JMM, Vinter 2011/2012

Besvarelse af MASO 2011A

Opgave 1

(a) Vi har at

$$\int \frac{1}{x^2+x^4}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{x} - \mathrm{Arctan}(x), \qquad \int_N^\infty \frac{1}{x^2+x^4}dx = \frac{1}{N} + \mathrm{Arctan}(N) - \frac{\pi}{2}$$

for alle $N > 0$.

(b) Brug enten Integralkriteriet eller Sammenligningskriteriet (alle ved at $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ er konvergent).

(c) Integralkriteriet giver at

$$s_{10} + \frac{1}{11} + \mathrm{Arctan}(11) - \frac{\pi}{2} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+n^4} \le s_{10} + \frac{1}{10} + \mathrm{Arctan}(10) - \frac{\pi}{2}$$

så vi kan tage $t = \frac{1}{11} + \mathrm{Arctan}(11) - \frac{\pi}{2}$ og $T = \frac{1}{10} + \mathrm{Arctan}(10) - \frac{\pi}{2}$.

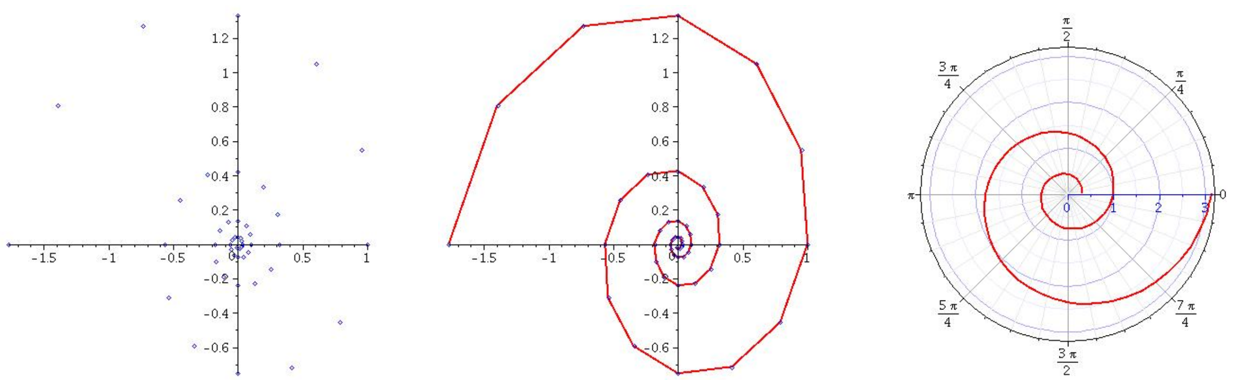
(d) Vi ved fra (a) at $s_\infty = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+n^4}$ ligger i intervallet $[s_{10}+t, s_{10}+T]$ af længde $T-t$. Midtpunktet, $s_{10}+t+\frac{1}{2}(T-t) = s_{10} + \frac{1}{2}(T+t)$, af intervallet ligger derfor højst halvdelen af intervallets længde fra s_∞:

$$|s_\infty - (s_{10} + \frac{1}{2}(T+t))| \le \frac{1}{2}(T-t)$$

Opgave 2 (Logaritmisk spiral)

(a) $\rho(z) = \frac{11}{20}\rho(\sqrt{3}+i) = \frac{11}{20}\cdot 2 = \frac{11}{10}$, $\theta(z) = \theta(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$ da $\cos\theta(\sqrt{3}+i) = \frac{\sqrt{3}}{\rho(z)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

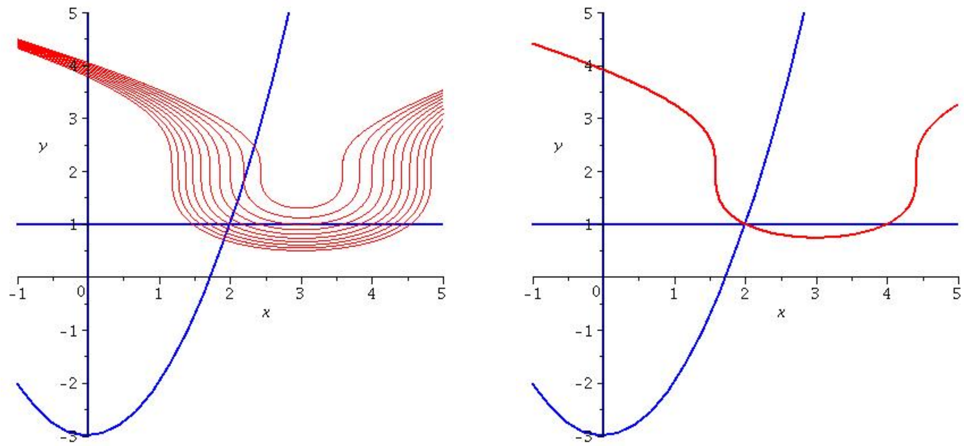
(b) Her er en tegning af nogle af punkterne $z^n = (n\frac{11}{10} : n\frac{\pi}{6})$



(c) Vi har $n\frac{\pi}{6} = a\ln\left(\frac{11}{10}^n\right)\big)$ med $a = \frac{\pi}{6}/\ln(\frac{11}{10})$.

