemmesiden (ugesedler, slides F1–F11 og forelæsningsnoter).
Det kan lade sig gøre at besvare opgaven på under 10 håndskrevne $A4$-sider. Skriv tydeligt og kun på én side på hvert ark. Besvarelser på over 15 sider bliver smidt i skraldespanden.

Opgave 1

Denne opgave går ud på at vise formlen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = \frac{159}{19576} + \frac{829}{5006080} + \frac{79}{15535104} + \cdots = \pi \tag{1}$$

(a) Brug et af konvergenskriterierne til at vise at den uendelig række i (1) er konvergent.

(b) Udnyt din viden om kvotientrækker til at vise at

$$\frac{x^{k-1}}{1-x^8} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{k-1+8n}$$

når k er et helt tal > 1 og x er et reelt tal med $|x| < 1$.

(c) Redegør for at der gælder

$$2^{k/2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+k)}$$

Vink: Det er helt i orden at ombytte $\int_0^{1/\sqrt{2}}$ og $\sum_{n=0}^{\infty}$, hvis du skulle få brug for det ...

(d) Vis at der gælder

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x$$

(e) (Udelad detaljer ved besvarelsen af dette punkt.) Hvordan ser integralet ud efter substitutionen $y = \sqrt{2}x$? Hvad er mon integralets værdi? Hvordan kommer vi nu til identiteten (1)?

Opgave 2

(a) Tegn grafen for funktion $\rho(\theta) = 2 + \cos(\theta/2)$, $0 \leq \theta \leq 4\pi$, i et retvinklet koordinatsystem med første-akse θ og anden-akse ρ.

(b) Sæt

$$z(\theta) = \rho(\theta)(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 4\pi],$$

Hvad er $z(0)$, $z(\pi)$ og $z(2\pi)$? Vis at $z(2\pi + \theta) = \overline{z(2\pi - \theta)}$ når $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(c) Tegn kurven med parameterfremstilling $\theta \to z(\theta)$, $\theta \in [0, 4\pi]$. Find en symmetri i kurven.

Opgave 3

Vi ser på det lineære standard maksimeringsprogram

(P) Maksimér $3x_1 + 4x_2 + 5x_3$ under bibetingelser

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 1 \\ -3x_1 \qquad\quad + x_3 &\leq 3 \\ -2x_1 - x_2 \qquad\quad &\leq -1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Redegør for at (P) har en optimal løsning.

(b) Formulér det duale program (P'). Har (P') en optimal løsning?

(c) Vis at en optimal løsning y til (P') har $y_1 \geq 2$. Brug komplementær slæk og find (geometrisk) en optimal løsning til det primale program (P).

(d) Find en optimal løsning til det duale program (P').

Opgave 4

Alice bruger alle sine penge på vare 1 og vare 2. Hun køber x_1 enheder, til prisen p_1, af vare 1 og x_2 enheder, til prisen p_2, af vare 2. Hun arbejder hele sit liv på T timer, bortset fra L timer hvor hun holder fri. Hendes arbejdsløn efter skat er w per arbejdstime. Alices nyttefunktion $f(x_1, x_2, L)$ måler hendes udbytte ved forbrug af x_1 enheder af vare 1, x_2 enheder af vare 2, og ved at holde fri i L timer.

(a) Hvad har maksimeringsproblemet (A) nedenunder at gøre med Alice's liv?

$$\text{(A)} \qquad \text{Maksimer } f(x_1, x_2, L) \text{ under bibetingelsen } p_1x_1 + p_2x_2 + w(L - T) = 0$$

(b) Begrund at Lagrangebetingelserne for maksimeringsproblemet (A) er

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 + w(L - T) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda p_1 &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda p_2 &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial L} - \lambda w &= 0 \end{aligned}$$

(c) Forklar hvorfor Lagrangebetingelserne har en løsning på formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ L \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^*(p_1, p_2, w) \\ x_2^*(p_1, p_2, w) \\ L^*(p_1, p_2, w) \\ \lambda^*(p_1, p_2, w) \end{pmatrix}$$

i nærheden af en given løsning hvis ellers matricen H er invertibel hvor

$$H = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & w & 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial L} & -p_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial L} & -p_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial L} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial L} & \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial L} & -w \end{pmatrix}$$

(d) Redegør for ligningerne

$$H \frac{\partial}{\partial(p_1, p_2, w)} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ L^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1^* & -x_2^* & T - L^* \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial(p_1, p_2, w)} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ L^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{pmatrix} -x_1^* & -x_2^* & T - L^* \\ \lambda^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^* \end{pmatrix}$$

(e) Vis at

$$\frac{\partial L^*}{\partial w} = (H^{-1})_{31}(T - L^*) + (H^{-1})_{34}\lambda^*$$

hvor $(H^{-1})_{ij}$ er indgang ij i matricen H^{-1}.

(f) Alices arbejdsløn efter skat ændrer sig ganske lidt fra w til $w + \Delta w$. Giv et estimat af Alices fritid $L^*(w + \Delta w)$ med den nye indkomst. Er det klart at Alice vil arbejde mere, hvis hun får mere i løn efter skat?

(g) Du har allerede vist at

$$p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial w} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial w} + w \frac{\partial L^*}{\partial w} = T - L^*$$

Hvor har du vist det?

(h) En (velkendt?) matematisk sætning siger at

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, L^*)}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2^*}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial L^*}{\partial w}$$

Hvilken sætning?

(i) Økonomer tolker Lagrangemultiplikatoren som den marginale nytte af arbejdslønnen per arbejdstime. Dermed mener de at

$$\lambda^* = \frac{1}{T - L^*} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, L^*)}{\partial w}$$

Hvorfor er det rigtigt?

(SLUT)