Opgave 3

(a) Her er to tegninger af A_0



(b) A_0 er afsluttet som fællesmængde af tre afsluttede mængder. A_0 er begrænset da $A_0 \subseteq B((0,0),100)$. Derfor er A_0 kompakt. Enhver kontinuert funktion har en største- og mindsteværdi på en kompakt mængde.

(c) $f(0,-3) = 134$, $f(0,1) = 10$, $f(2,1) = 2$.

(d) KKTNB nødvendige betingelser er

- $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$
- $x^2 - y - 3 \leq 0$, $y \leq 1$, $x \geq 0$
- $u_1(x^2 - y - 3) = 0$, $u_2(y-1) = 0$, $u_3 x = 0$
- $\begin{pmatrix} 2x - 6 + 2u_1 x - u_3 \\ -3(y-2)^2 - u_1 + u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) I det indre af A_0 er regularitetskravet opfyldt fordi alle bibetingelser slække. En optimal løsning i det indre vil derfor opfylde KKTNB med $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Men kun $(2,3)$ opfylder disse krav og det ligger ikke i A_0.

(f) Den optimale værdi er højst 2. Da $f(A_0 \cap g_3^{-1}(0)) = [10, 134]$ indeholder $A_0 \cap g_3^{-1}(0)$ ingen optimale løsninger. Alternativt, er der ingen mulige løsninger med $x = 0$ som opfylder KKTNB $u_3 \geq 0$, $-6 - u_3 = 0$.

(g) $\frac{\partial g_1}{\partial(x,y)} = (2x, -1)$ og $\frac{\partial g_2}{\partial(x,y)} = (0,1)$ er lineært uafhængige når $x > 0$.

(h) Lad (x,y) være en optimal løsning til (P). Så ligger (x,y) på randen af A_0 og $x > 0$. Det vil sige at g_1 eller g_2 eller begge er aktive. Hvis kun g_1 er aktiv, er $u_2 = 0$ og $u_3 = 0$. Ligningen $-3(y-2)^2 - u_1 = 0$ viser at $y = 2$ (og $u_1 = 0$), men der er ingen mulige løsninger med $y = 2$. Altså må g_2 være aktiv. På $A_0 \cap g_2^{-1}(0)$ er $y = 1$ og objektfunktionen $f(x,1) = (x-3)^2 + 1$ har sin mindste værdi når x er tættest muligt på 3, dvs $x = 2$. Altså er $(x,y) = (2,1)$ den eneste optimale løsning. Den optimale værdi er $f(2,1) = 2$.

Opgave 4

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial(x,y,z)} & \frac{\partial F}{\partial(u,v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + zu & 2xy + v^2 & xu & xz & 2yv \\ 3x^2yz + 2v & x^3 z & x^3 y & -2uv^2 & 2x - 2u^2 v \end{pmatrix}$

(b) $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z,u,v)}(1,1,1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(1,1,1,1,1) & \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(1,1,1,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Implicit Funktion Sætning siger at fordi $\dfrac{\partial F}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ er invertibel så er

- (u,v) implicit bestemt som funktioner af (x,y,z) ved ligningen $F(x,y,z,u,v) = 0$
- ligningnen

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)} + \frac{\partial F}{\partial(u,v)} \frac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gælder tæt ved $(1,1,1)$.

(d) $\dfrac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)}(1,1,1) = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial(u,v)}\right)^{-1} \dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ -9 & -7 & -3 \end{pmatrix}$

(e) Dette er indgang $(2,2)$ i $\dfrac{\partial F}{\partial(x,y,z)} + \dfrac{\partial F}{\partial(u,v)} \dfrac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial(x,y,z)}$ fra punkt (c).

Opgave 5

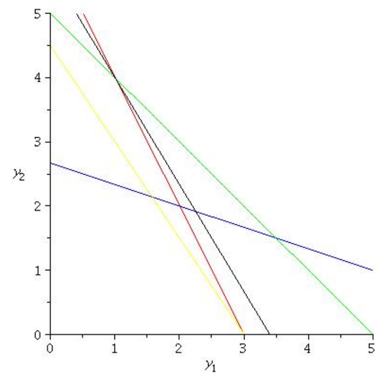
Programmets tableau

		*	*	*	*	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
*	y_1	2	1	1	3	≤ 5
*	y_2	1	3	1	2	≤ 3
		≥ 6	≥ 8	≥ 5	≥ 9	

(a) Det duale program er
(P') Minimér $5y_1 + 3y_2$ under bibetingelser

$$2y_1 + y_2 \geq 6, y_1 + 3y_2 \geq 8, y_1 + y_2 \geq 5, 3y_1 + 2y_2 \geq 9$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

(b) En tegning viser at $y^* = (1, 4)$ er en optimal løsning til (P'). Den optimale værdi er $\inf(P') = 17$.



Bemærk at bibetingelser nummer 2 og 4 ikke er aktive.

(c) Lad x være en optimal løsning til (P). Dualitetssætningen fortæller at første og anden bibetingelse i (P) er aktive, at $x_2 = 0$ og $x_4 = 0$, og at objektfunktionens værdi i x er 17. Vi ved altså at

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Det giver $(x_1, x_3) = (2, 1)$, dvs $(x^*)^t = (2, 0, 1, 0)$. Nu er er x^* og y^* optimale løsninger til (P) og (P').